نشریه دانشکده فنی، جلد ۳۹، شماره ۳، شهریور ماه ۱۳۸۴، از صفحه ۲۷۹ تا ۲۸۶

روش گالرکین در تحلیل غیر خطی صفحات مثلثی

محمد مهدی سعادتپور

استاد دانشکده مهندسی عمران – دانشگاه صنعتی اصفهان

علیرضا شهیدی

دانشجوی دکتری سازه – دانشگاه صنعتی اصفهان

مجتبی ازهری

استاد دانشکده مهندسی عمران – دانشگاه صنعتی اصفهان

(تاریخ دریافت ۸۲/۶/۲۹، تاریخ دریافت روایت اصلاح شده ۸۴/۲/۲۸، تاریخ تصویب ۸۴/۴/۱۱)

چکیده

در این مقاله با استفاده از تئوری غیرخطی ون ـ کارمن، معادلات دیفرانسیل حاکم بر رفتار ورقهای نازک در تغییرشکلهای بزرگ مرور شده و سپس فرمول بندی روش عددی گالرکین در دستگاه مختصات مساحتی برای حل این معادلات دیفرانسیل ارائه شده است. به کمک دستگاه مختصات مساحتی متغیرهای موجود در سیستم معادلات انتگرالی روی دامنه درونیابی شده و آنگاه دستگاه معادلات غیرخطی حاصله برحسب مختصات تعمیم یافته به روش نیوتن رافسون حل شده است. نتایج مربوط به شکلهای متنوع ورق مثلثی، از جمله متساوی‌الاضلاع، قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین، تحت اثر بار استاتیکی استخراج گردیده و با نتایج تحقیقات موجود در این زمینه مقایسه شده است.

واژه های کلیدی : روش گالرکین، تحلیل غیر خطی، تغییر شکلهای بزرگ، ورق مثلثی

مقدمه

آنالیز استاتیکی ورقهای نازک با هندسه و شرایط مرزی متفاوت، از جمله ورقهای مثلثی شکل، تحت بارگذاریهای مختلف در بعضی از طراحیهای صنعتی مورد درخواست است. این مساله در مهندسی سازه نیز کاربرد دارد [۱-۳]. تحلیل استاتیکی ورقهای نازک در تغییرشکلهای کوچک در موارد بسیار خاصی به طور دقیق و در حالت کلی به کمک روشهای عددی از جمله روش تفاوت محدود، روش رتیز، روش اجزاء محدود و روش نوار محدود انجام می‌گیرد. امروزه نرم‌افزارهای متعددی وجود دارند که حل خطی ورقها به کمک آنها به سهولت انجام می‌پذیرد. علیرغم این، به دلیل سهولت در دستیابی به جواب و نیز احتراز از کاربرد یک نرم‌افزار با گستردگی بالا برای ورقهای با شکلهای کلاسیک نظیر مستطیل، مثلث، دایره و یا حتی چهارضلعی کلی می‌توان برنامه‌های بسیار ساده‌تر تدارک دید [۴-۶].

در تغییرشکلهای بزرگ، رفتار خمشی ورقها با رفتار واقع ـ در ـ سطح آنها توام گردیده و منجر به افزایش سختی ورق در مقابل بارهای عرضی می‌شود. از طرف دیگر، رفتار واقع- در- سطح ورقها در تراز بارهای بزرگتر از بار کمانش با رفتا رخمشی آنها درگیر شده و منجر به افزایش ظرفیت باربری به میزان بیش از بار بحرانی می‌شود. رفتار بعد از کمانش ورقهای نازک، خصوصاً در صنایع هوا فضا که تقاضا برای نسبت بالای مقاومت به جرم مطرح می باشد، بسیار با اهمیت است.

تحلیل عددی ورقهای مثلثی با شکل کلی و با شرایط مرزی مختلف تحت هرگونه بار عرضی توسط سعادتپور و مخالفی [۵] انجام گرفته است. ایشان برای حل مساله از نگاشت از مثلث مرجع به مثلث حقیقی و درونیابی جابجایی در دستگاه مثلثی استفاده می کنند. تحلیل ارتعاش آزاد صفحات مثلثی با ضخامت غیریکنواخت خطی و شرایط مرزی مختلف توسط سعادتپور [۶] ارائه گردید، در این مطالعه امکان کاربرد معادلات الاستیسیته ارتوتروپیک و نتیجتاً دستیابی به حل ارتعاش ورقهای مثلثی لایه لایه کامپوزیت فراهم است. کمانش ورقهای مثلثی تحت فشارهای یکنواخت محیطی توسط وانگ و لیو [۷] مورد مطالعه قرار گرفت. ایشان در تحلیل خود روش ریلی ـ رتیز همراه با درونیابی چند جمله‌ای جابجایی را به خدمت می‌گیرند. در مطالعه‌ای مشابه، لیکن به کمک مثلث مرجع در دستگاه طبیعی، جانکی و نایت [۸] کمانش ورقهای نازک مثلثی شکل

