

## بررسی پخش و جهت گیری الیاف فلزی در بتن مسلح الیافی

امیر پورمقدم، حسین تقدس، فتح اله محمودزاده

فارغ التحصیلان کارشناسی ارشد مهندسی عمران - دانشکده فنی - دانشگاه تهران

محمد شکرچی زاده

استادیار گروه مهندسی عمران - دانشکده فنی - دانشگاه تهران

(تاریخ دریافت ۸۳/۳/۳۰، تاریخ دریافت روایت اصلاح شده ۸۳/۱۲/۱۵، تاریخ تصویب ۸۴/۴/۱۱)

### چکیده

در این بررسی برخی تحقیقات تحلیلی در مورد چیدمان و جهت گیری الیاف در بتن مسلح الیافی فلزی (SFRC) با توجه به مقادیر مختلف درصد الیاف انجام گرفته است. توابع پخشی مربوط به متغیرهای مکانی الیاف مورد بررسی قرار گرفته است که در نهایت براساس آن می توان مدلی تحلیلی برای پیش بینی خواص مکانیکی SFRC تولید کرد. در این تحقیق با توجه به اثرات شرایط مرزی و نیز تابع پخش الیاف، چند فرمول تئوری برای تعداد الیاف در هر مقطع مربع واحد (در بتن SFRC) بدست آمده است. در ضمن مقایسه ای بین نتایج حاصله از آزمایش و تئوری نیز انجام گرفته است که فرمولهای حاصله را تایید می کند.

**واژه های کلیدی:** بتن مسلح الیافی فلزی، تابع پخش، جهت گیری الیاف فلزی

### مقدمه

ضریب جهت گیری نسبت میانگین تمامی حالات قرارگیری الیاف در جهت تنش کششی به طول خود فیبر می باشد.

### سابقه

با توجه به یکسری مطالعات انجام شده مقدار ضریب جهت گیری در حالت رفتاری پس از شکست بین  $1/3$  تا  $2/\pi$  برای حالت دو بعدی قرارگیری فیبرها و نیز بین  $1/2$  تا  $1/6$  برای حالت سه بعدی قرارگیری الیاف می باشد. این اختلاف به علت اختلاف در فرضیات اولیه می باشد. [۵] Krenchel مقدار  $3/8$  را برای حالت تصادفی دو بعدی بدست آورده است مقدار این ضریب با توجه به ترک خوردگی ماتریس سیمانی و نیز با توجه به قرارگیری الیاف برای تحمل بار تغییر می کند [۵]. Aveston و همکاران مقدار  $1/2$  برای این ضریب بدست آورده اند [۶]. Laws و همکاران نحوه پخش ناشی از طول الیاف و نیز اثر شرایط مرزی در زیاد شدن ضریب جهت گیری الیاف را بررسی کرده اند [۷].

با توجه به سیستم مختصات نشان داده شده در شکل (۱)،  $\alpha_z$  را می توان از میانگین گیری در ربع اول دستگاه مختصات در راستای محور  $Z$  بدست می آورد.

یکی از مهمترین نقش های الیاف فلزی در بتن افزایش مقاومت کششی بتن بوسیله کاهش ایجاد ریزترکهای حاصله از بار گذاری خارجی است [۱ و ۲]. تحقیقات انجام شده نشان میدهد که بین مقاومت کششی و فاصله بین الیافها و نیز مقاومت کششی و تعداد میانگین الیاف در واحد سطح همبستگی وجود دارد. البته ضریب همبستگی رابطه مقاومت کششی و تعداد الیافها در واحد سطح بیشتر از رابطه مقاومت کششی و فاصله بین الیافها می باشد [۳ و ۴].

تعداد الیاف در واحد سطح هر مقطع در بتن به صورت فرمول زیر پیشنهاد شده است [۱ و ۲]:

$$N_f = \alpha \frac{V_f}{A_f} \quad (1)$$

که  $N_f$  = تعداد الیاف موجود در هر واحد سطح مقطع

$V_f$  = درصد حجمی الیاف فلزی در بتن

$A_f$  = سطح مقطع هر فیبر

$\alpha$  = ضریب جهت گیری

تعداد الیاف به کار رفته در هر سطح مقطع واحد در یک ماده الیافی به عنوان یک روش اندازه گیری جایگزین که می تواند کارآرایی الیاف در بتن را بیان کند بکار می رود.

