

# حل عددی جریان غیردائم جابجایی آزاد در محفظه‌های بسته

ندا معروف مشاط

فارغ التحصیل کارشناسی ارشد دانشکده مهندسی مکانیک - دانشگاه صنعتی شریف

مهرداد تقی زاده منظری

استادیار دانشکده مهندسی مکانیک - دانشگاه صنعتی شریف

قطب علمی تبدیل انرژی

mtmanzari@sharif.edu

(تاریخ دریافت ۸۲/۸/۱۲، تاریخ دریافت روایت اصلاح شده ۸۴/۵/۲۴، تاریخ تصویب ۸۴/۷/۱۶)

## چکیده

در این مقاله یک روش عددی جهت حل جریان غیردائم جابجایی آزاد برای سیال تراکم ناپذیر ارائه شده است. روش اجزاء محدود گلرکین ضلع-مبنا با المانهای مثلثی برای شبیه‌سازی جریان استفاده شده است. الگوریتم حل بر اساس روش تراکم‌پذیری مجازی همراه با حل زمانی دوگانه می‌باشد. از روش تفاضل محدود پسرودرجه دوم برای پیمایش در زمان واقعی و از روش چند مرحله‌ای رانگ-کوتا برای حرکت در زمان مجازی استفاده شده است. نحوه عملکرد روش پیشنهادی با حل مسائلی برای مقادیر مختلف عدد رایلی بررسی شده است. نتایج حاصل حاکی از دقت مطلوب روش برای محدوده اعداد رایلی مورد بررسی می‌باشد.

**واژه‌های کلیدی:** جریان تراکم‌ناپذیر، جابجایی آزاد، غیردائم، اجزاء محدود

## مقدمه

شدن شکل هندسی سیستم و شرایط مرزی آن دستیابی به حل تحلیلی مسأله تقریباً غیرممکن می‌شود. یکی از روشهای مناسب برای حل چنین مسائلی استفاده از روشهای عددی می‌باشد که اجازه می‌دهند انواع پیچیدگی‌های هندسی و فیزیکی، با دقت مطلوب لحاظ شوند. در این زمینه مقالات متعددی وجود دارند که با استفاده از روشهای مختلف به حل مسائل جابجایی آزاد پرداخته‌اند. نیکولت با استفاده از روشهای تحلیلی و تجربی سرمایش غیردائم تحت جابجایی آزاد را در یک محفظه مربعی دو بعدی بررسی کرد [۱]. پترسون و ایمبرگر از روش آنالیز مقیاسها<sup>۱</sup> که توسط چورین [۲] ارائه شده است برای مشاهده اثرات جابجایی آزاد در حالت غیردائم در محفظه مربعی استفاده کردند [۳]. خلیل‌اللهی و سماکیا از روش عددی لاگرانژ-اولر برای حل جریان جابجایی آزاد غیردائم درون یک محفظه با دیواره‌های آدیاباتیک و یک سطح ایزوترم داغ در مرکز آن، استفاده کردند [۴]. ایوی آزمایشی را برای مشاهده عملی تغییرات میدان جریان و توزیع دما درون محفظه بسته در طی یک فرایند غیردائم

یکی از پدیده‌های مهم در انتقال حرارت جابجایی آزاد یا طبیعی می‌باشد. در جابجایی آزاد عامل به وجود آمدن جریان معمولاً نیروی شناوری ناشی از وجود گرادیان چگالی در سیال می‌باشد. نقش جابجایی آزاد در میزان انتقال حرارت از بسیاری از تجهیزات دقیق مهندسی نظیر وسایل الکترونیکی و اجزای مختلف رایانه‌ها ضروری بوده و در طراحی چنین سیستمهایی باید بررسی این پدیده با دقت زیاد انجام شود. جابجایی آزاد همچنین نقش مهمی را در انتقال گرما از گرمکن‌های الکتریکی صفحه‌ای یا رادباتورهای بخاری به هوای اطاق ایفا می‌کند. در بسیاری از کاربردهای مهندسی جریان جابجایی در محفظه‌های بسته جریانی غیردائم و وابسته به زمان می‌باشد. خنک شدن فلز گذاخته بعد از شکل دهی در صنایع ذوب فلز، خنک کاری قطعات الکترونیکی، خنک شدن دیواره پیستونها در ماشینهای احتراق داخلی، کاربردهای تهویه مطبوع، عملیات حرارتی قطعات جهت سختکاری مثالهایی از این گونه مسائل هستند. بررسی دقیق فرآیندهای غیردائم کاری دشوار بوده و با پیچیده

به صورت مشهودی افزایش یابد [۱۷]. منظری این روش را برای حل مسائل انتقال حرارت تعمیم داده است [۱۸]. در این مقاله پس از بیان فرضیات مسأله جابجایی آزاد در جریان دوبعدی سیال تراکم‌ناپذیر و ارائه معادلات حاکم، جزئیات روش اجزاء محدود استاندارد گلرکین ضلع-مبنا با المانهای مثلثی تشریح می‌شود. همچنین چگونگی استفاده از روش تراکم‌پذیری مجازی همراه با حل زمانی دوگانه (استفاده از روش چند مرحله‌ای رنگ-کوتا برای زمان مجازی و روش تفاضل محدود پسرودرجه دوم برای زمان واقعی) ارائه می‌گردد. در انتها نحوه عملکرد این روش با حل دو مسأله، یکی محفظه مربعی دوبعدی و دیگری یک محفظه L شکل برای مقادیر مختلف عدد رایلی و شرایط مرزی متفاوت بررسی شده و با نتایج کارهای موجود مقایسه شده است.