غیر ایزوتروپیک را مورد بررسی قرار دادند و به کمک روش تغییراتی و استفاده از چند جمله‌ایهای ارائه شده در دستگاه طبیعی توانستند بار بحرانی ورق مثلثی با شرایط مرزی مختلف و آرایش متنوع نیروهای واقع-در- سطح N_x, N_y, N_{xy}، را استخراج نمایند. ورقهای مثلثی ضخیم در مطالعه‌ای که در ۲۰۰۱ توسط هونگژی ژونگ [۹] انجام گرفت مورد بررسی واقع شد. وی از روش DQ برای حل معادلات دیفرانسیل ورق ضخیم استفاده نمود. ارتعاش ورقهای مثلثی با لبه‌های آزاد در مقاله‌ای به همین نام توسط لیسا و جابر [۱۰] به طور گسترده مورد تحقیق قرار گرفت. برای حصول پاسخ اصل هامیلتون همراه با درونیابی چند جمله‌ای جابجایی ورق به خدمت گرفته شد و نتایج زیادی برای نسبتهای مختلف ابعادی استخراج گردید که می‌تواند به عنوان مسائل مرجع مورد استفاده محققین واقع شود.

هدف اصلی این مقاله گسترش حل ورقهای نازک مثلثی در وضعیت تغییرشکلهای بزرگ می‌باشد. برای حصول این هدف از تئوری ون ـ کارمن [۹] مربوط به تغییرشکلهای بزرگ ورق استفاده می‌شود. در این مطالعه تنها شرایط مرزی لولایی مورد استفاده قرار می‌گیرد و برای حل معادلات غیرخطی حاکم بر رفتار ورق از روش گالرکین اصلاح شده بهره گرفته می‌شود. معادلات تعادل عرضی ورق به صورت دو متغیره هم برحسب جابجایی عرضی و هم بر حسب پارامتر جمع لنگر M بکار می‌روند. با کاربرد قضیه دیورژانس و تبدیل انتگرالها به فرم ضعیف معادلات انتگرلی می‌رسیم که در آن انتگرالهای روی مرز حذف شده و انتگرالهای میدانی تنها با جملات زیر انتگرالی با مرتبه اول مشتق گیری ظاهر می‌شوند. برای دستیابی به حل نهایی مساله هر دو متغیر جابجایی w و جمع لنگر M در دستگاه مختصات مساحتی بسط یکسان چند جمله‌ای داده می‌شوند . گسترش این روش به شرایط مرزی غیرلولایی به سهولت امکان پذیر بوده، لیکن در این حالت شرط مرزی M متفاوت از شرط مرزی w بوده و این دو پارامتر درونیابی متفاوتی خواهند داشت.

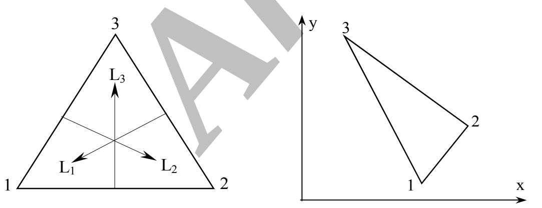
استفاده از روش گالرکین در حل مسائل ورقها به طور محدودتری در مقایسه با روشهای دیگر عددی انجام پذیرفته است. روش گالرکین در حل ورقهای چهارضلعی کلی تحت بارهای استاتیکی و با شرایط مرزی ساده توسط سعادتپور و ازهری [۴] در سال ۱۹۹۸ ارائه گردید. در همین سال کمانش ورقهای چهارضلعی کلی با تکیه‌گاههای میانی و شرایط مرزی ساده به روش گالرکین توسط سعادتپور، ازهری و برادفورد حل گردید [۱۱] همین محققین در سال ۲۰۰۰ آنالیز ارتعاشی ورقهای چهارضلعی کلی را به روش گالرکین ارائه نمودند [۱۲]. در این حل امکان کاربرد تکیه‌گاههای تیغه‌ای میانی و نیز تکیه‌گاههای نقطه‌ای فراهم است.

تئوری

فرمول بندی تحلیل یک ورق نازک در تغییر شکلهای بزرگ با تبدیل میدان فیزیکی (x,y) به میدان محاسباتی (L_1,L_2,L_3) انجام می‌گیرد. یک مثلث کلی را مطابق شکل (۱) در نظر بگیرید. شکل (۱- الف) وضعیت مثلث حقیقی را در دستگاه مختصات xy و شکل (۱- ب) وضعیت مثلث مبنا را در دستگاه مختصات مساحتی L_1,L_2,L_3 نشان می‌دهد. مثلث شکل (۱-الف) از نگاشت مثلث شکل (۱- ب) مطابق قانون تبدیل زیر حاصل می‌شود:

$$\left.\begin{aligned} x &= L_1x_1 + L_2x_2 + (1-L_1-L_2)x_3 \\ y &= L_1y_1 + L_2y_2 + (1-L_1-L_2)y_3 \end{aligned}\right\} \tag{۱}$$

به طوری که L_1 و L_2 مختصات مساحتی و $x_i, y_i \quad (i=1,2,3)$ مختصات گوشه‌ها یا رئوس مثلث هستند. چنین تبدیل مختصاتی لازم است تا بتوان شرایط مرزی را به سادگی اعمال نمود. جاکوبین تبدیل مطابق زیر نوشته می‌شود:



شکل (۱-ب) شکل (۱-الف)

شکل ۱: مثلثهای حقیقی و مبنا.

