

# تحلیل دینامیکی ترک خوردگی میان لایه‌ای در پوسته‌های کامپوزیت

سهیل فروزان سپهر

دانشجوی دکتری تخصصی سازه- مهندسی عمران- دانشکده فنی- دانشگاه تهران

سهیل محمدی

استادیار گروه مهندسی عمران- دانشکده فنی- دانشگاه تهران

(تاریخ دریافت ۸۱/۹/۲۷، تاریخ دریافت روایت اصلاح شده ۸۴/۲/۳، تاریخ تصویب ۸۴/۲/۲۴)

## چکیده

این مقاله به معرفی روشی عددی برای مدلسازی و بررسی پدیده مخرب ترک خوردگی میان لایه ای پوسته‌های کامپوزیت با بهره‌گیری از مبانی نظریه مومسانی، مکانیک تماس محاسباتی و مکانیک شکست می پردازد. بدین منظور هر لایه یا دسته‌ای از لایه‌های همانند با بکارگیری المانهای حجمی مش بندی شده، رفتار غیرخطی هندسی و مصالح آنها در تحلیل منظور می گردد. مدلسازی رفتار پیوستگی/ جدایی لایه‌ها به روش «اجزاء جدا از هم» با توسعه الگوریتمهای سه بعدی مکانیک تماس و بکارگیری الگوی ناهمسانگرد جدایی لایه‌ها به همراه روشهای نرم‌شدگی برگرفته از اصول مکانیک شکست انجام می پذیرد. نمونه‌های عددی ارائه شده نمایانگر درستی و کارایی روش پیشنهادی می باشد.

**واژه‌های کلیدی:** مواد کامپوزیت، تحلیل دینامیکی، ترک خوردگی پیشرونده، ترک خوردگی میان لایه‌ای، جدایی لایه‌ها، تحلیل برخورد، بارگذاری ضربه‌ای، اجزاء محدود غیرخطی، اجزاء جدا از هم.

## مقدمه

مانند بارهای ضربه‌ای، احتمال کماتش لایه‌های جدا شده را بشدت افزایش داده، تا حد زیادی از مقاومت فشاری لایه‌ها می‌کاهد. همچنین ضربه‌های ایجاد شده میان لایه‌ها باعث افزایش تمرکز تنش در گوشه ترکها می‌گردد. از اینرو، نقش مهم این پدیده در کاهش باربری و عملکرد سازه، تحلیلی دقیق را از شرایط پیدایی و گسترش ترکهای میان لایه‌ای، رفتار دینامیکی، رفتار کمانشی، اندرکنش میان لایه‌ها در هنگام بروز ترک و نیز رفتار سازه پس از ترک خوردگی ایجاد می‌کند.

هدف از این پژوهش دستیابی به یک روش عددی مناسب برای مدلسازی و بررسی پدیده مخرب «ترک خوردگی میان لایه‌ای» در حالت سه بعدی، به تنهایی و بدون در نظر گرفتن اندرکنش آن با ترک خوردگی زمینه، با بهره‌گیری از مبانی نظریه مومسانی<sup>۵</sup>، مکانیک شکست و مکانیک تماس محاسباتی<sup>۶</sup> می‌باشد.

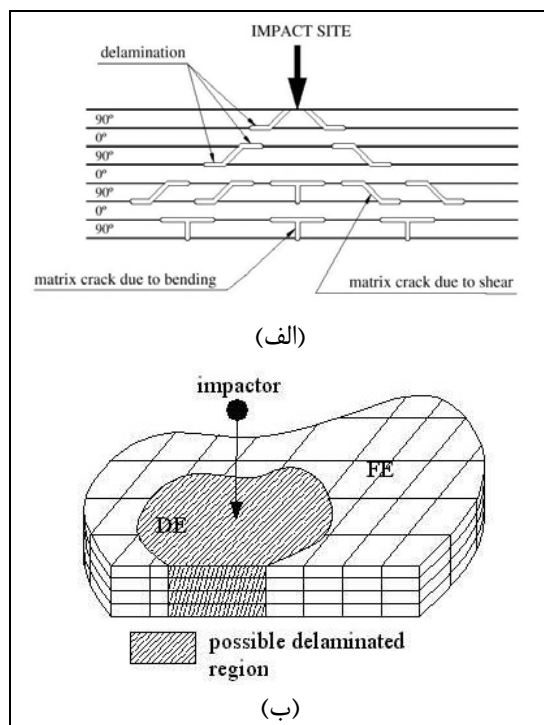
در این جستار برای دستیابی به یک روش عددی مناسب برای تحلیل و بررسی پدیده مخرب ترک خوردگی میان لایه‌ای در حالت سه بعدی، هر یک از لایه‌ها یا دسته‌ای از لایه‌های همانند با بکارگیری المانهای حجمی<sup>۷</sup>

یکی از اصلیتترین مسایل قابل توجه در طراحی سازه‌های کامپوزیت آسیب پذیری آنها در برابر بارگذاری ضربه‌ای جانبی می‌باشد که می‌تواند به خرابی درونی اجزاء سازه بصورت‌های ترک خوردگی زمینه<sup>۱</sup>، جدایی لایه‌ها<sup>۲</sup>، پارگی الیاف<sup>۳</sup> و یا حتی تکه تکه شدن<sup>۴</sup> بینجامد.

در ضربه‌های با سرعت بالا (انرژی برخورد زیاد)، تکه تکه شدن پوسته کامپوزیت بدلیل نفوذ پرتابه به درون آن، نخستین مود خرابیست. با این همه مطالعات و بررسیهای اخیر نشان داده است که «جدایی لایه‌ها» به همراه «ترک خوردگی زمینه» مهمترین عوامل تخریب سازه‌های کامپوزیت بویژه تحت اثر ضربه‌های با سرعت پایین (انرژی برخورد کم و یا متوسط) می‌باشند. شکل (۱- الف) الگوی خرابی ایجاد شده را در یک آزمایش بارگذاری ضربه‌ای با سرعت پایین نشان می‌دهد [۱].

پیدایی ترکهای میان لایه‌ای که ناشی از ناهمسانی لایه‌ها در وجوه مشترک می‌باشد، ممکن است در هنگام ساخت قطعه و یا در نتیجه بارگذاری ضربه‌ای پدیده آمده، گسترش یابد و باعث بروز ناپیوستگی در قطعه گردد. ترکهای میان لایه‌ای بویژه در شرایط بارگذاری دینامیکی،

می شود.



شکل ۱: (الف) الگوی ترک خوردگی در یک نمونه آزمایش ضربه (ب) مش بندی اجزاء محدود- اجزاء جدا از هم نمونه پوسته کامپوزیت.

با توجه به اینکه پوسته‌های کامپوزیت معمولاً در چند لایه ساخته شده، راستای الیاف در هر لایه متفاوت است، لازمست ماتریس ضرایب کشسانی  $\mathbf{D}$  تمامی لایه‌ها که در دستگاه مختصات محلی با محوری بموازات راستای الیاف تعریف شده‌اند، در دستگاهی یکسان محاسبه شوند. بدین ترتیب هرگاه زاویه میان راستای الیاف با محورهای مختصات دستگاه اصلی برابر با  $\theta$  باشد، ماتریس ضرایب کشسانی  $\bar{\mathbf{D}}$  در دستگاه مختصات کلی بصورت زیر بر حسب ماتریس ضرایب کشسانی  $\mathbf{D}$  در دستگاه مختصات محلی بدست می آید:

$$\bar{\mathbf{D}} = \mathbf{R}_\sigma^{-1} \mathbf{D} \mathbf{R}_\varepsilon \quad (3)$$

که در آن  $\mathbf{R}_\sigma$  و  $\mathbf{R}_\varepsilon$  ماتریسهای دوران تنش و کرنش بر حسب  $\theta$  می باشند.

### (ب) معیار تسلیم/گسیختگی در مواد کامپوزیت

معمولاً معیارهای تسلیم مصالح ناهمسانگرد بصورت تابعی درجه دوم از تمامی مؤلفه‌های تنش و به شکل کلی:

و با در نظر گرفتن ویژگیهای غیرخطی مصالح (رفتار کشسان- مومسان) برای مواد ناهمسانگرد و غیر خطی هندسی (تغییر شکلهای بزرگ) برای بررسی کمانش لایه‌ها، مدلسازی می‌شود (شکل ۱-ب)).