### معادلات حاکم

معادلات حاکم برای بررسی جریان تراکم‌ناپذیر غیردائم شامل معادلات بقای جرم، اندازه حرکت و انرژی می‌باشند. فرض می‌شود که سیال مورد بررسی نیوتنی و دارای خواص فیزیکی ثابت باشد و همچنین از فرض بوزینسک برای جمله شناوری استفاده شده است. مجموعه معادلات حاکم به صورت بقائی و بدون بعد به صورت زیر می‌باشند:

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + \mathbf{I}^M \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}^j}{\partial x_j} = \frac{\partial \mathbf{G}^j}{\partial x_j} + \mathbf{S}, \quad j=1,2 \quad (1)$$

بنحوی که در آن داریم:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} p \\ u_1 \\ u_2 \\ T \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}^j = \begin{bmatrix} \beta^2 u_j \\ u_1 u_j + p \delta_{1j} \\ u_2 u_j + p \delta_{2j} \\ Tu_j \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}^j = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{1j} \\ \tau_{2j} \\ \frac{1}{Pe} \frac{\partial T}{\partial x_j} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{S}^j = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{Gr}{Re^2} T \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I}^M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

در معادلات فوق  $t$  زمان حقیقی،  $\tau$  زمان مجازی<sup>۶</sup>،  $u_i$  سرعت در جهت  $x_i$ ،  $p$  فشار،  $T$  دما،  $\beta$  ضریب تراکم‌پذیری مجازی و  $\delta_{ij}$  دلتای کرونکر می‌باشند. همچنین عدد رینولدز  $Re$ ، عدد پکلت  $Pe$ ، عدد گراشف  $Gr$  و تنش

انجام داد [۵]. فو حالت غیردائم جریان جابجایی آزاد هوا را در محفظه بسته دوبعدی برای دو مقدار عدد رایلی  $10^4$  و  $10^6$  بررسی کرده است. وی از روش اجزاء محدود پنالتی و الگوریتم تکرار شونده نیوتن-رافسون برای حل مکانی و روش تفاضل پسرودرجه دوم برای حل زمانی استفاده کرده است [۶]. کاظم زاده نیز انتقال حرارت جابجایی آزاد از روی استوانه‌های افقی که در یک ردیف عمودی بین دو دیواره قائم قرار گرفته‌اند را با استفاده از روش اجزاء محدود بررسی کرده است [۷].

در بررسی جریان غیردائم، شکل و هندسه نامتقارن و نامنظم از اهمیت خاص برخوردار می‌باشد. فقط در تعداد کمی از کارهای گزارش شده از هندسه‌های پیچیده استفاده شده است. آنگ [۸] و بتس [۹] هندسه‌ای مرکب از یک محفظه عمودی و یک محفظه افقی را مورد مطالعه قرار داده‌اند. ایورن - سلامت جابجایی آزاد را در شیلیاری شبیه به یک بطری مورد مطالعه قرار دادند [۱۰]. همچنین نیلی آراسو پدیده انتقال حرارت در محفظه عمودی-افقی برای شرایط مرزی متفاوت را به کمک روش اجزاء محدود گلرکین با المانهای مثلثی مورد مطالعه قرار داده است [۱۱]. یکی از روشهای موفق در شبیه‌سازی جریان تراکم‌ناپذیر، روش تراکم‌پذیری مجازی<sup>۲</sup> می‌باشد که توسط چورین معرفی شده است [۱۲]. در این روش یک جمله فشار مجازی به معادله پیوستگی اضافه می‌شود و در نتیجه این تغییر سیستم معادلات حاکم بر جریان سیال تراکم‌ناپذیر به صورت هذلولی در آمده و برای حل آن می‌توان از روشهای معمول حل جریانهای تراکم‌پذیر استفاده نمود. روش تراکم‌پذیری مجازی اساساً برای حل جریانهای دائم طراحی شده است ولی این روش بعداً برای دستیابی به حل مسائل غیردائم اصلاح گردید [۱۳، ۱۴، ۱۵]. انواع مختلف روشهای بادسو<sup>۳</sup> و تلفات مجازی<sup>۴</sup> همراه با روش تراکم‌پذیری مجازی برای رسیدن به حل عددی پایدار به کار برده می‌شوند. در این مقاله از روش تلفات مجازی جیمسون به علت کارایی محاسباتی و سادگی آن استفاده شده است [۱۶]. در چند دهه اخیر روش اجزاء محدود به خاطر مبنای ریاضی قوی و قابلیت حل فیزیک‌های پیچیده، به طور گسترده مورد توجه محققین قرار گرفته است. در دو دهه اخیر استفاده از ساختار اطلاعاتی عددی معروف به ضلع-مبنا<sup>۵</sup> باعث شده است که توانایی روش اجزاء محدود در به‌کارگیری تکنیکهای جانبی حل جریان