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \partial x/\partial L_1 & \partial y/\partial L_1 \\ \partial x/\partial L_2 & \partial y/\partial L_2 \end{bmatrix} \tag{۲}$$

که با کاربرد معادلات (۱) خواهیم داشت:

$$\mathrm{J}=\begin{bmatrix} x_1-x_3 & y_1-y_3 \\ x_2-x_3 & y_2-y_3 \end{bmatrix}$$

(۳)

بنابراین:

$$\mathrm{J}^{-1}=\frac{1}{x_{13}y_{23}-x_{23}y_{13}}\begin{bmatrix} y_{23} & -y_{13} \\ -x_{23} & x_{13} \end{bmatrix}$$

(۴)

که در آن $x_{ij}=x_i-x_j\,,y_{ij}=y_i-y_j$ است. تئوری غیرخطی ون- کارمن برای تغییرشکلهای بزرگ صفحات نازک در قالب معادلات تعادل واقع ـ در ـ سطح به صورت زیر است:

$$\left.\begin{aligned} N_{x,x}+N_{xy,y}=0 \\ N_{yx,x}+N_{y,y}=0 \end{aligned}\right\}$$

(۵-الف)

و معادلات تعادل عرضی (خمشی) زیر ارائه می‌شود:

$$\left.\begin{aligned} &\nabla^2 M+N_x w_{,xx}+2N_{xy}w_{,xy} \\ &+N_y w_{,yy}+p_{(x,y)}=0 \\ &M+D_b\nabla^2 M=0 \end{aligned}\right\}$$

(۵-ب)

به طوری که N_x ، N_y و N_{xy} مولفه‌های غشائی نیرو در واحد طول مقطع، w جابجایی عرضی ورق، $p_{(x,y)}$ بار گسترده بر واحد سطح، $D_b=\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$ سختی خمشی ورق، E مدول الاستیسیته، t ضخامت و ν نسبت پواسون می‌باشد. همچنین M پارامتر جمع ـ لنگر بوده که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$M=\frac{M_x+M_y}{1+\nu}=-D\nabla^2 w$$

(۶)

که در آن M_x و M_y به ترتیب لنگر خمشی واحد طول مقطع در راستای x و راستای y است. ارزیابی این لنگرها مطابق معادلات زیر انجام می‌گیرد:

$$\left.\begin{aligned} M_x=-D(w_{,xx}+\nu w_{,yy}) \\ M_y=-D(w_{,yy}+\nu w_{,xx}) \end{aligned}\right\}$$

(۷)

بر طبق تئوری ون ـ کارمن کرنشهای واقع ـ در ـ سطح مطابق روابط زیر برحسب مولفه‌های جابجائی u ، v و w که به ترتیب در راستاهای x و y و عمود بر سطح میانی ورق تعریف می‌شوند، ارائه می‌گردد:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x &= u_{,x}+\frac{1}{2}(w_{,x})^2 \\ \varepsilon_y &= v_{,y}+\frac{1}{2}(w_{,y})^2 \\ 2\varepsilon_{xy} &= u_{,y}+v_{,x}+(w_{,x})(w_{,y}) \end{aligned}\right\}$$

(۸)

و لذا در یک ورق ایزوتروپیک نیروهای واقع ـ در ـ سطح از رابطه ماتریسی زیر بدست می‌آیند:

$$\mathrm{N}=\mathrm{D}_m\varepsilon$$

(۹)

به طوری که $\mathbf{N}^T=\langle N_x\ N_y\ N_{xy}\rangle$ ، $\boldsymbol{\varepsilon}^T=\langle \varepsilon_x\ \varepsilon_y\ \varepsilon_{xy}\rangle$ و

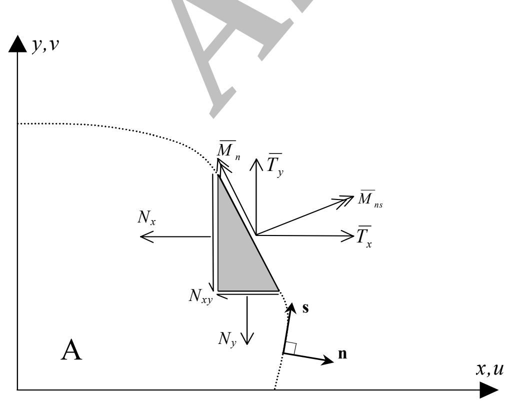
$$\mathrm{D}_m=\frac{Et}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

(۱۰)

شرایط مرزی، اعم از شرایط مرزی هندسی و طبیعی، بدون توجه به مرتبه بزرگی تغییرشکل به صورت رابطه (۱۱) قابل ارائه است. که در آن علامت (-) به منظور تاکید بر معلوم بودن پارامتر مربوطه بر روی مرز می باشد؛ شکل (۲) وضعیت شرایط مرزی طبیعی بر روی مرز ورق را نشان می دهد.

$$\left.\begin{aligned} u=\bar{u} \quad & or \quad T_x=\bar{T}_x \\ v=\bar{v} \quad & or \quad T_y=\bar{T}_y \\ w=\bar{w} \quad & or \quad Q=\bar{Q} \\ w_{,n}=\bar{w}_{,n} \quad & or \quad M_n=\bar{M}_n \\ w_{,s}=\bar{w}_{,s} \quad & or \quad M_{ns}=\bar{M}_{ns} \end{aligned}\right\}$$

(۱۱)



شکل۲: نمایش شرایط مرزی طبیعی بر روی مرز ورق

معادلات دیفرانسیل ارائه شده به همراه شرایط مرزی داده

شده تحلیل غیرخطی ورقها در تغییرشکلهای بزرگ را ممکن می‌سازد؛ لیکن در حالت کلی حل بسته این معادلات غیرمحتمل بوده و لازم است به یکی از روشهای عددی موجود حل شوند.