برای مدلسازی و کنترل رفتار پیوستگی/جدایی لایه‌ها روش اجزاء جدا از هم<sup>۱</sup> بکار گرفته می‌شود [۲]. در اینصورت، رفتار میان‌لایه‌ای اجزاء جدا از هم (لایه‌ها) همچون از میان رفتن چسبندگی، نفوذناپذیری، اصطکاک و لغزش شرایط اتصال و اندرکنش لایه‌ها را با بهره‌گیری از الگوریتمهای مکانیک تماس تعیین می‌کند. بدین ترتیب نه تنها رفتار سازه‌های کامپوزیت پیش از پیدایی ترک تحت اثر بارهای دینامیکی، بویژه ضربه، قابل بررسی است، که رفتار پس از ترک خوردگی میان لایه‌ها نظیر لغزش، برخورد دوباره و جوه ترک، کمانش لایه‌ها و ... نیز در تحلیل منظور شده، تحلیل واقع‌بینانه‌تر و دقیقتری را از این رفتار پیچیده در اختیار مهندسين محاسب قرار می‌دهد.

## مدلسازی رفتار کشسان- مومسان در

### پوسته‌های کامپوزیت

#### (الف) معادلات رفتاری کشسان خطی

معادله رفتاری خطی مصالح در محدوده کشسانی عبارتست از «قانون هوک تعمیم یافته»<sup>۲</sup> بصورت:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (1)$$

که در آن  $C_{ijkl}$  تانسور مرتبه چهارم ضرایب کشسانی مصالح با حداکثر ۳۶ مقدار ثابت می‌باشد. در عمل مواد کامپوزیت مسلح شده با الیاف در رده مصالح همسانگرد جانبی<sup>۱</sup> قرار می‌گیرند. این مصالح نسبت به یک محور خاص متقارن بوده، ویژگیهای مکانیکی آنها در هر راستای درون صفحه عمود بر این محور ثابت است. بدین ترتیب، معادله رفتاری کشسان خطی اینگونه مواد بصورت ماتریسی:

$$\sigma = \mathbf{D} \varepsilon \quad (2)$$

بر حسب  $E_1$  و  $E_2$  به ترتیب ضرایب یانگ در راستای الیاف (ضریب کشسانی طولی) و عمود بر آنها (ضریب کشسانی عرضی)،  $G_{12}$  ضریب برشی در صفحه الیاف و  $\nu_{12}$  و  $\nu_{23}$  به ترتیب ضرایب پواسون درون و برون صفحه الیاف، نوشته

نموی با یک بردار نمو کرنش  $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}$  در نظر گرفته می‌شود که در گام بارگذاری  $i$ -ام مجموع دو بخش نمو کرنش کشسان  $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^e$  و نمو کرنش مومسان  $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p$  تقسیم می‌گردد:

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon} = \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^e + \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p \quad (۸)$$

که در آن برای مصالح تابع «قانون جریان مشترک»<sup>۱۲</sup>:

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^e = \mathbf{D}^{-1} \Delta \boldsymbol{\sigma} \quad (۹)$$

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p = \Delta \lambda \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (۱۰)$$

می‌باشد. در روند تحلیل، با توجه به در دسترس نبودن ماتریس ضرایب سکانتی که مستقیماً بردار کرنش  $\boldsymbol{\varepsilon}$  را به بردار تنش  $\boldsymbol{\sigma}$  تبدیل می‌کند، به روندی تکراری همراه با آزمون و خطا نیاز می‌باشد. بدین منظور «روند بازگشتی اوپلر» به همراه «روش حل معادله نیوتن-رافسون» بکار گرفته می‌شود. در اینصورت هرگاه بردار تنش و کرنش در آغاز گام بارگذاری  $i$ -ام به ترتیب برابر با  $\boldsymbol{\sigma}_{i-1}$  و  $\boldsymbol{\varepsilon}_{i-1}$  و در پایان این گام  $\boldsymbol{\sigma}_i$  و  $\boldsymbol{\varepsilon}_i$  باشد، مطابق با روند بازگشتی اوپلر که سرانجام بردار تنش را به روی خم یا رویه تسلیم پایان گام بازگشت می‌دهد [۶]، خواهیم داشت:

$$\boldsymbol{\sigma}_j = \boldsymbol{\sigma}_{i-1} + \Delta \boldsymbol{\sigma}_j \quad (۱۱)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_i = \lim_{j \rightarrow \infty} \boldsymbol{\sigma}_j \quad (۱۲)$$

که در آنها  $\Delta \boldsymbol{\sigma}_j$  برابر با میزان اختلاف تنش در تکرار  $j$ -ام می‌باشد. با جایگذاری روابط (۹) و (۱۰) در (۸)،  $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_j$  متناظر با این اختلاف تنش عبارتست از:

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_j = \mathbf{D}^{-1} \Delta \boldsymbol{\sigma}_j + \Delta \lambda_j \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}_j} \quad (۱۳)$$

برای معیار تسلیم هوفمن مشتق  $f$  نسبت به بردار تنش برابر است با:

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}_j} = \mathbf{P} \boldsymbol{\sigma}_j + \mathbf{p} \quad (۱۴)$$

با جایگذاری روابط (۱۱) و (۱۴) در (۱۳) و با توجه به  $\boldsymbol{\varepsilon}_{i-1}^e = \mathbf{D}^{-1} \boldsymbol{\sigma}_{i-1}$  بردار  $\boldsymbol{\sigma}_j$  بصورت:

$$f(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{P} \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{p} - 1 = 0 \quad (۴)$$

تعریف می‌شوند که در آن ماتریس  $\mathbf{P}$  و بردار  $\mathbf{p}$  بصورت زیر تعریف می‌شوند:

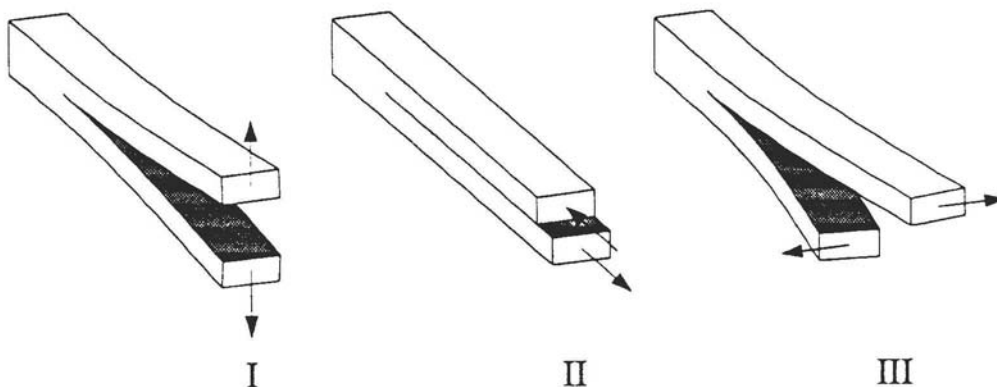
$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 2(\alpha_{12} + \alpha_{13}) & -2\alpha_{12} & -2\alpha_{13} & 0 & 0 & 0 \\ -2\alpha_{12} & 2(\alpha_{12} + \alpha_{23}) & -2\alpha_{23} & 0 & 0 & 0 \\ -2\alpha_{13} & -2\alpha_{23} & 2(\alpha_{13} + \alpha_{23}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6\alpha_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6\alpha_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6\alpha_{66} \end{bmatrix} \quad (۵)$$

$$\mathbf{p} = [\alpha_{11}, \alpha_{22}, \alpha_{33}, 0, 0, 0]^T \quad (۶)$$

که در این روابط، ضرایب  $\alpha_{ij}$  به ویژگیهای مقاومتی مصالح وابسته‌اند. تاکنون روابط بسیاری برای تسلیم مواد ناهمسانگرد<sup>۱۱</sup> ارائه شده است که در این میان معیار تسلیم پیشنهادی هوفمن در مقایسه با بسیاری از معیارها همچون معیار هیل دقیقتر بوده، پیچیدگیهای معیارهای تسای-وو، اشکنازی، گلدنبلات-کوپنوف و ... را ندارد. از اینرو، این معیار تا بحال در بسیاری از جستارهای علمی بکار رفته است (برای نمونه مراجع [۳، ۴، ۵ و ۶]). در این پژوهش نیز برای بررسی رفتار مومسان سازه‌های کامپوزیت همین معیار بکار می‌رود. در این معیار با در نظر گرفتن ۵ پارامتر  $X_C$  و  $X_T$  تنشهای قائم حد تسلیم در کشش و فشار در راستای الیاف،  $Y_C$  و  $Y_T$  تنشهای قائم حد تسلیم در کشش و فشار در راستای عمود بر الیاف و تنش برشی حد تسلیم  $S$ ، ضرایب  $\alpha_{ij}$  بصورت زیر معرفی می‌شوند:

$$\begin{cases} \alpha_{11} = \frac{1}{X_T} - \frac{1}{X_C} \\ \alpha_{22} = \alpha_{33} = \frac{1}{Y_T} - \frac{1}{Y_C} \\ 3\alpha_{44} = 3\alpha_{55} = \frac{1}{S^2} \\ 3\alpha_{66} = \frac{4}{Y_T Y_C} - \frac{1}{X_T X_C} \\ 2\alpha_{12} = 2\alpha_{13} = \frac{1}{X_T X_C} \\ 2\alpha_{23} = \frac{2}{Y_T Y_C} - \frac{1}{X_T X_C} \end{cases} \quad (۷)$$

**پ) روابط تنش-کرنش کشسان-مومسان**  
برای تحلیل کشسان-مومسان سازه‌ها، عمدتاً روندی



شکل ۲: مدهای اصلی شکست.