که برای یکسان شدن ضرایب جهت گیری در همه جهت ها دو راه حل وجود دارد: راه اول بکاربردن یک تابع چگالی و راه دوم استفاده از متغیر یکنواخت پخش شده می باشد.

### تابع چگالی (راه حل اول)

با در نظر گرفتن تساوی  $\alpha_y = \alpha_z$  و نیز عدم وابستگی  $\phi$  و  $\theta$  و  $\alpha_x$  به یکدیگر و فرض یک پخش یکنواخت برای  $\theta$  تابع چگالی  $(F(\phi))$  که تابعی از  $\phi$  می باشد به صورت زیر بدست می آید:

$$\alpha_x = \alpha_z \Rightarrow$$

$$\frac{\int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \sin \phi F(\phi) d\phi d\theta}{\int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} F(\phi) d\phi d\theta} = \frac{\int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \cos \phi \cos \theta F(\phi) d\phi d\theta}{\int_0^{\pi/2} d\theta \times \int_0^{\pi/2} F(\phi) d\phi} \quad (5)$$

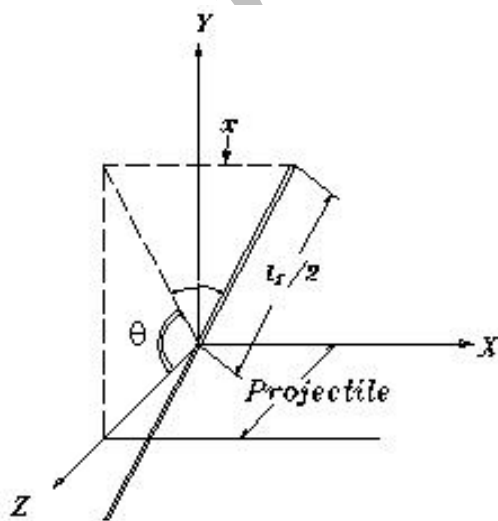
در نتیجه تابع چگالی با انجام یکسری محاسبات از رابطه ساده زیر بدست می آید:

$$F(\phi) = \cos \phi \quad (6)$$

که با اعمال این تابع  $\alpha_x = \alpha_y = \alpha_z$  می شوند.

### متغیر یکنواخت پخش شده (راه حل دوم)

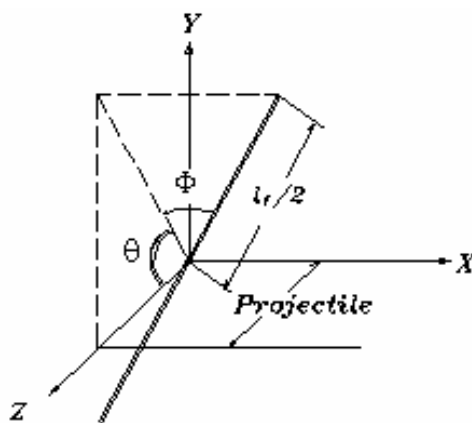
برای بدست آوردن یک پخش یکنواخت بدون در نظر گرفتن یک تابع چگالی می توان از یک دستگاه مختصات خاص استفاده نمود  $(\rho, \theta, x)$  (شکل ۲). ضریب جهت گیری به صورت زیر محاسبه شده است:



شکل ۲: دستگاه مختصات با متغیرهای  $\rho$  و  $x$  و  $\theta$ .

این فرمول که در ادبیات فنی بیان شده است مقدار ضریب جهت گیری را به صورت زیر بیان می کند. که در این فرمول  $l_f$  طول هر فیبر می باشد.

$$\alpha_z = \frac{\int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \frac{l_f}{2} \cos \theta \cos \phi d\theta d\phi}{\int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \frac{l_f}{2} d\phi d\theta} = 0.405 \quad (2)$$



شکل ۱: دستگاه مختصات با متغیرهای  $\rho$  و  $\phi$  و  $\theta$ .