محاسباتی مانند  $\Omega$  که با سطح بسته  $\Gamma$  محدود شده و دارای بردار واحد برونگرای  $\vec{n} = (n_1, n_2)$  می‌باشد، در نظر گرفته می‌شود. در مسائل غیر همدم، دمای ابتدایی برابر صفر به عنوان شرط اولیه و دیوار همدم و دیوار آدیباتیک به عنوان دو نوع شرط مرزی در نظر گرفته می‌شوند. در حالت دیوار همدم، دما در همه جا روی دیوار برابر با مقدار ثابتی می‌باشد و در حالت دیواره آدیباتیک، هیچ تبادل انرژی از دیواره صورت نمی‌گیرد. در حل عددی میدان سرعت صفر و توزیع فشار یکنواخت به‌عنوان شرط اولیه سرعت و فشار در نظر گرفته می‌شوند. در مرز دیوارها، شرط عدم لغزش  $u_i = 0$  اعمال می‌شود. در مرز متقارن، شرط آدیباتیک بودن برای میدان دما و شرط لغزش برای میدان سرعت با حذف مولفه نرمال بردار سرعت در نظر گرفته می‌شود.

### الگوریتم حل

ایجاد یک فرمول بندی ضعیف<sup>۷</sup> برای مسأله قدم اول در رویه حل تقریبی آن است. فرم ضعیف شده برای تمام توابع وزن مناسب  $W$  و  $t > t_0$  عبارت است از:

$$\int_{\Omega} \left( \frac{\partial U}{\partial \tau} + \mathbf{I}^M \frac{\partial U}{\partial t} \right) W d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{S} W d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{F}^j \frac{\partial W}{\partial x_j} d\Omega - \int_{\Gamma} \bar{\mathbf{F}}^j n_j W d\Gamma - \int_{\Omega} \mathbf{G}^j \frac{\partial W}{\partial x_j} d\Omega + \int_{\Gamma} \bar{\mathbf{G}}^j n_j W d\Gamma \quad (5)$$

خط روی متغیرها نشانه شار مرزی نرمال است. حال ناحیه  $\Omega$  به مجموعه‌ای از المانهای مثلثی گسسته می‌شود و از روش گلرکین برای حل استفاده می‌شود. برای محاسبه انتگرالهایی که در فرمولبندی ظاهر می‌شوند از روش ضلع مبنا استفاده می‌شود [۱۹]. معادله نتیجه در گره  $I$  شبکه به صورت زیر خواهد بود:

$$\left[ \mathbf{M} \left( \frac{dU}{dt} + \mathbf{I}^M \frac{\partial U}{\partial t} \right) \right]_I = [\mathbf{M}_L]_I \mathbf{S}_I - \sum_{s=1}^{m_I} \frac{C_{I_s}^j}{2} \left\{ (\mathbf{F}_I^j + \mathbf{F}_{I_s}^j) - (\mathbf{G}_I^j + \mathbf{G}_{I_s}^j) \right\} + \left\langle \sum_{f=1}^2 \mathbf{D}_f \left\{ (4\bar{\mathbf{F}}_I^n + 2\bar{\mathbf{F}}_{J_f}^n + \mathbf{F}_I^n - \mathbf{F}_{J_f}^n) - (4\bar{\mathbf{G}}_I^n + 2\bar{\mathbf{G}}_{J_f}^n + \mathbf{G}_I^n - \mathbf{G}_{J_f}^n) \right\} \right\rangle_I \quad (6)$$

لزجتی  $\tau_{ij}$  به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$Re = \frac{\hat{\rho} \hat{U} \hat{L}}{\hat{\mu}_0} \quad Gr = \frac{\hat{L}^3 \hat{\rho}^2 g (\beta_T \Delta T)}{\hat{\mu}_0^2} \\ Pe = Re Pr \quad \tau_{ij} = \frac{\mu}{Re} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (3)$$

که در آن،  $\hat{\mu}_0$  لزجت دینامیکی مولکولی در دمای مرجع  $\hat{T}_0$ ، چگالی سیال،  $\beta_T$  ضریب انبساط گرمایی حجمی،  $Pr$  عدد پرانتل و نماد  $\wedge$  بیانگر کمیت با بعد می‌باشند. در معادلات بالا کمیت‌های بی‌بعد به صورت زیر تعریف شده‌اند:

$$t = \frac{\hat{t} \hat{U}}{\hat{L}} \quad u_i = \frac{\hat{u}_i}{\hat{U}} \quad p = \frac{\hat{p}}{\hat{\rho}_0 \hat{U}^2} \\ T = \frac{\hat{T} - \hat{T}_0}{\hat{T}_w - \hat{T}_0} \quad \mu = \frac{\hat{\mu}}{\hat{\mu}_0} \quad (4)$$