به منظور حل عددی معادلات دیفرانسیل (۵) لازم است میدانهای جابجایی u، v و w و نیز پارامتر جمع لنگر M با توجه به شرایط مرزی مساله در روی بازه مورد نظر درونیابی شوند. برای یک ورق مثلثی در دستگاه مختصات مساحتی و با تکیه‌گاههای ساده، میدان جابجایی w و پارامتر جمع ـ لنگر M در قالب چند جمله‌ایهای زیر قابل درونیابی هستند[۶]:

$$\left.\begin{array}{l} w = L_1 L_2 L_3 \sum\limits_{i=0}^{p}\sum\limits_{j=0}^{p}\sum\limits_{k=0}^{p} w_{ijk} L_1^i L_2^j L_3^k \\ M = L_1 L_2 L_3 \sum\limits_{i=0}^{p}\sum\limits_{j=0}^{p}\sum\limits_{k=0}^{p} M_{ijk} L_1^i L_2^j L_3^k \\ i+j+k=p \end{array}\right\}$$

(۱۲)

که با انتخاب توان p می‌توان به هر تعداد دلخواه جملات درونیابی را زیاد نمود. میدانهای جابجایی واقع- در- سطح u و v سازگار با شرایط مرزی ورق اختیار می‌شوند، به طوری که اگر لبه ورق در راستای واقع- در- سطح گیردار باشد جابجایی بر روی مرز صفر است، در غیراین صورت جابجایی غیر صفر است.

بنابراین در حالتی که حرکت واقع- در- سطح ثابت شده باشد توابع درونیابی u و v نظیر توابع w و M خواهد بود، لیکن در مورد هر یک از دو پارامتر قبلی و این دو پارامتر تعداد جملات p را می‌توان متفاوت اختیار کرد. پیشنهاد می‌شود در مورد u و v تعداد جملات یکسانی اختیار شود.

در این مقاله روشی که برای حل معادلات دیفرانسیل غیرخطی ورق (۵) با شرایط مرزی مورد نظر مورد استفاده قرار می‌گیرد، روش گالرکین است. روش گالرکین که در حقیقت یک روش انتگرالی برای حل معادلات دیفرانسیل است بر مبنای بسط توابع وابسته برحسب توابع پایه مناسب و سپس استفاده از توابع مناسب دیگر و یا همان توابع به عنوان توابع وزن برای تولید معادلات متعدد انتگرالی به تعداد ضرائب مجهول، برای دستیابی به این ضرایب مجهول توابع پایه، می‌باشد.

در مساله حاضر با توجه به وجود چهار معادله تعادل (۵) این معادلات را در $\delta w, \delta v, \delta u$ و δM که به ترتیب نمایانگر توابع وزن پارامترهای u، v، w و M هستند ضرب نموده و در بازه مساله انتگرال گیری می‌کنیم.

$$\left.\begin{array}{l} \int_A (N_{x,x} + N_{xy,y})\delta u \, dA = 0 \\ \int_A (N_{yx,x} + N_{y,y})\delta v \, dA = 0 \\ \int_A (\nabla^2 M + N_x w_{,xx} + 2N_{xy} w_{,xy} \\ \quad + N_y w_{,yy} + p_{(x,y)})\delta w \, dA = 0 \\ \int_A (\frac{M}{D} + \nabla^2 w)\delta M \, dA = 0 \end{array}\right\}$$

(۱۳-الف)

به منظور اصلاح معادلات (۱۳-الف) قبل از انجام انتگرال گیری نهایی، ابتدا دو معادله اول و دوم را به کمک قضیه دیورژانس به صورت زیر در می‌آوریم:

$$\left.\begin{array}{l} \int_A (N_x \delta u_{,x} + N_{xy}\delta u_{,y})dA - \oint_S \overline{T}_x \delta u \, dS = 0 \\ \int_A (N_{xy}\delta v_{,x} + N_y \delta v_{,y})dA - \oint_S \overline{T}_y \delta v \, dS = 0 \end{array}\right\}$$

(۱۳- ب)

که با فرض $\delta u = 0$ یا $\overline{T}_x = 0$ روی قسمتی از مرز و نیز $\delta v = 0$ یا $\overline{T}_y = 0$ روی قسمت دیگر مرز، معادلات اخیر ساده می شود به:

$$\left.\begin{array}{l} \int_A (N_x \delta u_{,x} + N_{xy}\delta u_{,y})dA = 0 \\ \int_A (N_{xy}\delta v_{,x} + N_y \delta v_{,y})dA = 0 \end{array}\right\}$$

(۱۴-الف)