### بررسیهای تحلیلی

معادله ۲ برای حالت بیان شده در ربع مذکور در فضا بدست آمده است. در این حالت فرض شده که  $\phi$  و  $\theta$  دارای پخش یکنواخت می باشند. مشخص است که در یک حالت تصادفی سه بعدی یک فیبر احتمال یکسانی در جهت گیری در بتن را دارد. هر چند با محاسبه ضریب جهت گیری در راستای محور  $X$  ( $\alpha_x$ ) به مقدار بزرگتری نسبت به ضرایب جهت گیری در جهات  $Y$  و  $Z$  حاصل می شود:

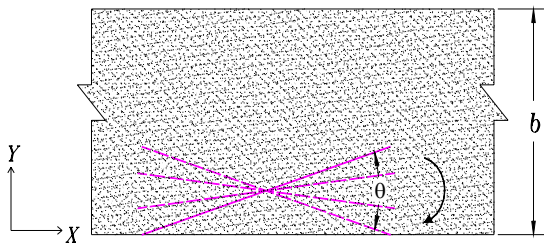
$$\alpha_y = \frac{\int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \frac{l_f}{2} \sin \theta \cos \phi d\theta d\phi}{\int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \frac{l_f}{2} d\phi d\theta} = 0.405 \quad (3)$$

$$\alpha_x = \frac{\int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \frac{l_f}{2} \sin \phi d\phi d\theta}{\int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \frac{l_f}{2} d\phi d\theta} = \frac{2}{\pi} \quad (4)$$

در نتیجه فرض یک پخش یکنواخت برای  $\phi$  و  $\theta$  صحیح نمی باشد در تحقیق حاضر این نتیجه حاصل شده است

که در آن:

$$\beta_{2D} = \frac{\int_0^\gamma l_f \cos\theta \, d\theta}{l_f \int_0^\gamma d\theta} \quad \gamma = \sin^{-1}\left(2\frac{x}{l_f}\right) \quad (\lambda)$$



شکل ۳: مرزهای دو بعدی.

### ضریب جهت گیری الیاف در حالت سه بعدی

اثر دو یا چهار مرز بر روی ضریب جهت گیری به صورت زیر مورد بررسی قرار می گیرد:

#### الف - دو مرز

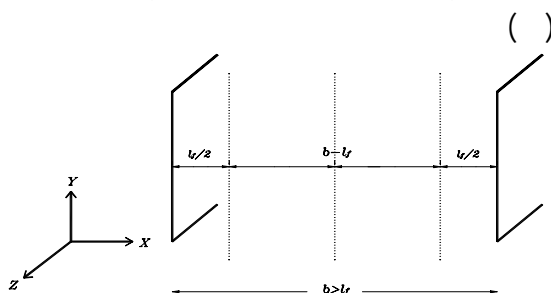
$$\alpha_1 = \begin{cases} \frac{\int_{d_f/2}^{b/2} \beta_1 dy}{b/2} & \text{برای } b \leq l_f \\ \frac{\int_{d_f/2}^{b/2} \beta_1 dy}{\frac{l_f}{b} \frac{d_f}{2}} + 0.5\left(1 - \frac{l_f}{b}\right) & \text{برای } b > l_f \end{cases} \quad (9)$$

که  $\beta_1$  به صورت زیر محاسبه می شود:

#### الف - ۱: مرزهای عمودی (شکل ۴)

$$\beta_1 = \frac{\int_{\gamma_0}^{\gamma} \int_{\gamma_0}^{\pi/2} \frac{l_f}{2} \cos\theta \cos^2\phi \, d\theta \, d\phi}{\int_{\gamma_0}^{\gamma} \int_{\gamma_0}^{\pi/2} \frac{l_f}{2} \cos\phi \, d\theta \, d\phi}$$

$$\gamma = \sin^{-1}\left(2\frac{x}{l_f}\right) \quad \gamma_0 = \sin^{-1}\left(\frac{d_f}{l_f}\right)$$