در نظر گرفت: مود نخست، بازشدگی ناشی از کشش، مود دوم، لغزش ناشی از برش درون صفحه و مود سوم، پارگی ناشی از برش پاد صفحه یا پیچش (شکل ۲). در سازه‌های فلزی، می‌توان تنها مود نخست را به‌عنوان مود مؤثر شکست در تحلیل منظور نمود؛ ولی در سازه‌های کامپوزیت، مدهای دوم و سوم نیز بویژه در جدایی لایه‌ها درگیر می‌باشند [۷].

گفتنی است معیار جدایی لایه‌ها بر پایه اندرکنش مدهای سه‌گانه شکست بشکل:

$$\left(\frac{G_I}{G_{IC}}\right)^{\frac{l}{2}} + \left(\frac{G_{II}}{G_{IIC}}\right)^{\frac{m}{2}} + \left(\frac{G_{III}}{G_{IIIc}}\right)^{\frac{n}{2}} = 1 \quad (20)$$

می‌باشد که در آن  $G_I$ ،  $G_{II}$  و  $G_{III}$  نرخ‌های انرژی در یک نقطه و  $G_{IC}$ ،  $G_{IIC}$  و  $G_{IIIc}$  نرخ‌های انرژی بحرانی هر یک از سه مود بوده، مقادیر  $l$ ،  $m$  و  $n$  نیز با بهره‌گیری از نتایج آزمایشگاهی بدست می‌آیند. هر چند نرخ‌های انرژی بحرانی مود سوم بصورت نظری در بسیاری از تحلیلها منظور شده است (برای نمونه [۸]، [۹]، [۱۰])، با این همه تا کنون هیچ آزمایشی برای تعیین این پارامتر بصورت استاندارد پذیرفته نشده، تحلیل‌های موجود نیز همگی با فرضیهایی ساده‌کننده چون برابری نرخ‌های انرژی بحرانی مدهای دوم و سوم [۱۰] انجام پذیرفته‌اند.

در این جستار، تنها پارامترهای وابسته به مدهای نخست و دوم شکست در مدلسازی جدایی لایه‌ها منظور می‌گردند. هر چند با توجه به همانندی مدهای دوم و سوم و در صورت فرض برابری نرخ‌های انرژی بحرانی این دو مود [۱۰] می‌توان گفت تأثیر مود سوم نیز تا حدودی در تحلیل آشکار شده، با پیشرفت روش‌های نوین برای تعیین

$$\sigma_j = \mathbf{D}(\mathbf{I} + \Delta\lambda_j \mathbf{DP})^{-1} \times (\boldsymbol{\varepsilon}_{i-1}^e + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_j - \Delta\lambda_j \mathbf{p}) \quad (15)$$

تعیین می‌گردد [۴]. در این رابطه  $\Delta\lambda_j$  از معادله غیرخطی معیار تسلیم

$$f(\Delta\lambda_j) = 0 \quad (16)$$

و با بهره‌گیری از روش تکراری نیوتن-رافسون بشکل زیر بدست می‌آید:

$$\Delta\lambda_j^{k+1} = \Delta\lambda_j^k - \frac{f(\Delta\lambda_j)}{\left. \frac{\partial f}{\partial \Delta\lambda_j} \right|_{\Delta\lambda_j^k}} \quad (17)$$

که در آن:

$$\frac{\partial f}{\partial \Delta\lambda_j} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}_j} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_j}{\partial \Delta\lambda_j} \quad (18)$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_j}{\partial \Delta\lambda_j} = -\mathbf{D}(\mathbf{I} + \Delta\lambda_j \mathbf{DP})^{-1} \times [\mathbf{D}(\mathbf{I} + \Delta\lambda_j \mathbf{DP})^{-1} \mathbf{P}(\boldsymbol{\varepsilon}_{i-1}^e + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_j - \Delta\lambda_j \mathbf{p}) + \mathbf{p}] \quad (19)$$

بدین ترتیب با جایگذاری روابط (۱۴)، (۱۸) و (۱۹) در (۱۷)، مقدار  $\Delta\lambda_j$  از یک روند تکراری بدست می‌آید.

## الگوهای رفتار میان‌لایه‌ای در پوسته‌های کامپوزیت

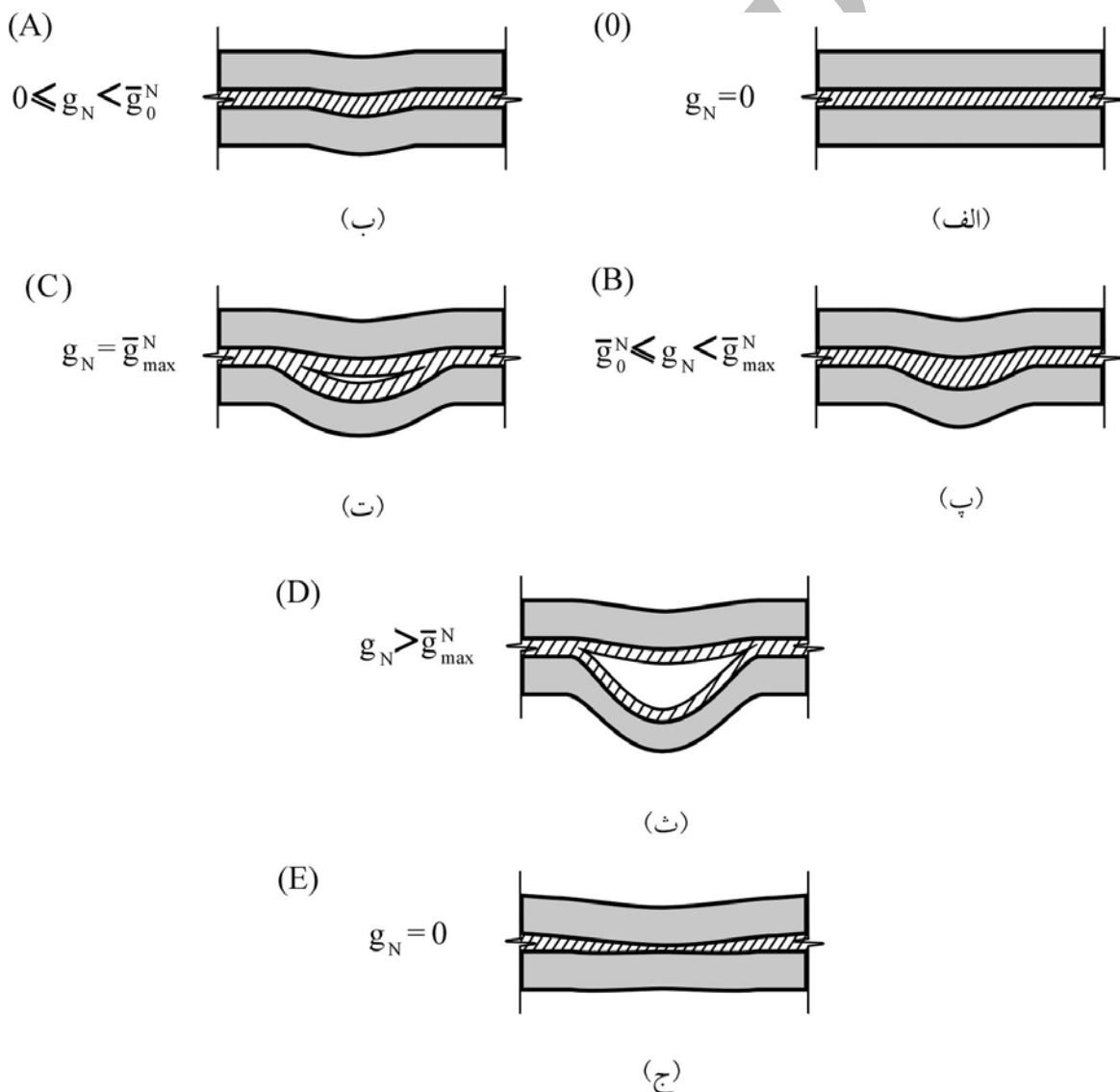
### الف) بررسی رفتار میان‌لایه‌ای

براساس مفاهیم مکانیک شکست، هرگونه ترک خوردگی را می‌توان بصورت ترکیبی از سه مود پایه شکست