در این معادلات  $\hat{L}$  و  $\hat{U}$  طول و سرعت مشخصه و  $\hat{T}_w$  دمای دیواره می‌باشند که برای بی‌بعد سازی معادلات به‌کار می‌روند. لازم به تاکید است که جمله زمان مجازی  $(\partial U / \partial \tau)$  برای دستیابی به مدل تراکم‌پذیری مجازی به معادلات اضافه شده است. حرکت در زمان واقعی  $t$  و به‌دست آوردن جوابهای معادلات در طی زمان، وابسته به برقراری شرایط دائم در ترم زمان مجازی  $\tau$  می‌باشد. یعنی با به حالت دائم رسیدن در زمان  $\tau$ ، اثر ترم مجازی در معادلات اصلی حذف می‌شود و می‌توان در زمان واقعی حرکت کرد. پارامتر  $\beta$  را می‌توان به‌عنوان سرعت مجازی صوت در جریانهای تراکم‌ناپذیر تعبیر کرد. اضافه کردن تراکم‌پذیری مجازی رفتار شکل غیرلزج معادلات حاکم را از سهموی به هذلولوی تغییر می‌دهد. در نتیجه پارامتر تراکم‌پذیری مجازی  $\beta$ ، طوری تعیین می‌شود که رسیدن به حالت دائم در زمان مجازی را تسریع کند. در معادله (۱) فرض می‌شود که نیروی جاذبه و در نتیجه نیروی شناوری در جریان جابجایی آزاد در راستای  $x_2$  عمل می‌کند.

### شرایط مرزی و اولیه

در حالت کلی مدل ریاضی ارائه شده برای جریان دارای چهار معادله و چهار مجهول می‌باشد. یک بیان ریاضی کامل از مسأله، نیازمند اختصاص دادن یک سری شرایط مرزی و اولیه به این معادلات می‌باشد. دامنه

سمت چپ آن معادله می‌باشد. معادله (۱۰) نشانگر میدان جریان در زمان مجازی می‌باشد و تا رسیدن به حالت دائم در زمان مجازی معنای فیزیکی ندارد. به عبارت دیگر میدان سرعت صحیح در هر لحظه از زمان واقعی وقتی به دست می‌آید که حل معادله (۱۰) در زمان مجازی به حالت دائم رسیده‌باشد. در اینجا از روش سه مرحله‌ای رانگ-کوتا برای پیشروی حل از زمان مجازی  $\tau^m$  به زمان مجازی  $\tau^{m+1} = \tau^m + \Delta\tau$  استفاده می‌شود. در هر پله زمان مجازی، حل به صورت مراحل زیر پیشرفت می‌کند:

$$\begin{aligned} U_I^{(0)} &= U_I^m \\ U_I^{(k)} &= U_I^m - \alpha_k \Delta\tau (\tilde{R}_I^{(k-1)}) - [M_L]^{-1} D_I^{(0)} \\ U_I^{m+1} &= U_I^{(3)}, \quad k = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (11)$$

که در آن  $\tilde{R}_I^{(k-1)}$  نشان دهنده طرف راست معادله (۱۰) می‌باشد و در مرحله  $k-1$  برای زمان  $\tau^{m+1}$  محاسبه می‌شود در حالی که جمله اضافه شده  $D_I$  در مقداری که در  $\tau^m$  محاسبه شده، ثابت نگه‌داشته می‌شود. مقادیر  $\alpha_3 = 1.0$  و  $\alpha_2 = 0.6$ ،  $\alpha_1 = 0.6$  برای ضرایب معادله (۱۱) اختیار شده‌اند. در اینجا لازم به تأکید است که روش رانگ-کوتا در زمان حقیقی  $t^n$  شروع شده و فقط زمانی که شرایط دائم در زمان مجازی برقرار شده باشد، میدان جریان صحیح به دست می‌آید و  $U^{m+1}$  برابر با حل زمان واقعی  $U^{n+1}$  خواهد شد. در ضمن دقت پیشروی در زمان مجازی بر دقت حل در زمان واقعی تأثیر ندارد.