(الف)

$$\alpha_x = \frac{\int_{-l_f/2}^{l_f/2} x dx}{\int_{-l_f/2}^{l_f/2} dx} = 0.5$$

$$\alpha_z = \frac{\int_0^{l_f/2} \int_0^{\pi/2} \sqrt{(l_f/2)^2 - x^2} \cos\theta \, d\theta \, dz}{\int_0^{l_f/2} \int_0^{\pi/2} l_f/2 \, d\theta \, dz} = 0.5$$

$$\alpha_y = \frac{\int_0^{l_f/2} \int_0^{\pi/2} \sqrt{(l_f/2)^2 - x^2} \sin\theta \, d\theta \, dz}{\int_0^{l_f/2} \int_0^{\pi/2} l_f/2 \, d\theta \, dz} = 0.5$$

با فرض پخش یکنواخت برای  $x$  و  $\theta$ ، مقادیر یکسان ضریب جهت گیری بدست می آید که این نتیجه فرضیه اولیه را تایید می کند. در یک دستگاه کروی  $X$  بوسیله  $\sin\phi$  قابل بیان است که دارای یک پخش یکنواخت می باشد. به عبارت دیگر  $\cos\phi$  یک تابع چگالی برای زاویه  $\phi$  می باشد.

### اثرات شرایط مرزی

هنگامی که الیاف به صورت یکنواخت در یک حجم عظیم بتن پخش می شود، ضرایب یکسان جهت گیری در هر راستایی بدست می آید، که در این حالت اثرات شرایط مرزی قابل توجه نیست. در صورت وجود مرزهای نزدیک نسبت به طول الیاف، مقدار ضریب جهت گیری افزایش می یابد. با توجه به شرایط دو بعدی یا سه بعدی مقدار ضریب جهت گیری الیاف به صورت زیر بدست می آید.

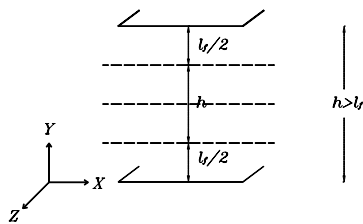
### ضریب جهت گیری الیاف در حالت دو بعدی

در یک حالت کاملاً دو بعدی (شکل ۳) با وجود مرز، فرمولهای زیر برای بدست آوردن ضریب جهت گیری بدست می آید:

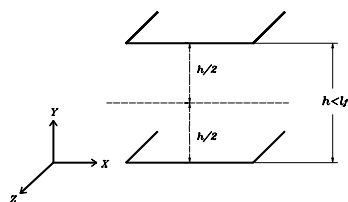
$$\alpha_{2D} = \begin{cases} \frac{\int_{d_f/2}^{l_f/2} \beta_{2D} dx}{b/2} & \text{برای } b \leq l_f \\ \frac{l_f \int_{d_f/2}^{l_f/2} \beta_{2D} dx}{b l_f / 2} + \left(1 - \frac{l_f}{b}\right) & 0.64 \end{cases}$$

برای  $b > l_f$

(۷)



(الف)

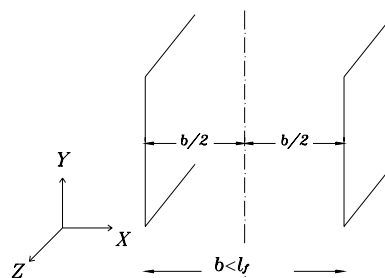


(ب)

شکل ۵: دو مرز افقی (الف)  $h > l_f$  (ب)  $h \leq l_f$ .

**ب - چهار مرز**

در حالتی که چهار مرز برای محدود کردن جهت گیری الیاف وجود دارد (شکل ۶)، ضریب جهت گیری الیاف به صورت زیر بدست می آید.



(ب)

شکل ۴: دو مرز قائم. (الف)  $l_f \leq b$  (ب)  $b < l_f$ .