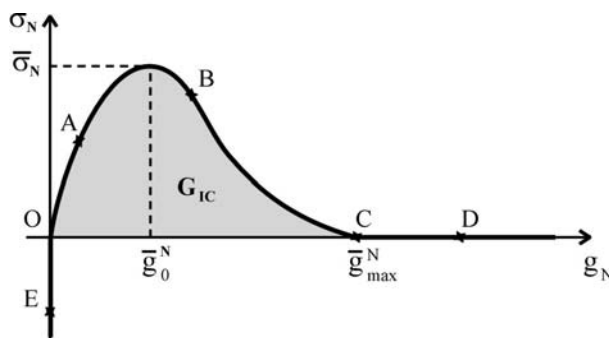
در این حالت افقی) دو قطعه را با  $g_T$  نمایش می‌دهیم<sup>۱۴</sup>. رفتار میان‌لایه‌ای مماسی دو قطعه در دو فاز چسبندگی و فاز اصطکاکی بررسی می‌گردد. این جستار با این فرض انجام می‌شود که تنشهای مماسی ناشی از اصطکاک تنها پس از از میان رفتن چسبندگی میان‌لایه‌ای و در اثر ناهمواریهای بوجود آمده از ترک خوردگی بوجود می‌آیند (شکل ۵ - ت)). بدین ترتیب رابطه میان تنش برشی میان‌لایه‌ای با جابجایی نسبی مماسی در فاز اصطکاکی بصورت نمودار نشان داده شده در شکل (۶ - ب) می‌باشد.

ویژگیهای مود سوم شکست برای مصالح کامپوزیت، روند پیشنهادی این جستار برای منظور نمودن آن گسترش‌پذیر است.

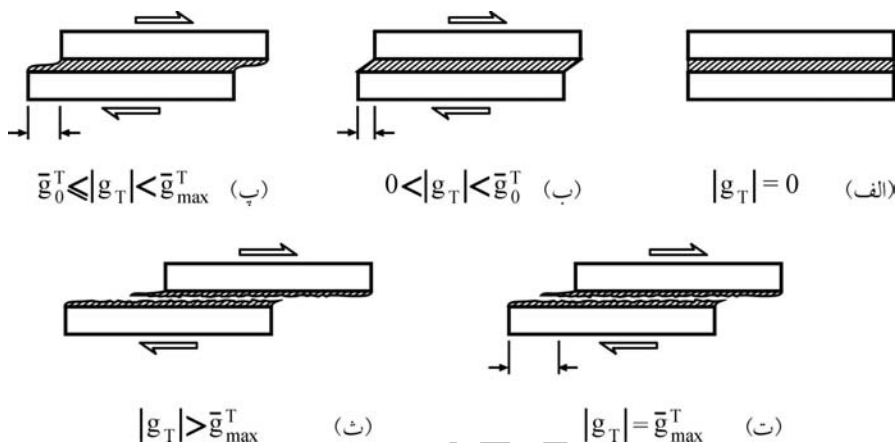
مود نخست جابجایی قائم لایه‌ها را در بر داشته، در دو فاز کشیده شدن دو قطعه (باز شدگی) و نزدیک شدن دو قطعه (فشرده‌گی) بررسی می‌گردد. بدین منظور پارامتر  $g_N$  بعنوان اختلاف میان جابجایی قائم دو لایه تعریف شده<sup>۱۳</sup>، مراحل جدایی دو لایه از یک پوسته کامپوزیت و نیز فشرده‌گی آنها در شکل (۳) و نمودار شکل (۴) نشان داده شده است. همچنین اختلاف میان جابجایی مماسی



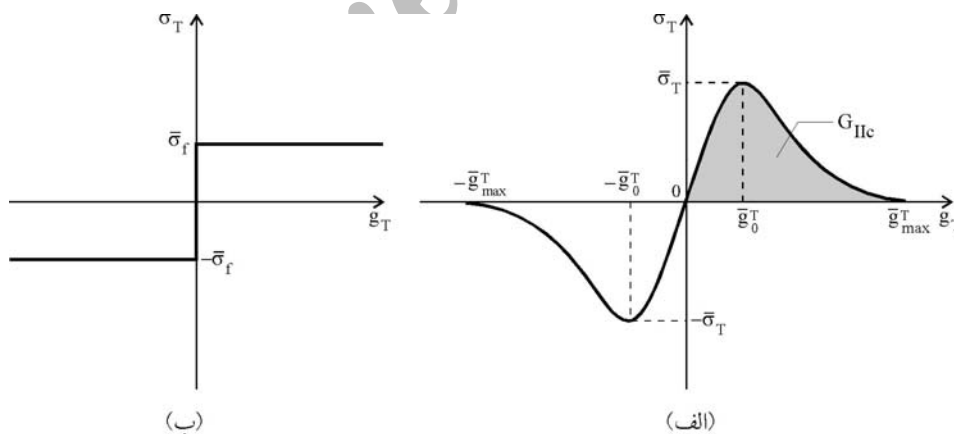
شکل ۳: رفتار میان‌لایه‌ای قائم: (الف) شکل اولیه پوسته، (ب) جابجایی نسبی کشسان (پ) جابجایی نسبی در محدوده نرم شدگی، (ت) آغاز ترک خوردگی میان‌لایه‌ای در مود نخست، (ث) جدایی لایه‌ها (ج) فشرده شدن دو لایه به یکدیگر.



شکل ۴: نمونه‌ای از رابطه میان تنش قائم میان لایه‌ای با جابجایی نسبی قائم.



شکل ۵: رفتار میان لایه‌ای: (الف) حالت اولیه (ب) محدوده چسبندگی کشسان (پ) محدوده نرم شدگی چسبندگی (ت) آغاز ترک خوردگی (ث) جابجایی در فاز اصطکاکی.



شکل ۶: نمونه‌ای از رابطه میان تنش برشی میان لایه‌ای با جابجایی نسبی مماسی: (الف) فاز چسبندگی (ب) فاز اصطکاکی.

### ب) الگوی رفتار میان لایه‌ای و معیار آغاز جدایی لایه‌ها

برپایه الگوی می (Mi) و همکاران [۱۱، ۱۲] جابجایی نسبی دو لایه مجاور و وضعیت تنش میان لایه‌ای متناظر با مؤلفه‌های آنها، در حالت کلی، در سه مود اصلی شکست نمایش داده می‌شود:

$$g = [g_I, g_{II}, g_{III}]^T \quad (۲۱)$$

حاصل بصورت نیروی پسماند در گام زمانی بعدی تحلیل حذف می‌گردد و در مجموع دقت پاسخ بدست آمده قابل قبول خواهد بود. بدین ترتیب، با بهره‌گیری از الگوی می و همکاران برای فاز چسبندگی و روش پنالتی برای شرایط نفوذناپذیری و اصطلاک، وضعیت لایه‌ها تابعی از اندازه بردارهای جابجایی نسبی قائم و مماسی می‌باشند (جدول ۱).