در این مقاله برای پایدار کردن روش حل از روش تلفات مجازی جیمسون [۱۶] استفاده شده‌است. این روش از لحاظ محاسباتی کم هزینه محسوب می‌شود. در این روش یک جمله انتشار  $D_I$  مطابق فرمول زیر به گره عمومی  $I$  اضافه می‌شود:

$$D_I = - \sum_{s=1}^{m_I} \varepsilon_{II_s}^{(d)} (\nabla^2 U_{I_s} - \nabla^2 U_I) \frac{\min(\lambda_I, \lambda_{I_s})}{m_I + m_{I_s}} \quad (12)$$

که در آن عملگر لاپلاسین درجه دوم به صورت زیر تقریب زده می‌شود:

$$\nabla^2 U_I \approx \frac{1}{m} \sum_{s=1}^{m_I} (U_{I_s} - U_I) \quad (13)$$

در اینجا  $m_I$  بر تعداد ضلعهایی که به گره  $I$  متصل هستند، دلالت دارد و  $\lambda$  حداکثر قدر مطلق مقدار ویژه

که در آن  $S$  نشانگر ضلع ارتباط دهنده گره  $I$  به  $I_S$  و  $J_1$  و  $J_2$  گره های روی مرز هستند که به گره مرزی  $I$  متصل می‌باشند. توجه شود که جمله  $\langle \bullet \rangle_I$  فقط وقتی غیرصفر است که گره  $I$  یک گره مرزی باشد.  $C_{II_s}^j$  و  $D_f$  توابع وزن مربوط به ضلع  $II_s$  و ضلع مرزی  $f$  هستند و  $M_L$  ماتریس جرمی متمرکز است. وزنه‌های  $C_{II_s}^j$  و  $D_f$  به ترتیب زیر محاسبه می‌شوند:

$$\begin{aligned} C_{II_s}^j &= - \sum_{E \in II_s} \frac{2\Omega_E}{3} \left[ \frac{\partial N_I}{\partial x_j} \right]_E + \left\langle \sum_{f \in II_s} \frac{\Gamma_f}{6} n_j \right\rangle \\ D_f &= - \frac{\Gamma_f}{12} \end{aligned} \quad (7)$$

$n_j$  مؤلفه در راستای  $x_j$  بردار واحد عمود بر ضلع مرزی  $f$ ،  $\Omega_E$  سطح المان  $E$  و  $\Gamma_f$  طول ضلع مرزی است. فرمول اجزاء محدود نیمه گسسته (۶) نشان دهنده یک تقریب از نوع تفاضل مرکزی برای مشتق مکانی می‌باشد که می‌توان آنرا به صورت زیر نوشت:

$$\frac{dU}{d\tau} + I^M \frac{dU}{dt} = [M_L]^{-1} R \quad (8)$$

هرگاه این فرم با یک روش صریح برای پیشرفت در زمان ترکیب شود، مستعد ایجاد نوسانات مصنوعی در جواب خواهد بود که باعث عدم پایداری حل عددی می‌شود. از این رو قبل از استفاده از معادلات برای شبیه‌سازی جریان نیاز به یک فرم پایدارسازی می‌باشد که در زیر توضیح داده شده‌است.

تقریب زمان دوگانه برای پیشروی معادله (۸) در زمان به کار برده شده‌است. پیشرفت در زمان واقعی  $t$  که دقت حل در زمان را کنترل می‌کند، به وسیله فرمول تفاضل محدود پسر و ضمنی درجه دوم به صورت زیر صورت می‌گیرد:

$$\frac{dU^{n+1}}{dt} + I^M \frac{3U^{n+1} - 4U^n + U^{n-1}}{2\Delta t} = [M_L^{n+1}]^{-1} R^{n+1} \quad (9)$$

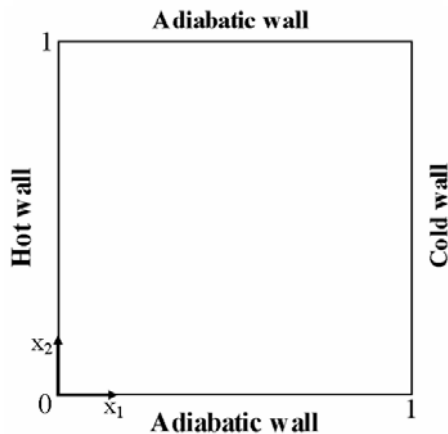
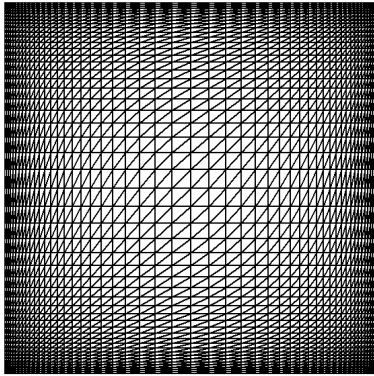
که در آن اندیس  $n$  نشانگر زمان جاری  $t$  و  $n-1$  نشانگر قدم زمانی قبل  $t - \Delta t$  می‌باشد و مجهولات در زمان  $t + \Delta t$  با  $n+1$  نشان داده می‌شود. معادله (۹) را می‌توان به صورت ساده‌تر زیر باز نویسی کرد:

$$\frac{dU^{n+1}}{d\tau} = \tilde{R}^{n+1} \quad (10)$$

که  $\tilde{R}$  شامل جمله سمت راست معادله (۹) و جمله دوم

$$Nu_{x_i} = \frac{\rho C_p \hat{u} (\hat{T} - \hat{T}_0) - k \partial \hat{T} / \partial \hat{x}_i}{k (\hat{T}_w - \hat{T}_0) / \hat{L}}, \quad i=1,2 \quad (14)$$

$$Nu_{x_i} = \int_0^1 Nu_{x_i} d\hat{x}_r \quad (15)$$



شکل ۱: المان بندی و شرایط مرزی مسأله.