**الف - ۲: مرزهای افقی (شکل ۵)**

$$\beta_1 = \frac{\int_{\gamma_0}^{\pi/2} \int_{\gamma_0}^{\gamma} \frac{l_f}{2} \cos \theta \cos^2 \phi d\theta d\phi}{\int_{\gamma_0}^{\pi/2} \int_{\gamma_0}^{\gamma} \frac{l_f}{2} \cos \phi d\theta d\phi} \quad ( )$$

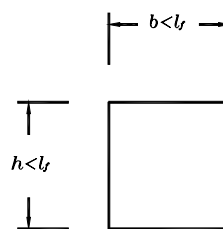
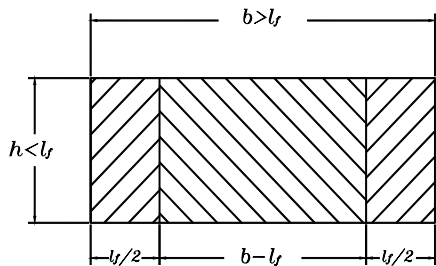
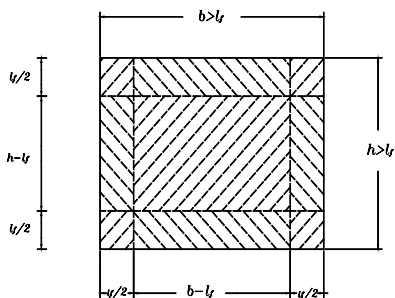
$$\gamma = \sin^{-1} \left( 2 \frac{x}{l_f \cos \phi} \right) \quad \gamma_0 = \sin^{-1} \left( \frac{d_f}{l_f} \right)$$

$$\alpha_2 = \begin{cases} f(b, h) & \text{برای هر دو طرف} \\ & (b, h) < l_f \\ \frac{l_f}{b} f(b, h) + (1 - \frac{l_f}{b}) \frac{\int_{d_f}^{h/2} \beta_1 dy}{h/2} & \text{برای یک طرف} \\ & (h) < l_f \\ \frac{l_f^2}{bh} f(l_f, l_f) + \frac{l_f(b+h-2l_f)}{bh} \frac{\int_{d_f}^{l_f/2} \beta_1 dy}{l_f/2} + \frac{(0.5)(b-l_f)(h-l_f)}{bh} & \text{برای هر دو طرف} \\ & (b, h) > l_f \end{cases} \quad (12)$$

که در فرمول های فوق :

$$f(m, n) = \int_{d_f/2}^{m/2} \int_{d_f/2}^{n/2} \frac{\beta_2 dx dy}{(m/2)(n/2)}$$

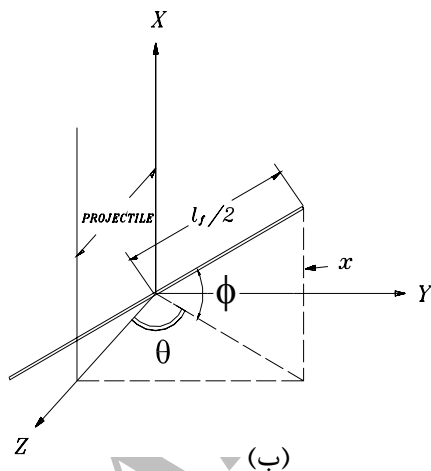
$$\begin{cases} \gamma_0 = \sin^{-1}(d_f / l_f) \\ \gamma = \sin^{-1}(2x / l_f) \\ \delta = \sin^{-1}(2y / l_f \cos \phi) \end{cases} \quad \beta_2 = \frac{\int_{\gamma_0}^{\gamma} \int_{\gamma_0}^{\delta} l_f \cos \theta \cos \phi^2 d\theta d\phi}{l_f \int_{\gamma_0}^{\gamma} \int_{\gamma_0}^{\delta} \cos \phi d\theta d\phi}$$



شکل ۶: حالت‌های مختلف چهار مرز در مقایسه با طول الیاف.

گرفتند. نمونه ها بوسیله آزمایش برزیلی، برای امکان عکس برداری به دو قسمت تقسیم شدند.