اندازه جابجاییهای نسبی را در هر یک از مودها به تنهایی نشان می‌دهد. در این شکل  $\sigma_T = |\sigma_T|$  و  $g_T = |g_T|$  می باشد. برای تأثیر ترکیب مودها پارامتر گسترش خرابی  $\kappa$  در الگوی می و همکاران بصورت:

$$\kappa = \sqrt{\left(\frac{g_N}{g_0^N}\right)^2 + \left(\frac{g_T}{g_0^T}\right)^2} - 1 \quad (28)$$

$$\langle x-a \rangle = \begin{cases} x-a & ; x \geq a \\ 0 & ; x < a \end{cases} \quad (29)$$

بازنویسی می‌شود که در آن بهره‌گیری از تابع ماکولی  $\langle \bullet \rangle$  برای مود جابجایی قائم بیانگر آنست که تنها جابجایی نسبی کششی (بازشدگی) در گسترش خرابی و آغاز ترک خوردگی میان لایه‌ای مؤثر است. ترکیب این الگو و روش پنالتی به معادله رفتاری میان لایه‌ای بکار رفته در این جستار می‌انجامد که عبارتست از [۵]:

$$\sigma_c = D_c g \quad (30)$$

$$D_c = \text{diag}[D_N^c(g), D_T^c(g), D_T^c(g)] \quad (31)$$

با تعریف پارامترهای نرم‌شدگی  $S_N(\kappa)$  و  $S_T(\kappa)$  و نیز اندازه جابجایی نسبی مماسی نظیر آغاز ترک خوردگی میان لایه‌ای  $\bar{g}_u^T$  بصورت:

$$S_N(\kappa) = \frac{\kappa}{1+\kappa} \cdot \frac{\bar{g}_{\max}^N}{\bar{g}_{\max}^N - \bar{g}_0^N} \quad (32)$$

$$S_T(\kappa) = \frac{\kappa}{1+\kappa} \cdot \frac{\bar{g}_{\max}^T}{\bar{g}_{\max}^T - \bar{g}_0^T} \quad (33)$$

$$\bar{g}_u^T = \bar{g}_0^T \sqrt{\left\langle \left( \frac{\bar{g}_{\max}^T}{\bar{g}_0^T} \right)^2 - \left\langle \frac{g_N}{g_0^N} \right\rangle^2 \right\rangle} \quad (34)$$

هر یک از ضرایب سختی قائم و مماسی  $D_N^c(g)$  و  $D_T^c(g)$  از روابط زیر بدست می‌آیند:

$$\sigma = [\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}]^T \quad (22)$$

هرگاه رابطه میان تنشهای میان لایه‌ای و جابجایی نسبی متناظر در هر مود به تنهایی، بصورت دو خطی در دو محدوده کشسانی و نرم‌شدگی در نظر گرفته شده، معیار جدایی لایه‌ها به شکل:

$$\left(\frac{G_I}{G_{IC}}\right)^{\frac{\alpha}{2}} + \left(\frac{G_{II}}{G_{IIC}}\right)^{\frac{\alpha}{2}} + \left(\frac{G_{III}}{G_{IIIC}}\right)^{\frac{\alpha}{2}} = 1 \quad (23)$$

تعریف گردد، اندرکنش میان مودها در محدوده نرم‌شدگی با پارامتر  $\kappa$  بصورت:

$$\kappa = \left[ \left(\frac{g_I}{g_{0,I}}\right)^{\alpha} + \left(\frac{g_{II}}{g_{0,II}}\right)^{\alpha} + \left(\frac{g_{III}}{g_{0,III}}\right)^{\alpha} \right]^{\frac{1}{\alpha}} - 1 \quad (24)$$

مشخص شده، رابطه میان تنشهای میان لایه‌ای با مؤلفه‌های جابجایی نسبی از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\sigma = (I - S(\kappa)) D_c g \quad (25)$$

در رابطه (۲۴) پارامترهای  $\bar{g}_{0,i}$  نماینده جابجایی نسبی متناظر با مقاومت مود مورد نظر و در رابطه (۲۵)،  $D_c$  ماتریس سختی اولیه و  $S(\kappa)$  تابع ماتریسی نرم‌شدگی مود مرکب می باشد.

برای مدلسازی نفوذناپذیری و اصطکاک میان لایه‌ها روش «خطای جایگزین» یا پنالتی<sup>۱۵</sup> از مجموعه روشهای مکانیک تماس محاسباتی بکار گرفته می‌شود. بنیاد این روش بر پایه جایگزینی مقادیری عددی بجای شیب بی‌نهایت در نمودارهای (۴ و ۶ - ب) می‌باشد. هرچند بکارگیری این مقادیر که ضرایب پنالتی نامیده می‌شوند، برای نمونه به خطای جابجایی نسبی قائم کوچکتر از صفر ( $g_N < 0$ ) و یا بعبارتی نفوذ دو لایه مجاور در یکدیگر می‌انجامد، با انتخاب ضرایب پنالتی  $\alpha_T$  و  $\alpha_N$  مناسب، این مقدار نفوذ ناچیز بوده، خطای هرگاه بردار تنشهای میان لایه‌ای و بردار جابجایی نسبی بصورت:

$$\sigma_c = [\sigma_N, \sigma_T]^T, \quad g = [g_N, g_T]^T \quad (26) \text{ و } (27)$$

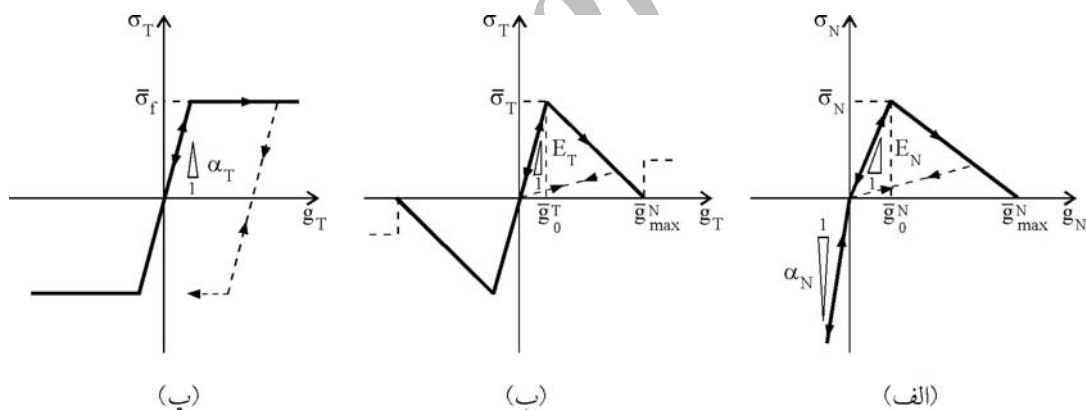
تعریف شود، شکل (۷) روابط میان تنشهای میان لایه‌ای و

$$D_N^c(\mathbf{g}) = \begin{cases} \alpha_N & ; g_N \leq 0 \\ E_N & ; g_N > 0, \kappa \leq 0 \\ (1 - S_N(\kappa))E_N & ; g_N > 0, \kappa > 0, S_N(\kappa) < 1 \\ 0 & ; g_N > 0, \kappa > 0, S_N(\kappa) \geq 1 \end{cases} \quad (35)$$

$$D_T^c(\mathbf{g}) = \begin{cases} E_T & ; \kappa \leq 0 \\ (1 - S_T(\kappa))E_T & ; \kappa > 0, S_T(\kappa) < 1 \\ \begin{pmatrix} 1 - \bar{g}_u^T \\ g_T \end{pmatrix} \alpha_T & ; \kappa > 0, S_T(\kappa) \geq 1, \sigma_T < \bar{\sigma}_f \\ \bar{\sigma}_f / g_T & ; \kappa > 0, S_T(\kappa) \geq 1, \sigma_T = \bar{\sigma}_f \end{cases} \quad (36)$$

جدول ۱: وضعیت لایه‌ها برحسب شرایط جابجایی نسبی

وضعیت لایه‌ها:	شرایط جابجایی نسبی:	مود شکست:
فشردگی دو لایه مجاور به یکدیگر - شرایط نفوذناپذیری	$g_N < 0$	مود نخست به تنهایی
بازشدگی بدون بروز ترک میان لایه‌ای	$0 \leq g_N < \bar{g}_{max}^N$	
بازشدگی لایه‌های جدا شده از هم	$g_N \geq \bar{g}_{max}^N$	
برش در فاز چسبندگی بدون ترک خوردگی	$0 \leq g_T < \bar{g}_{max}^T$	مود دوم به تنهایی
لغزش در فاز اصطکاکی پس از ترک خوردگی	$g_T \geq \bar{g}_{max}^T$	



شکل ۷: روابط تنش میان لایه‌ای برحسب جابجاییهای نسبی: (الف) برای مود جابجایی قائم (ب) برای مود جابجایی مماسی در فاز چسبندگی (پ) برای مود جابجایی مماسی در فاز اصطکاکی ( $\bar{\sigma}_f = \mu(-\sigma_N)$ )

پاسخگوی اهداف دراز مدت این پژوهش که موده‌های دیگر ترک خوردگی پوسته‌های کامپوزیت را در برگرفته، نیازمند روندهایی چون بازآرایی مش<sup>۱۶</sup>، سازگاری<sup>۱۷</sup>، از میان رفتن المانهای جدا شده و ... می‌باشد؛ نیست. در برابر، روش اجزاء جدا از هم یا المانهای مجزا آزادی بیشتری برای گسترش این جستار بدست می‌دهد. در این روش، هر یک از لایه‌ها یا دسته‌ای از لایه‌های همانند، یک المان مجزا در نظر گرفته شده، خود با بکارگیری المانهای حجمی مش‌بندی می‌گردد. اندرکنش میان لایه‌ها با بهره‌گیری از الگوی معرفی شده در بخش پیشین انجام می‌پذیرد [۲].