همچنین جمله اول داخل پرانتز معادله سوم (۱۳-الف) و جمله دوم معادله چهارم (۱۳-الف) با استفاده از قضیه دیورژانس به ترتیب به صورت زیر درمی‌آیند:

$$\left.\begin{array}{l} \int_A \nabla^2 M \, \delta w \, dA = -\int_A (M_{,x}\delta w_{,x} + M_{,y}\delta w_{,y})dA \\ + \oint_S (n_x M_{,x} + n_y M_{,y})\delta w dS \\ \int_A \nabla^2 w \delta M \, dA = -\int_A (w_{,x}\delta M_{,x} + w_{,y}\delta M_{,y})dA \\ + \oint_S (n_x w_{,x} + n_y w_{,y})\delta M dS \end{array}\right\}$$

(۱۴- ب)

که چون هر دو پارامتر δw و δM روی مرزها صفر هستند؛ خواهیم داشت:

$$\left.\begin{aligned}\int_A \nabla^2 M\,\delta w\,dA &= -\int_A (M_{,x}\delta w_{,x} + M_{,y}\delta w_{,y})dA \\ \int_A \nabla^2 w\,\delta M\,dA &= -\int_A (w_{,x}\delta M_{,x} + w_{,y}\delta M_{,y})dA\end{aligned}\right\}$$

(۱۴- ج)

با کاربرد معادلات (۱۴- ج) در دو معادله آخر (۱۳-الف) و نیز استفاده از معادلات (۱۴-الف)، معادلات انتگرالی تعادل آماده حل می‌شوند. حال چنانچه معادلات درونیابی (۱۲) و نیز معادلات درونیابی u و v را به صورت زیر بنوسیم:

$$\left.\begin{aligned}w &= \mathrm{N}\hat{\mathrm{w}} = \langle N_1\ \ N_2\ \dots\ N_{n_0}\rangle\{\hat{w}\} \\ M &= \mathrm{N}\hat{\mathrm{M}} = \langle N_1\ \ N_2\ \dots\ N_{n_0}\rangle\{\hat{M}\} \\ u &= \mathrm{N}^{(u)}\hat{\mathrm{u}} = \langle N_1^{(u)}\ \ N_2^{(u)}\ \dots\ N_{n_u}^{(u)}\rangle\{\hat{u}\} \\ v &= \mathrm{N}^{(v)}\hat{\mathrm{v}} = \langle N_1^{(v)}\ \ N_2^{(v)}\ \dots\ N_{n_v}^{(v)}\rangle\{\hat{v}\}\end{aligned}\right\}$$

(۱۵)

که در آن بردارهای سطری حاوی توابع پایه و بردارهای ستونی حاوی مختصات تعمیم یافته هستند. n_0 تعداد توابع شکل، در درونیابی میدانهای M, w و n_v, n_u به ترتیب تعداد توابع شکل، در درونیابی میدانهای v, u است. حال اگر این درونیابیها را در معادلات انتگرالی تعادل بکار برده و انتگرال گیری کنیم خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix}\mathrm{K}_{uu} & \mathrm{K}_{uv} & \mathrm{K}_{uw} & 0 \\ \mathrm{K}_{vu} & \mathrm{K}_{vv} & \mathrm{K}_{vw} & 0 \\ \mathrm{K}_{wu} & \mathrm{K}_{wv} & \mathrm{K}_{ww} & \mathrm{K}_{wm} \\ 0 & 0 & \mathrm{K}_{mw} & \mathrm{K}_{mm}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\hat{\mathrm{u}} \\ \hat{\mathrm{v}} \\ \hat{\mathrm{w}} \\ \hat{\mathrm{M}}\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}0 \\ 0 \\ \mathrm{F}_w \\ 0\end{Bmatrix} = 0$$

(۱۶)

معادله (۱۶) تنها برحسب $\hat{\mathbf{w}}$ غیرخطی است و لذا به منظور ساده‌سازی حل مساله ابتدا دو ردیف اول و دوم این معادله (۱۶) را در نظر گرفته و از آنها نتیجه زیر را استخراج می‌کنیم:

$$\begin{Bmatrix}\hat{\mathrm{u}} \\ \hat{\mathrm{v}}\end{Bmatrix} = -\begin{bmatrix}\mathrm{K}_{uu} & \mathrm{K}_{uv} \\ \mathrm{K}_{vu} & \mathrm{K}_{vv}\end{bmatrix}^{-1}\begin{Bmatrix}\mathrm{K}_{uw} \\ \mathrm{K}_{vw}\end{Bmatrix}\hat{\mathrm{w}}$$

(۱۷-الف)

و سپس از ردیف چهار استفاده کرده $\hat{\mathrm{M}}$ را برحسب $\hat{\mathrm{w}}$ بدست می‌آوریم:

$$\hat{\mathrm{M}} = -\mathrm{K}_{mm}^{-1}\mathrm{K}_{mw}\hat{\mathrm{w}}$$

(۱۷-ب)

و بالاخره با کاربرد معادلات (۱۷) در ردیف سوم (۱۶) نتیجه نهایی زیر حاصل می‌شود:

$$\mathrm{K}(\hat{w})\hat{\mathrm{w}} = \mathrm{F}_w$$

(۱۸)