برای نشان دادن درستی روش عددی به کار رفته مقادیر به دست آمده از حل غیردائم در زمانی که نتایج به حالت دائم رسیده‌اند با مقادیر موجود [۶ و ۲۰] برای عدد رایلی  $10^6$  مقایسه شده و در جدول (۱) نشان داده شده‌اند. برای اطمینان از حساسیت جواب نسبت به اندازه شبکه، مسأله مورد نظر برای دو شبکه دیگر با اندازه‌های  $26 \times 26$  و  $76 \times 76$  نیز حل گردید که نتایج عدد نوسلت میانگین در جدول (۲) مقایسه شده‌است. این مقایسه نشان می‌دهد که شبکه  $51 \times 51$  برای محاسبات کافی می‌باشد. همانطور که در جدول (۱) مشاهده می‌شود، تمام مقادیر داده شده که شامل نوسلت میانگین، نوسلت کلی بر روی دیواره گرم، نوسلت کلی در  $x_1 = 0.5$  و مقادیر حداکثر و حداقل نوسلت بر روی دیواره گرم، با دقت خوبی به مقادیر مرجع نزدیک می‌باشند.

ماتریس ژاکوبین  $\partial F^j / \partial U$  می‌باشد و  $l_j = (l_1, l_2)$  بردار یکه در جهت ضلع  $II_s$  می‌باشد. پارامتر تنظیم کننده  $\varepsilon_{II_s}^{(4)}$  ثابت است و مقدار آن باید برای هر مسأله بهینه‌یابی شود.

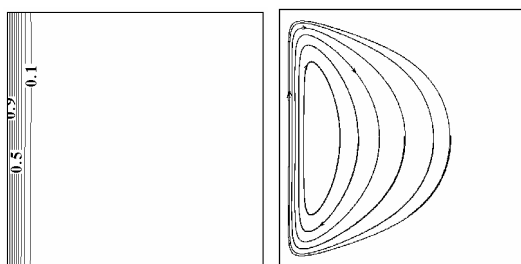
## نتایج عددی

برای نشان دادن کارایی الگوریتم ارائه شده به حل دو مسأله جابجایی آزاد غیردائم پرداخته شده‌است. یکی از این مسائل مربوط به محفظه مربعی دوبعدی و دیگری جریان در داخل یک محفظه L شکل است. نتایج برای مقادیر مختلف عدد رایلی با نتایج کارهای موجود مقایسه شده‌اند.

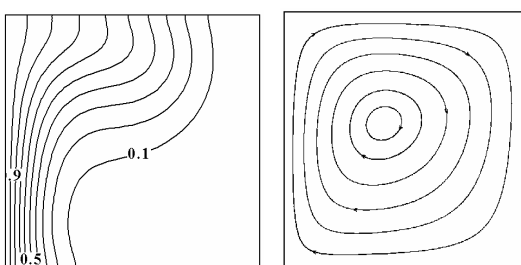
### ۱ - محفظه مربعی

در این قسمت جریان جابجایی آزاد در حالت غیردائم در درون یک محفظه بسته مربعی مورد مطالعه قرار گرفته‌است. در این مسأله از یک شبکه با سازمان  $51 \times 51$  استفاده شده که دارای ۵۰۰۰ المان مثلثی و ۲۶۰۱ گره می‌باشد. شبکه مورد نظر و شرایط مرزی مسأله در شکل (۱) نشان داده شده‌اند. محفظه شامل دو دیواره افقی آدیاباتیک و دیواره‌های قائم همدمای می‌باشد. سیال درون محفظه در ابتدا ساکن و دمای آن همدمای دو دیواره عمودی  $T = 0$  می‌باشد. سپس به‌طور ناگهانی دمای دیواره عمودی سمت چپ تا  $T = 1$  بالا برده شده و در همین دما ثابت نگه داشته می‌شود. در اینجا هدف مطالعه پدیده کاملاً غیردائمی است که بعد از این لحظه به وجود می‌آید. مسأله برای عدد پرانتل  $Pr = 1$  و دو عدد رایلی  $10^4$  و  $10^6$  حل شده‌است. در اینجا از دو اندازه قدم  $\Delta t = 1.0$  و  $\Delta t = 0.5$  برای دستیابی به دقت لازم در زمان واقعی به ترتیب برای دو عدد رایلی  $10^4$  و  $10^6$  استفاده شده‌است. لازم به ذکر است که کوچکتر کردن  $\Delta t$  از این مقدار تأثیر قابل ملاحظه‌ای بر دقت حل ندارد، در حالی که افزایش آن ابتدا دقت حل را کم کرده و در نهایت منجر به واگرایی حل می‌شود. همچنین طول مدت محاسبات برای دو عدد رایلی  $10^4$  و  $10^6$  بر روی یک کامپیوتر P4-2.4GHz به ترتیب ۲۵ دقیقه و ۶۳ دقیقه می‌باشد. در اینجا به منظور همخوانی با نتایج ارائه شده در مقالات، عدد نوسلت موضعی  $Nu_{x_i}$  و عدد نوسلت کلی در مقطع  $x_1$  به صورت زیر تعریف می‌شوند:

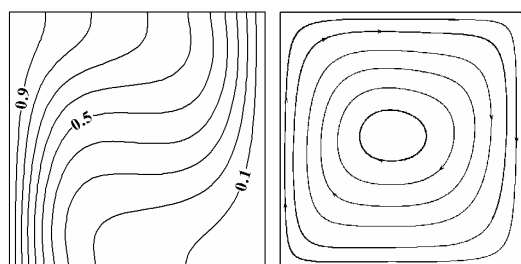
نمودارهای موجود در مقایسه با نمودارهای مشابه به دست آمده در این شکل قابل ارزیابی می‌باشد.



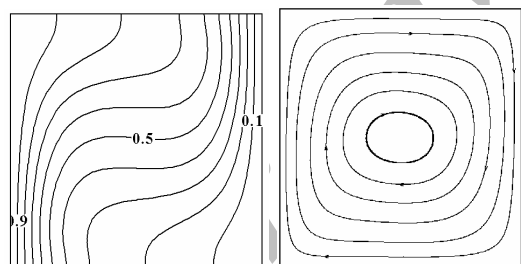
(الف)  $t = 2$



(ب)  $t = 45$

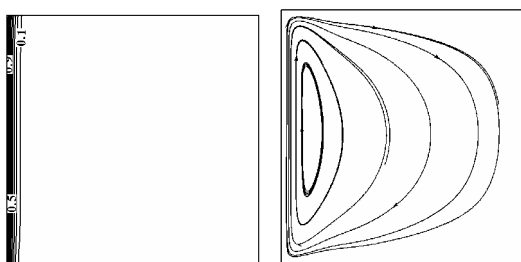


(ج)  $t = 134$



(د)  $ts = 320$

شکل ۲: نحوه تغییرات خطوط همدم (چپ) و خطوط جریان (راست) درون محفظه برای رایلی  $10^4$ .



(الف)  $t = 1$

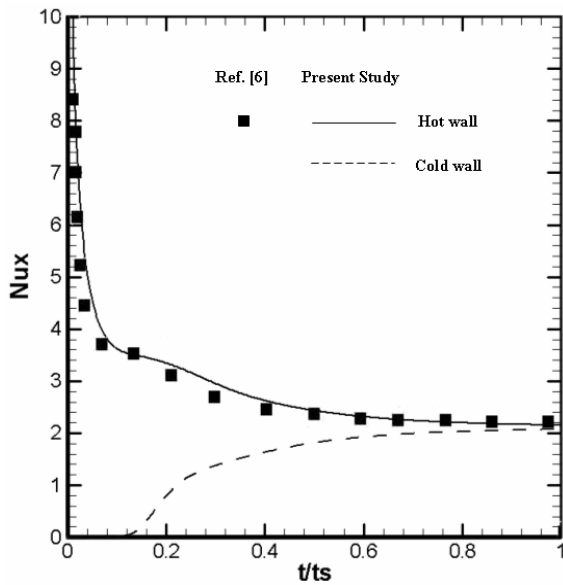
جدول ۱: مقایسه نتایج مطالعه حاضر با مراجع مذکور.

مطالعه حاضر	حل Davis[20]	حل Benchmark[6]	متغیر
۸/۸۱۵	۸/۸۱۱	۸/۸۰	$\overline{Nu}$
۸/۹۹۲	۸/۸۶۹	۸/۷۹۹	$Nu_{x_j=0.5}$
۸/۶۴۴	۹/۲۷۰	۸/۸۱۷	$Nu_{x_j=0}$
۱۷/۶۲۶	۱۷/۹۴۷	۱۷/۹۲۵	$Nu_{max,x_j=0}$
۰/۰۳۹	۰/۰۶۷۵	۰/۰۳۷۸	$X_{2 Nu_{max}}$
۰/۸۴۳	۱/۰۱۵	۰/۹۸۹	$Nu_{min,x_j=0}$
۱	۰/۹۸۴	۱	$X_{2 Nu_{min}}$