درعمل برای تعیین وضعیت تنش مماسی میان لایه‌ای در فاز چسبندگی از رابطه (۳۶) و در فاز اصطکاکی از روند نمودی بهره‌گیری می‌شود. همچنین گفتنی است در تحلیل دینامیکی، باربرداری هنگامی رخ می‌دهد که پارامتر گسترش خرابی گام زمانی جاری از گام زمانی پیشین کوچکتر باشد.

### روش عددی تحلیل دینامیکی ترک خوردگی میان لایه‌ای

روش اجزاء محدود بر پایه مکانیک محیطهای پیوسته



پاسخ تحلیل می‌انجامد؛ معمولاً  $\Delta t_{\min}$  روش پنالتی از مقدار گام زمانی بحرانی  $\Delta t_{cr}$  کوچکتر بوده، کنترل کننده است. با این همه، لازمست  $\Delta t$  در هر گام زمانی از  $\min(\Delta t_{cr}, \Delta t_{\min})$  کوچکتر انتخاب گردد. همچنین در این روش، برای تشخیص پایداری و دقت پاسخ لازمست در هرگام زمانی تعادل انرژی نیز کنترل گردد [۶].

### بررسیهای عددی الف) نمونه یک

گردی (Grady) و همکاران [۱۳] الگوریتمی را بر پایه مکانیک شکست برای تحلیل دینامیکی کمانش ناشی از جدایی لایه‌ها در نمونه‌ای از کامپوزیت لایه‌ای با ترک میان‌لایه‌ای اولیه و تحت اثر بارگذاری ضربه‌ای بکار گرفتند. هندسه و بارگذاری این نمونه در شکل (۸ - الف) نشان داده شده است. نمونه مورد بررسی نواری دو سر گیردار از جنس گرافیت- اپوکسی T300/1034-C با الگوی قرارگیری الیاف  $[0^\circ]_{10s}$  و ویژگیهای مصالح نشان داده شده در جدول شکل (۸ - ب) می‌باشد.

مدلسازی این نوار در چهار لایه انجام پذیرفته، ترک اولیه‌ای به اندازه ۵/۰۸ cm میان نخستین و دومین لایه‌ها وجود دارد که تقارن مسأله را از میان می‌برد (شکل ۸ - الف).

تحلیل این مسأله برای مقایسه با بهره‌گیری از راهبردهای ارائه شده در این پژوهش و مش بندی متن اصلی [۱۳] انجام می‌پذیرد، با این تفاوت که هر یک از چهار لایه یک المان مجزا در نظر گرفته شده، آنگاه مش بندی می‌گردد. شکل (۹-الف) نمونه تغییر شکل یافته را در زمان  $t = 0.001 \text{ sec}$  بصورت بزرگنمایی شده و شکل (۱۰) نمودار جابجایی نقطه میانی نوار را در لایه دربردارنده ترک اولیه در طول زمان نشان می‌دهد که با نمودار ارائه شده در متن اصلی [۱۳] که فقط نتایج را برای حدود یک چهارم زمان تحلیل حاضر ارائه داده قابل مقایسه است. شکل (۱۱) الگوی گسترش ترک خوردگی میان‌لایه‌ای را نشان می‌دهد که از تحلیل سازه با بکارگیری راهبردهای این پژوهش بدست آمده است. همانگونه که پیش‌بینی می‌شد پیدایی ترک خوردگی میان‌لایه‌ای در مکانهایی همچون زیر بار نواری ضربه‌ای و نیز لبه‌های نوار آغاز می‌گردد.

تحلیل ترک خوردگی میان‌لایه‌ای به روش اجزاء جدا از هم - اجزاء محدود با بهره‌گیری از اصل کار مجازی، عبارتست از یافتن پاسخ برای معادله دینامیکی:

$$W^{\text{inertia}} + W^{\text{int.}} = W^{\text{ext.}} + W^{\text{con.}} \quad (37)$$

که در آن  $W^{\text{inertia}}$ ،  $W^{\text{int.}}$ ،  $W^{\text{ext.}}$  و  $W^{\text{con.}}$  از روابط زیر بدست می‌آیند:

$$W^{\text{inertia}} = \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \rho \ddot{\mathbf{u}} d\Omega \quad (38)$$

$$W^{\text{int.}} = \int_{\Omega} \mathbf{S} : \delta \mathbf{E} d\Omega \quad (39)$$

$$W^{\text{ext.}} = \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma_f} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{t} d\Gamma \quad (40)$$

$$W^{\text{con.}} = \int_{\Gamma} \delta \mathbf{g}^T \boldsymbol{\sigma}_c d\Gamma \quad (41)$$

با بکارگیری توابع شکل مناسب روش اجزاء محدود و نیز الگوریتمهای مکانیک تماس و الگوی رفتاری میان‌لایه‌ای معرفی شده، رابطه اسکالر (۳۷) به شکل ماتریسی:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{f}^{\text{int.}} = \mathbf{f}^{\text{ext.}} + \mathbf{f}^{\text{con.}} \quad (42)$$

تبدیل می‌گردد که در آن ماتریس جرم  $\mathbf{M}$ ، بردار نیروهای درونی  $\mathbf{f}^{\text{int.}}$ ، بردار نیروهای بیرونی  $\mathbf{f}^{\text{ext.}}$  و بردار نیروهای تماسی میان‌لایه‌ای  $\mathbf{f}^{\text{con.}}$  از روابط زیر بدست می‌آید:

$$\mathbf{M} = \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \rho \mathbf{N} d\Omega \quad (43)$$

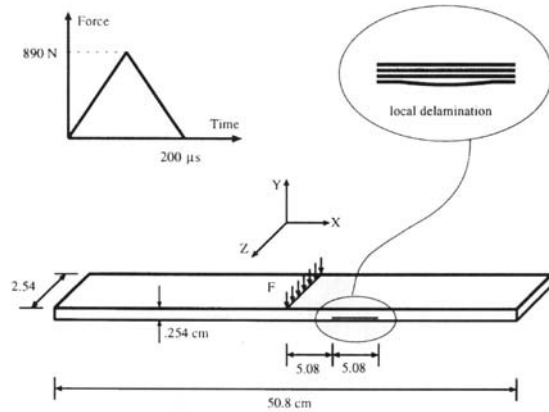
$$\mathbf{f}^{\text{int.}} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{S} d\Omega \quad (44)$$

$$\mathbf{f}^{\text{ext.}} = \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma_f} \mathbf{N}^T \mathbf{t} d\Gamma \quad (45)$$

$$\mathbf{f}^{\text{con.}} = \int_{\Gamma_c} \left( \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{u}} \right)^T \boldsymbol{\sigma}_c d\Gamma \quad (46)$$

با توجه به پیچیدگی محاسبات و حجم بسیار داده‌ها در تحلیل ترک خوردگی، «روش صریح تفاضل مرکزی» با گامهای زمانی نابرابر بکار گرفته می‌شود؛ چه، در این روش با در دست داشتن بردارهای نیروی درونی، بیرونی و میان‌لایه‌ای در گام زمانی پیشین، بردار سرعت و در نتیجه بردار جابجایی گام کنونی بدست می‌آید. هرچند روش تفاضل مرکزی پایدار مشروط بوده، در صورتیکه اندازه گام زمانی بقدر کافی کوچک اختیار نشود، به ناپایداری

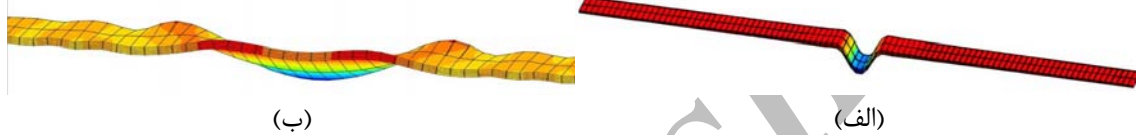
$E_1 = 146.8 \text{ GPa}$	$E_2 = 11.4 \text{ GPa}$
$G_{12} = 6.184 \text{ GPa}$	$G_{23} = 4.380 \text{ GPa}$
$\nu = 0.3$	
$X_t = 1730 \text{ MPa}$	$X_c = 1380 \text{ MPa}$
$Y_t = 66.5 \text{ MPa}$	$Y_c = 26.8 \text{ MPa}$
$S = 133.7 \text{ MPa}$	$\rho = 1550 \text{ kg/m}^3$