از هر برش نمونه دو عکس بوسیله یک دوربین غیر متریک گرفته شد (شکل ۷). عکسها بوسیله یک اسکنر «ULTRA 5500» به صورت دیجیتالی در آمده و بوسیله یک برنامه فتوگرامتری نزدیک مورد بررسی قرار گرفتند. در نهایت، اطلاعات مختصات سه بعدی هر فیبر در دستگاه کارتیزین بدست آمد. با توجه به نتایج حاصله مشخص گردید که  $\phi$  دارای یک پخش یکنواخت نمی باشد هر چند که مقادیر  $\theta$  و  $\sin\phi$  از یک پخش یکنواخت تبعیت می کنند (شکل ۸). شایان ذکر است که در دستگاه فرض شده جدید اثرات خارجی نظیر وزن الیاف یا اثرات لرزش قابل اغماض است. مقادیر اختلاف نتایج تئوری و آزمایشگاهی ضریب جهت گیری الیاف فلزی داخل بتن قابل اغماض است و دارای تطابق مطلوب می باشد. برای حذف اثر شرایط مرزی بایستی آزمایش ها را بر روی فاصله ای بیشتر از  $L_f/2$  (طول الیاف) از هر مرز انجام گیرد.



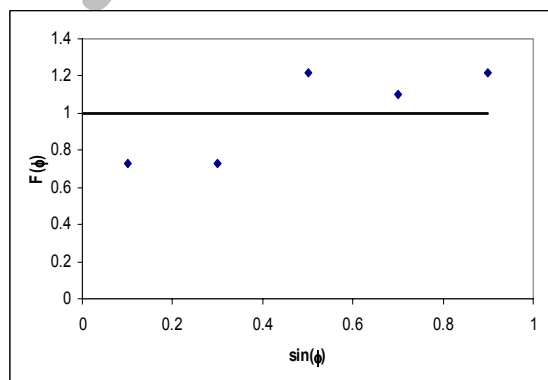
(ب)

## مقایسه نتایج تئوری و اندازه گیریهای آزمایشگاهی

در این بخش مقایسه ای بین نتایج حاصله از تئوری و نتایج آزمایشگاهی به عمل آمده است. نتایج مورد بررسی، متشکل از نتایج آزمایشگاهی انجام پذیرفته در قالب پروژه حاضر که بر روی بتنهای پرمقاومت بوده و نتایج آزمایشگاهی انجام شده توسط سایر محققین می باشد.

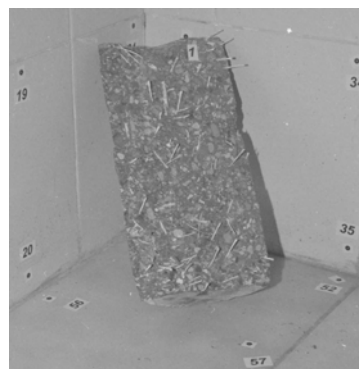
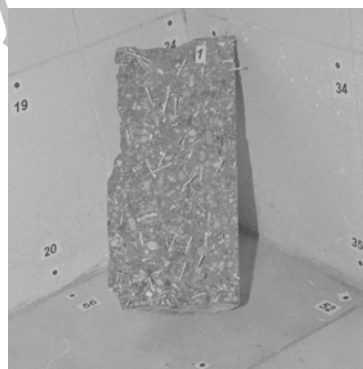
### کارهای آزمایشگاهی

چند نمونه مکعبی ۱۵ سانتیمتری و نیز استوانه ای (۳۰\*۱۵ سانتیمتر) در این تحقیق مورد آزمایش قرار گرفته اند. بتن این نمونه ها دارای نسبت آب به سیمان ۰/۲۲، مقدار فوق روان کننده برابر یک درصد وزن سیمان، درصد حجمی الیاف به کار رفته برابر ۱، ۲/۵ و ۵ درصد می باشد. نمونه ها به صورت لرزش خارجی و بیره شده و بعد از ۲۸ روز نگهداری در هوا مورد آزمایش قرار



(الف)

شکل ۷- (الف): خط ممتد نشان دهنده پخش یکنواخت می باشد. (ب) دستگاه مختصات فرض شده.



شکل ۸: عکسهای تهیه شده از نمونه استوانه ای.

جدول ۱: مقدار میانگین جهت گیری الیاف در موقعیتهای متفاوت سطح مقطع و برای انواع مختلف الیاف.