به طوری که:

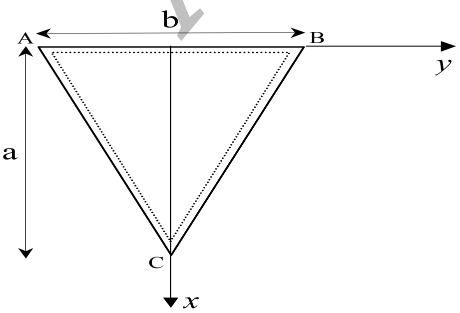
$$\mathrm{K}(\hat{w}) = -\left[\mathrm{K}_{wu}\quad \mathrm{K}_{wv}\right]\begin{bmatrix}\mathrm{K}_{uu} & \mathrm{K}_{uv} \\ \mathrm{K}_{vu} & \mathrm{K}_{vv}\end{bmatrix}^{-1}\begin{Bmatrix}\mathrm{K}_{uw} \\ \mathrm{K}_{vw}\end{Bmatrix} + \mathrm{K}_{ww} - \mathrm{K}_{mm}^{-1}\mathrm{K}_{mw}$$

(۱۹)

معادله (۱۸) به روش نیوتن رافسون حل شده و از آن بردار $\hat{\mathbf{w}}$ استخراج می‌گردد که با جانشین نمودن در معادلات (۱۷) بقیه متغییرهای مساله بدست می‌آید.

نتایج عددی

به منظور حل معادلات توسعه داده شده و ارائه مثالهای متنوع یک برنامه رایانه‌ای در محیط MATLAB تهیه شده که به سادگی قادر به حل عددی هر صفحه مثلثی با شرایط تکیه‌گاهی لولایی و تحت هر الگوی بارگذاری عرضی است. اولین مثال حل شده، مربوط به یک ورق متساوی‌الساقین تحت بارگذاری گسترده یکنواخت می‌باشد. ورق مزبور در شکل (۳) نشان داده شده است. حل خطی این ورق تحت بار گسترده یکنواخت، برای تعیین جابجایی نیمساز توسط سعادتپور و ازهری[۷] انجام شده که اکنون از آن برای آزمایش دقت برنامه رایانه‌ای استفاده می‌شود. همچنین به منظور مقایسه جوابها این ورق با نرم افزارANSYS نیز حل شده است.

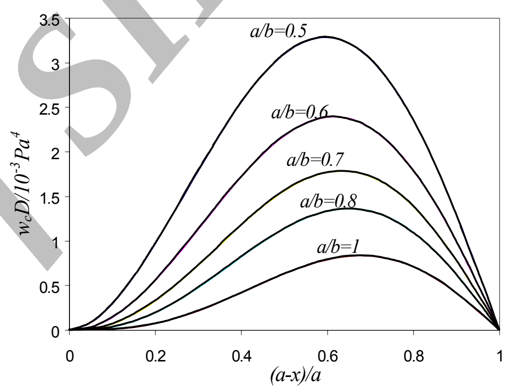


شکل۳: ورق متساوی الساقین با مرزهای ساده.

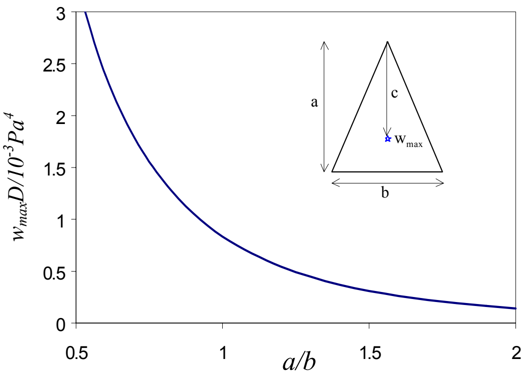
جدول ۱: جابجائی نیمساز ورق متساوی الساقین برای $a/b=1$.

	x/a	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
$\frac{wD}{pa^4 \times 10^{-3}}$	[7]	0.385	0.667	0.778	0.722	0.556	0.333	0.167
	ANSYS	0.386	0.656	0.763	0.718	0.566	0.369	0.181
	روش موجود	0.384	0.692	0.807	0.769	0.615	0.384	0.191

جدول (۱) نتایج حاصل از این مراجع را برای $a/b=1$ و مقادیر مختلف x/a جمع آوری کرده است.
همچنین در شکل (۴) منحنی جابجایی محور نیمساز مثلث منطبق بر محور x برای نسبتهای مختلف a/b رسم شده است. شکل (۵) منحنی تغییرات w_{max} را بر حسب مقادیر مختلف a/b نشان می دهد.

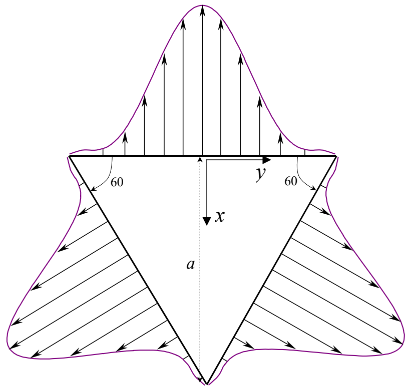


شکل۴: منحنی تغییر مکان نیمساز مثلث متساوی الساقین.