(ب)

(الف)

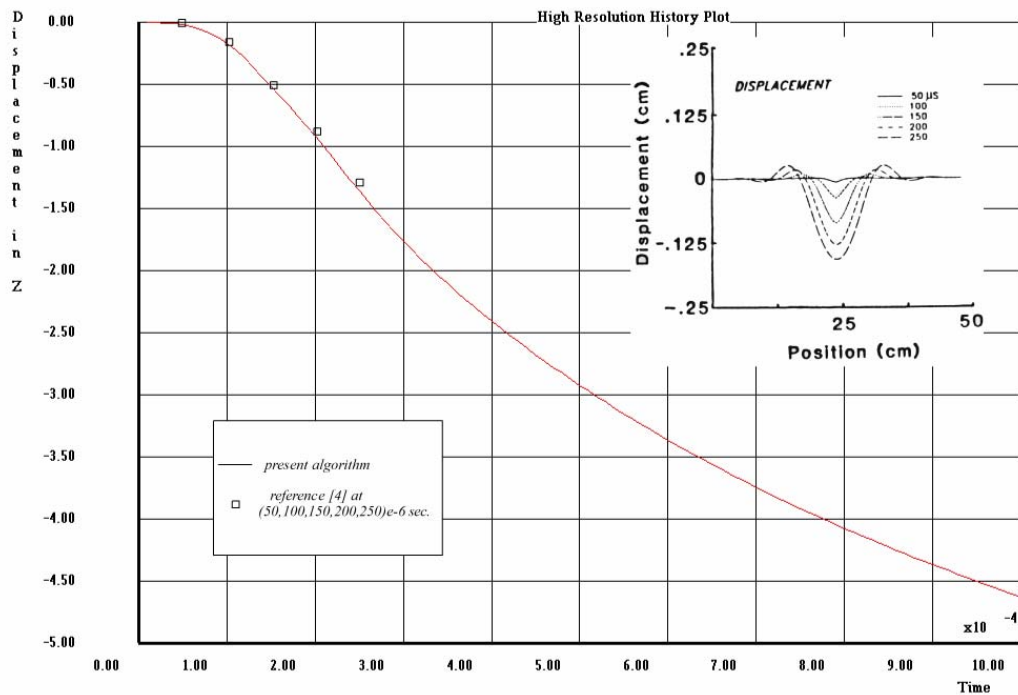
شکل ۸: (الف) هندسه و بارگذاری ضربه‌ای نمونه نخست، (ب) ویژگیهای مصالح برای گرافیت-اپوکسی T300/1034-C.



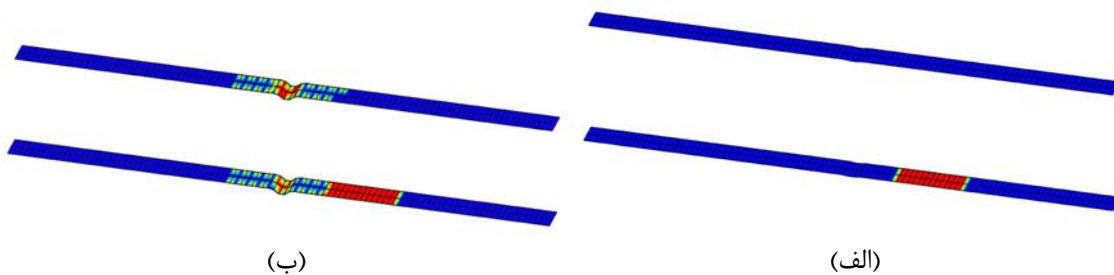
(ب)

(الف)

شکل ۹: نمایش بزرگنمایی شده نمونه تغییر شکل یافته در زمان  $t = 0.001 \text{ sec}$ : (الف) نمونه نخست (ب) نمونه دوم.

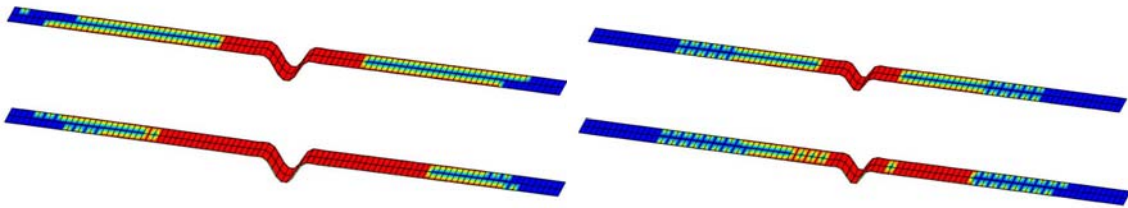


شکل ۱۰: مقایسه نمودار جابجایی نقطه میانی لایه در بردارنده ترک اولیه بدست آمده از تحلیل و نمونه تغییر شکل یافته در زمانهای  $250 - 50 \mu\text{sec}$  برگرفته از مرجع [۱۳].



(ب)

(الف)



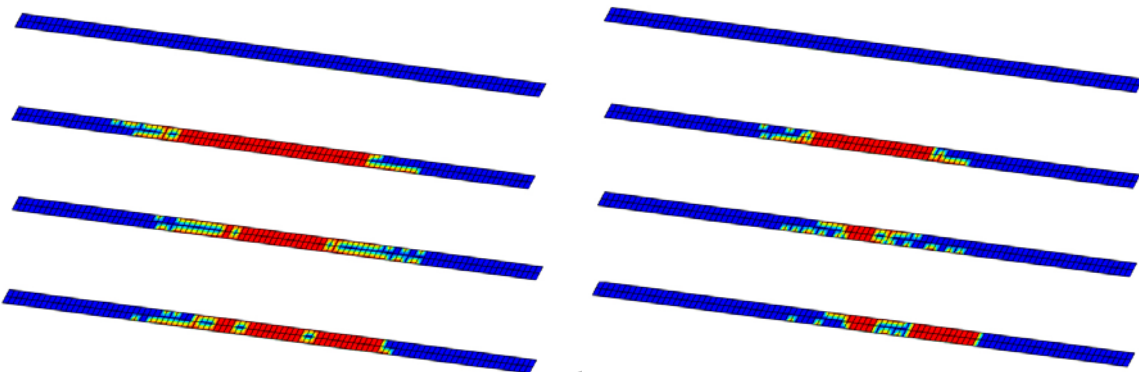
(ت)

(پ)

شکل ۱۱: الگوی گسترش ترک خوردگی میان لایه‌ای نمونه نخست در زمانهای:

$t = 0.001 \text{ sec}$  (الف)،  $t = 0.002 \text{ sec}$  (ب)،  $t = 0.005 \text{ sec}$  (پ) و  $t = 0.001 \text{ sec}$  (ت)

(جدایی لایه‌ها با رنگ خاکستری، آغاز ترک با رنگ روشن و ناحیه سالم با رنگ سیاه نشان داده شده‌است).