نوع الیاف (تعداد نمونه ها)	مقادیر متوسط و انحراف معیار							
	بالا		وسط		پایین		همه	
	متوسط	انحراف معیار	متوسط	انحراف معیار	متوسط	انحراف معیار	متوسط	انحراف معیار
مستقیم (۱۶)	۰,۶۰۹	۰,۲۳۱	۰,۵۸۷	۰,۲۳۵	۰,۶۵۴	۰,۲۴۰	۰,۶۱۷	۰,۲۳۵
قلاب دار (۳)	۰,۶۰۵	۰,۲۱۱	۰,۴۷۶	۰,۰۷۷۳	۰,۷۷۶	۰,۲۱۴	۰,۶۱۹	۰,۱۷۹
همه (۱۹)	۰,۶۰۸	۰,۲۲۵	۰,۵۶۹	۰,۲۲۱	۰,۶۷۳	۰,۲۳۷	۰,۶۱۷	۰,۲۲۸

واحد سطح نشان داده است. تعداد الیاف در واحد سطح ( $N_f$ ) به ضریب جهت گیری الیاف در بتن وابسته است. نتایج زیر از بررسی های انجام شده در تحقیق حاضر بدست آمده است:

۱- برای برابری ضریب جهت گیری در هر جهت یک تابع چگالی ( $F(\phi)$ ) تعریف گردید و یا به جای آن از دو متغیر با پخش یکنواخت استفاده گردید. نتایج آزمایشگاهی صحت این دو فرضیه را اثبات کرده است. بررسی ها در این مطالعه با فرض اینکه تنها مرزهای مقطع بر روی پخش الیاف در یک جهت گیری سه بعدی تاثیر دارد، انجام گرفته شده است.

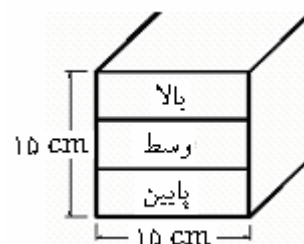
۲- با در نظر گرفتن چهار مرز، مقدار تئوری ضریب جهت گیری با نتایج موجود در مراجع مقایسه شد، این مقایسه نشان دهنده دقت بیشتر نتایج تحلیلی نسبت به فرمولهای موجود در مراجع می باشد و خطا از ۱۳ درصد به ۵/۸ درصد کاهش پیدا کرده است.

### قدردانی

این تحقیق در آزمایشگاه مصالح ساختمانی دانشگاه تهران به انجام رسیده است. نویسندگان با کمال احترام تشکرات خود را از مسئولین آزمایشگاه فتوگرامتری نزدیک به خصوص آقای عبادت قنبری اعلام می دارند. در ضمن نویسندگان مراتب تشکر خود را از استادان دانشگاه تهران، آقایان دکتر رحیمیان، دکتر قالیبافیان، دکتر جبهه دار مارالانی، دکتر کارولوکاس و دکتر اردلان جهت پیشنهادهای سازنده آنها ابراز می دارند.

### مقایسه نتایج با آزمایشهای انجام شده توسط سایر محققین

مقدار ضریب جهت گیری تئوری (باتوجه به وجود چهارمرز) با نتایج آزمایشگاهی بیان شده در مرجع [۲] مقایسه شده است. در این مطالعه هر مقطع بتن به سه دسته بالا، وسط و پایین تقسیم شده و ضریب جهت گیری از فرمول ۱ بدست آمده است. نتایج به صورت خلاصه در جدول (۱) ارائه شده است. مقدار تئوری ضریب جهت گیری نیز از معادله ۱۲ با توجه به متغیرهای انتخاب شده برابر ۰/۵۸۱ می باشد (طول فیبر برابر ۲ اینچ و سطح مقطع نمونه بتنی برابر ۳۶ اینچ مربع است). این مقدار دقیق تر از ضریب جهت گیری تئوری ۰/۵۳۷ بدست آمده در منبع [۲] میباشد و مقدار میانگین اندازه گیری شده الیاف ۰/۶۱۷ است که به مقدار تئوری محاسباتی ۰/۵۸۱ نزدیک میباشد (به ضمیمه مراجعه شود)



شکل ۹: نواحی اندازه گیری.