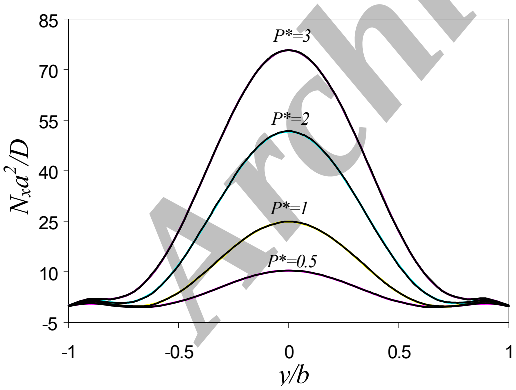


شکل۵: منحنی تغییرات w_{max} بر حسب مقادیر مختلف نسبت a/b.

حال به مطالعه رفتار یک ورق مثلثی شکل در تغییر شکلهای بزرگ می پردازیم. ایجاد و گسترش تنشهای غشائی که بعد از تجربه تغییر شکلهای خارج- از-سطح به وقوع می پیوندد باعث افزایش سختی و قدرت باربری ورق می شود لذا مطالعه و بررسی این تنشها به خصوص در مواردی که لبه های ورق در مقابل حرکتهای غشائی گیردار باشد حائز اهمیت است. شکل (۶) توزیع تنشهای غشائی کششی ایجاد شده بر روی مرزهای یک ورق متساوی الاضلاع را تحت اثر اعمال بار گسترده یکنواخت، به طور شماتیک نشان می دهد



شکل۶: نحوه توزیع تنش بر روی مرزهای یک ورق متساوی الاضلاع، تحت اثر بارگذاری عرضی.



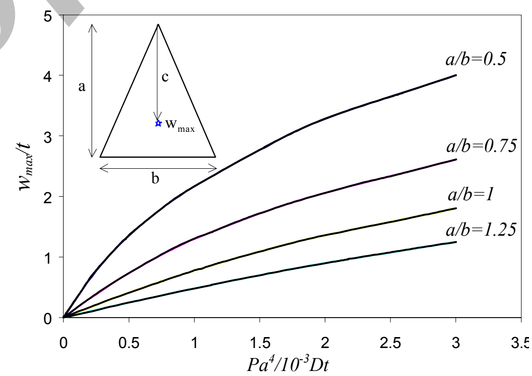
شکل۷: مقادیر تنشهای غشائی، بر روی مرزهای یک ورق متساوی الاضلاع، تحت اثر بارگذاری عرضی.

شکل (۷) منحنیهای توزیع تنشهای غشائی N_x ایجاد شده بر روی مرزهای یک ورق متساوی الاضلاع (شکل (۶))، با لبه های گیردار در مقابل حرکتهای غشائی را بر حسب مقادیر متفاوت پارامتر

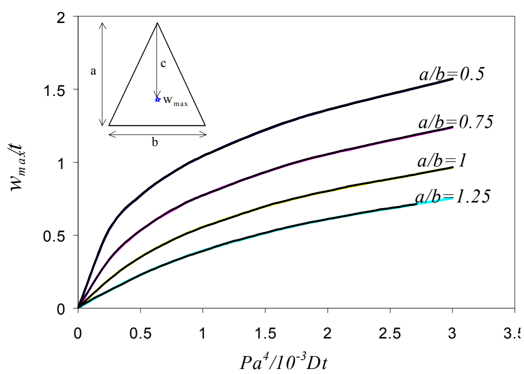
بارگذاری $P^* = pa^4/Dt \times 10^{-3}$ نمایش می دهد شکل (۸-الف) منحنی بار-تغییر مکان ماکزیمم را برای یک ورق متساوی الساقین با تکیه گاههای ساده و با لبه های آزاد در مقابل حرکتهای غشائی بر حسب نسبتهای متفاوت a/b نمایش می دهد و شکل (۸-ب) منحنی بار-تغییر مکان ماکزیمم یک ورق متساوی الساقین با تکیه گاههای ساده و با لبه های گیردار در مقابل حرکتهای غشائی را بر حسب نسبتهای متفاوت a/b نمایش می دهد.

همانطوری که از این اشکال استنباط می شود با افزایش بارگذاری، سختی ورق نیز افزایش یافته و بالاخص این افزایش سختی در موردی که لبه های ورق در مقابل حرکتهای غشائی گیردار باشد(شکل (۸- ب)) بسیار چشمگیر است.

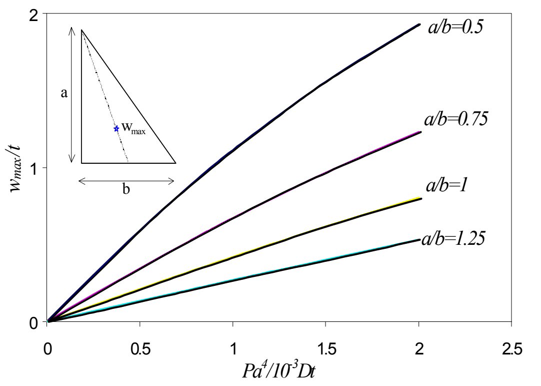
شکل (۹-الف) منحنی بار-تغییر مکان ماکزیمم را در خصوص یک ورق قائم الزاویه با تکیه گاههای ساده و با لبه های آزاد در مقابل حرکتهای غشائی بر حسب نسبتهای متفاوت a/b، نمایش می دهد.