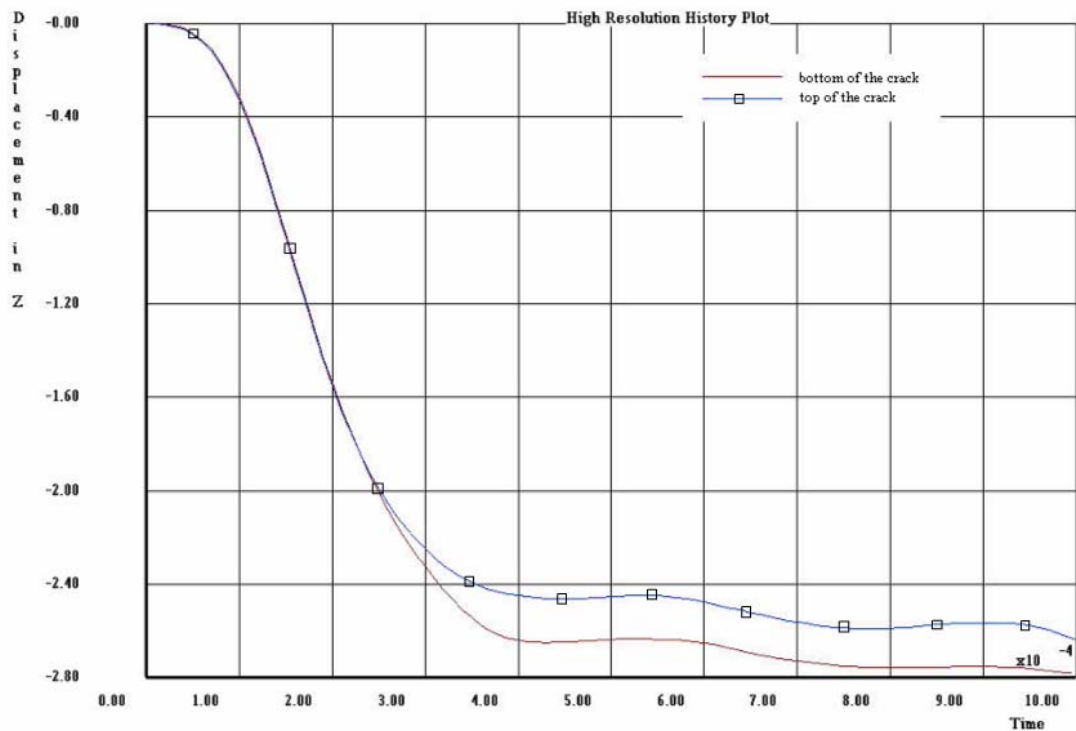


(ب)

(الف)

شکل ۱۲: الگوی گسترش ترک خوردگی میان لایه‌ای نمونه دوم در زمانهای: (الف)  $t = 0.005 \text{ sec}$  و (ب)  $t = 0.001 \text{ sec}$

(جدایی لایه‌ها با رنگ خاکستری، آغاز ترک با رنگ روشن و ناحیه سالم با رنگ سیاه نشان داده شده‌است).



شکل ۱۳: نمودار جابجایی نقطه میانی دو لایه مجاور ترک اولیه (نمونه دوم).

**ب) نمونه دو**

بردارنده تحلیل دینامیکی پوسته‌های کامپوزیت در هر دو مرحله پیش و پس از ترک خوردگی بوده، از اینرو رفتار لایه‌ها پس از ترک خوردگی میان‌لایه‌ای همچون لغزش، برخورد دوباره و جوه ترک، کمانش لایه‌ها و ... نیز در تحلیل منظور می‌گردد. بکارگیری ویژگیهای غیرخطی هندسی (تغییر شکل‌های بزرگ) و مصالح (رفتار کشسان-مومسان) بر دقت روش افزوده، تحلیل واقع‌بینانه‌تر و دقیقتری را از این مکانیزم پیچیده خرابی در اختیار مهندسی محاسب قرار می‌دهد. در پایان، برای بررسی درستی و کارایی روش، با بکارگیری راهبردهای کلی ارائه شده در این جستار، نمونه‌هایی عددی ارائه شد که نمایانگر موفقیت راهبردهای پیشنهادی می‌باشد.

**قدردانی**

بدینوسیله از پشتیبانی شورای پژوهشی دانشگاه تهران از طرح شماره ۶۱۴/۲/۶۲۷ و دفتر طراحی هوایی شرکت صنایع هواپیماسازی ایران (هسا) به شماره ۳۹-۱۰۱/۳۰/۶۲۷ قدردانی می‌گردد.

بعنوان نمونه‌ای دیگر، تحلیل همان نوار نمونه نخست با همان ویژگیها انجام می‌پذیرد، با این تفاوت که این بار الگوی بارگذاری عوض شده، بار ضربه‌ای در عرض نوار جای خود را به بار متمرکز ضربه‌ای با همان شدت در یک لبه نوار می‌دهد. بدین ترتیب، تقارن مسأله نسبت به محور  $Y$  نیز از میان می‌رود. شکل‌های (۹ - ب) و (۱۲) به ترتیب نمونه تغییر شکل یافته و الگوی گسترش ترک میان‌لایه‌ای را در زمانهای  $0/0005sec$  و  $0/001sec$  نشان می‌دهند. نمودار تغییر شکل نقطه میانی نیز بر حسب زمان در شکل (۱۳) آمده است. در این نمونه نیز ترک خوردگی میان‌لایه‌ای از لبه‌ها بویژه در گوشه ترک اولیه و زیر بار متمرکز ضربه‌ای آغاز می‌گردد.

**نتیجه‌گیری**

در این جستار روش عددی مناسبی برای مدل‌سازی و بررسی پدیده مخرب «ترک خوردگی میان‌لایه‌ای» در حالت سه‌بعدی و با بهره‌گیری از مبانی نظریه مومسانی، مکانیک تماس محاسباتی و مکانیک شکست ارائه شد. این روش در

**مراجع**

- 1 - de Freitas, M., Silva, A. and Reis L. (2000). "Numerical evaluation of failure mechanisms on composite specimens subjected to impact loading." *Composites Part B: Engineering*, Vol. 31, PP. 199-207.
- 2 - Mohammadi, S. (2003). "Discontinuum Mechanics using Finite and Discrete Elements." *WIT Press*, UK.
- 3 - Koh, C.G., Owen, D. R. J. and Perić, D. (1995). "Explicit dynamic analysis of elsto-plastic laminated composite shells: implementation of non-iterative stress update schemes for the Hoffman yield criterion." *Computational Mechanics*, Vol. 16, PP. 307-314.
- 4 - Schellekens, J. C. J. (1992). *Computational strategies for composite structures*. Ph.D. thesis, Technische Universiteit Delft, Holland.
- 5 - Forouzan-sepehr, S. and Mohammadi, S. (2001). "A contact based method for 3D delamination analysis of composites subjected to impact loading." in: S. ValliaPPan, N. Khalili (editors), *Computational Mechanics- New Frontiers for the New Millennium, Proceedings of 1<sup>st</sup> Asian-Pacific Congress on computational Mechanics*, PP. 691-696.
- 6 - Mohammadi, S., Forouzan-sepehr, S. and Asadollahi, A. (2002). "Contact based delamination and fracture analysis of composites", *Thin-Walled Structures*, Vol. 40, No. 7-8, PP. 595-609.
- 7 - Masters, J. E. (1987). "Basic failure modes of continuous fiber composites." *Engineering Materials Handbook*, Vol. 1: Composites, ASM International, USA.

- 8 - Borovkov, A., Kiylo, O., Misnik, Yu. and Tripolnikov, T. (1999). "Finite element stress and analysis of multidirectional laminated composite structures. 2. h-p- refinement and m- adaptive procedures." *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, Vol. 79, Suppl. No. 2, PP. S527-S528.
- 9 - FEA (2000). *LUSAS User Manual*, Ver. 13.2, FEA Ltd.
- 10 - Liu, Sh. (1994). "Quasi-impact damage initiation and growth of thick-section and toughened composite materials." *Int. J. Solids and Structures*, Vol. 31, No. 22, PP. 3079-3098.
- 11 - Mi, Y., Crisfield, M. A. (1996). *Analytical derivation of load/displacement relationship for the DCB and MMB and proof of the FEA formulation*. IC-AERO Report 97-02, Dept. Aeronautics, Imperial College, London, UK.
- 12 - Mi, Y., Crisfield, M. A., Davies, G. A. O. and Hellweg, H. B. (1998). "Progressive delamination using interface elements." *J. Composite Materials*, Vol. 32, No. 14, PP. 1246-1272.
- 13 - Grady, J. E., Chamis, C. C. and Aiello, R. A. (1989). *Dynamic delamination buckling in composite laminates under impact loading: computational simulation*. In: Lagace P.A. (ed.); *Composite Materials: Fatigue and Fracture*, ASTM—STP 1012, PP. 137-149.

### واژه‌های انگلیسی به ترتیب استفاده در متن

- |                           |                                   |                                     |
|---------------------------|-----------------------------------|-------------------------------------|
| 1 - Matrix Cracking       | 2 - Delamination                  | 3 - Fibre Breakage                  |
| 4 - Fragmentation         | 5 - Theory of Plasticity          | 6 - Computational Contact Mechanics |
| 7 - Solid Element         | 8 - Discrete Element Method (DEM) |                                     |
| 9 - Generalised Hook Law  | 10 - Transversely Isotropic       | 11 - Anisotropic                    |
| 12 - Associated Flow Rule | 13 - Normal Gap                   | 14 - Tangential Gap                 |
| 15 - Penalty              | 16 - Remeshing                    | 17 - Adaptivity                     |