### نتیجه گیری

تحقیقاتی که تاکنون انجام شده است، یک رابطه مناسب بین مقاومت کششی و میانگین تعداد الیاف در هر

## مراجع

- 1 - Shah, S.H. and Batson, G. B. (1987). *Fiber Reinforced Concrete: Properties and Applications*, Detroit, Michigan: American Concrete Institute.
- 2 - Debicki, G., Shekarchi M. et and Houari, H. (1994). "Contribution à la caractérisation du béton armé de fibres métalliques- résultats d'étude rhéologique. les bétons renforcés de fibres métalliques." *Centre de Coopération Interuniversitaire Franco-Québécoise*, Béthune, France, PP. 23-36.
- 3 - Soroushian, P. and Lee, C. (1990). "Tensile strength of steel fiber reinforced concrete: correlation with some measures of fiber spacing." *ACI Material Journal*, Vol. 87, No. 6, PP. 541-546.
- 4 - Soroushian, P. and Lee, C. (1990). "Distribution and orientation of fibers in steel fiber reinforced concrete." *ACI Material Journal*, Vol. 87, No. 5.
- 5 - Krenechel, h. (1964). *Fiber reinforcement, Akademisk Forlag*, Copenhagen, PP. 158.
- 6 - Aveston, J., Mercer, R. A. and Sillwood, J. M. (1974). "Fiber reinforced cements-scientific foundations and specifications." *Proc .NPL Conf. on Composites Standards of Testing and Design*, IPC Science and Technology Press Guilford, UK, PP. 93.
- 7 - Laws, V., Lawrence, P. and Nurse, R. W. B. (1973). "Reinforcement of brittle material by glass fibers." *Journal of Physics, Series D, Applied Physics*, Vol. 6, No.19-b, PP. 523-537.

## ضمیمه

محاسبات زیر توسط برنامه MATHCAD انجام شده است.

$$\int_{-\frac{\tau}{\nu}}^{\frac{\tau}{\nu}} \int_{-\frac{\tau}{\nu}}^{\frac{\tau}{\nu}} \frac{\int_{\phi}^{\theta} \int_{\phi}^{\theta} \tau \cos(\theta) \cdot \cos(\phi) \tau d\theta d\phi}{\int_{\phi}^{\theta} \int_{\phi}^{\theta} \tau \cos(\phi) d\theta d\phi} dx dy \cdot \frac{\tau}{\tau * \tau}$$

$$+ \frac{\tau - \tau}{\tau * \tau} \left( \int_{-\frac{\tau}{\nu}}^{\frac{\tau}{\nu}} \frac{\int_{\phi}^{\theta} \int_{\phi}^{\theta} \tau \cos(\theta) \cdot \cos(\phi) \tau d\theta d\phi}{\int_{\phi}^{\theta} \int_{\phi}^{\theta} \tau \cos(\phi) d\theta d\phi} dx \right)$$

$$\left[ \int_{\frac{\rho}{\gamma}}^{\frac{\rho}{\gamma}} \frac{\int_{\frac{\pi}{\gamma}}^{\frac{\pi}{\gamma}} \int_{\frac{\pi}{\gamma}}^{\pi \sin\left(\min\left(1, \frac{\rho}{\gamma \cos(\phi)}\right)\right)} \gamma \cos(\theta) \cdot \cos(\phi)^\gamma d\theta d\phi}{\left( \int_{\frac{\pi}{\gamma}}^{\frac{\pi}{\gamma}} \int_{\frac{\pi}{\gamma}}^{\pi \sin\left(\min\left(1, \frac{\rho}{\gamma \cos(\phi)}\right)\right)} \gamma \cos(\phi) d\theta d\phi \right)} dx \right]$$

+

$$(\rho - \gamma) * \frac{(\rho - \gamma)}{\rho * \gamma} \frac{\int_{\frac{\pi}{\gamma}}^{\frac{\pi}{\gamma}} \int_{\frac{\pi}{\gamma}}^{\frac{\pi}{\gamma}} \gamma * \cos(\theta) * \cos(\phi)^\gamma d\theta d\phi}{\int_{\frac{\pi}{\gamma}}^{\frac{\pi}{\gamma}} \int_{\frac{\pi}{\gamma}}^{\frac{\pi}{\gamma}} \gamma \cos(\phi) d\theta d\phi}$$

= , + , + , + , = ,