شکل۸-الف: منحنی بار-تغییر مکان ورق متساوی الساقین با لبه های آزاد در مقابل حرکتهای غشائی.

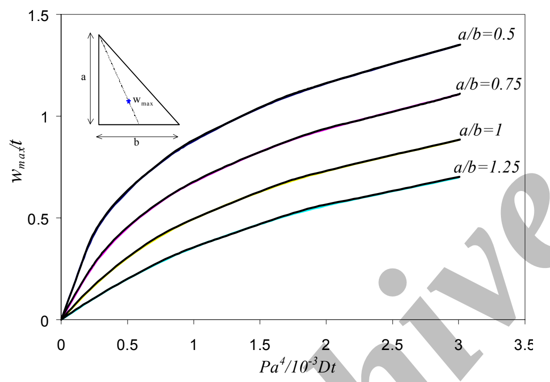


شکل۸-ب: منحنی بار-تغییر مکان ورق متساوی الساقین با لبه های گیردار در مقابل حرکتهای غشائی.



شکل۹-الف: منحنی بار-تغییر مکان ماکزیمم ورق قائم الزاویه با لبه های آزاد در مقابل حرکتهای غشائی.

شکل (۹- ب) منحنی بار-تغییر مکان ماکزیمم یک ورق قائم الزاویه با تکیه گاههای ساده و با لبه های گیردار در مقابل حرکتهای غشائی بر حسب نسبتهای متفاوت a/b، نمایش می دهد.



شکل۹- ب: منحنی بار-تغییر مکان ماکزیمم ورق قائم الزاویه با لبه های گیردار در مقابل حرکتهای غشائی.

نتیجه گیری

روش عددی گالرکین در خصوص تحلیل غیر خطی صفحات مثلثی تحت اثر بارگذاری عرضی با استفاده از دستگاه مختصات مساحتی توسعه داده شد،

نتایج حاصل از روش عددی پیشنهادی با نتایج حاصل از یک نرم‌افزار شناخته شده غیرخطی کنترل و مورد تایید قرار گرفته است. درونیابی میدانهای تغییر مکان و سیستم نیروهای داخلی بر روی کل دامنه ورق باعث افزایش دقت در استخراج نتایج، بالاخص در سیستم نیروهای داخلی می‌شود. استفاده از نرم‌افزارهای کامپیوتری موجود، روش متداول برخورد با چنین مسائلی می‌باشد لیکن مسائلی از

جمله همگرائی در روند تحلیل غیرخطی و نیز زمان لازم در این خصوص، خطاهای موجود در محاسبه سیستم نیروهای داخلی، استفاده از روشهایی مانند ریلی- ریتز و گالرکین را کماکان در جایگاه ویژه‌ای قرار می‌دهد.

مراجع

1 - Szilard, S. (1974). *Theory and Analysis of Plates Classical and Numerical Methods*. Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J.

2 - Ugural, A. C. (1981). *Stress in Plates and Shells*. Mc Graw-Hill., New York.

3 - Timoshenko, S. T. and Krieger, S. (1970). *Theory of Plates and Shells*, Mc Graw-Hill., New York.

4 - Saadatpour, M. M. and Azhari, M. (1998). "The Galerkin method for static analysis of simply supported plates of general shape." *Computer and Structures*., Vol. 69, PP. 1-9.

۵ - سعادتپور، م. م. و مخالفی، د. "تحلیل استاتیکی صفحات مثلثی." استقلال، سال۱۶، شماره۲، صص. ۵۱-۶۱، (۱۳۷۶).

۶ - سعادتپور، م. م. "تحلیل ارتعاش آزاد صفحات مثلثی با ضخامت غیر یکنواخت خطی و شرایط مرزی مختلف." استقلال، سال۱۸، شماره۲، صص. ۱۱۷-۱۲۷، (۱۳۷۸).

7 - Wang, C. M. and Liew, K. M. (1994). "Buckling of triangular plates under uniform compression." *Engng. Struct.*, Vol. 116, No. 1, PP. 43-50.

8 - Jaunky, N. and Knight Jr, N. F. (1995). "Buckling analysis of general triangular anisotropic plates using polynomials." *AIAA. Journal*., Vol. 33, No. 12, PP. 2414-2417.

9 - Chia, C. Y. (1980). *Nonlinear Analysis of Plates*. Mc Graw-Hill., New York.

10 - Leissa, A. W. and Jaber, N. A. (1992). "Vibration of completely free triangular plates." *Int. J. Mech. Sci*., Vol. 34, No. 8, PP. 605-616.

11 - Saadatpour, M. M., Azhari, M. and Bradford, M. A. (1998). "Buckling of arbitrary quadrilateral plates with intermediate supporting using Galerkin Method." *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.,* Vol. 164, PP. 297-306.

12 - Saadatpour, M. M., Azhari, M. and Bradford, M. A. (2000). "Vibration analysis of plates of general shape with intermediate supports using Galerkin Method." *Engineering Structures.* Vol. 22, PP. 1180-1188.