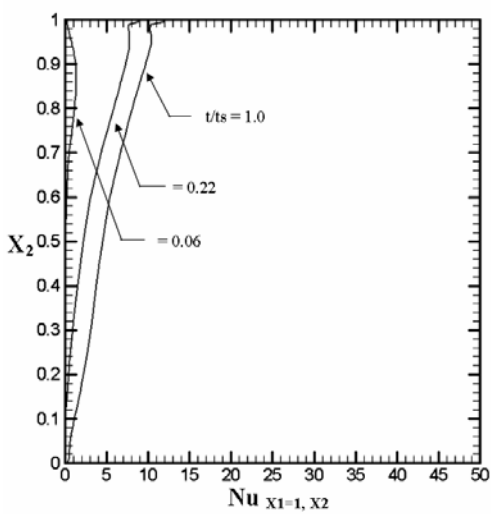
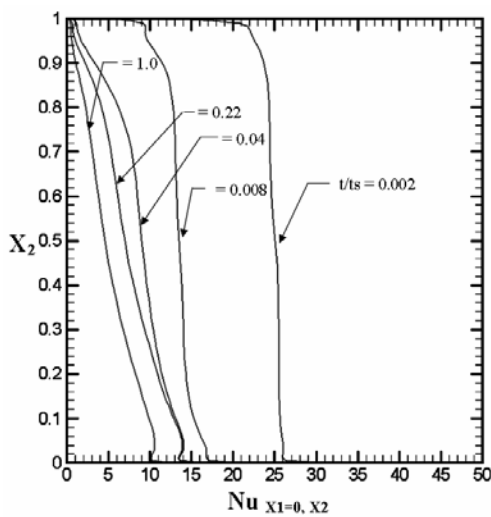
جدول ۲: بررسی شبکه های مختلف برای رایلی  $10^6$ .

متغیر	۲۶*۲۶	۵۱*۵۱	۷۶*۷۶
$\overline{Nu}$	۸/۰۱۵	۸/۸۱۵	۸/۸۳

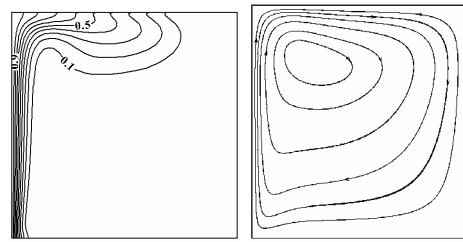
شکلهای (۲) و (۳) نشان دهنده توزیع خطوط همدم و خطوط جریان به ترتیب برای دو عدد رایلی  $10^4$  و  $10^6$  می‌باشند که در چهار زمان مختلف از  $t = 0$  تا لحظه ای که جریان درون محفظه به حالت دائم می‌رسد ( $t_s$ )، داده شده‌اند. این اشکال نشان می‌دهند همانطور که انتظار می‌رود در مراحل اولیه فرآیند انتقال حرارت از طریق هدایت صورت می‌گیرد ولی بعد از گذشت زمان کافی انتقال حرارت جابجایی حاکم می‌شود. شکلهای (۴) و (۶) تغییرات عدد نوسلت محلی  $Nu_{x_j}$  را برای دو دیواره گرم و سرد در دو عدد رایلی  $10^4$  و  $10^6$  نشان می‌دهند. عموماً در مرحله اولیه این پدیده غیردائم، وقتی که انتقال حرارت از طریق هدایت حاکم است، عدد نوسلت بزرگی در طول دیواره گرم ظاهر می‌شود در حالیکه در طول دیواره سرد، عدد نوسلت تقریباً صفر است. با گذشت زمان عدد نوسلت در طول دیواره گرم به سرعت کاهش می‌یابد. در حالی که عدد نوسلت در طول دیواره سرد به صورت تدریجی افزایش می‌یابد. شکلهای (۵) و (۷) نشان دهنده تغییرات عدد نوسلت کلی بر روی دیواره گرم و سرد از زمان شروع پدیده تا زمان پایدار شدن آن برای اعداد رایلی  $10^4$  و  $10^6$  می‌باشد. مقدار عدد نوسلت کلی در طول دیواره گرم، در ابتدا سریعاً کاهش می‌یابد و سپس با گذشت زمان و با حاکم شدن جابجایی آزاد به مقدار ثابتی می‌رسد. عدد نوسلت کلی بر روی دیواره سرد نیز بعد از مدتی نهایتاً به مقدار ثابتی می‌رسد. میزان دقت نتایج به دست آمده و



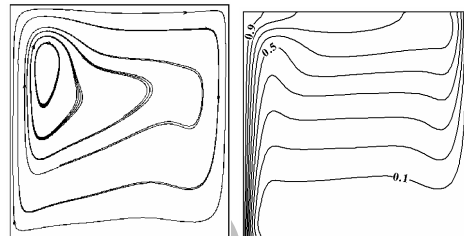
شکل ۵: مقایسه رفتار غیردائم عدد نوسلت کلی برای رایلی  $10^4$  با مرجع [۶].



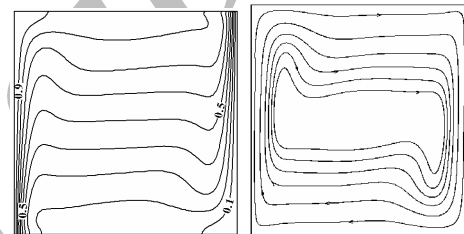
شکل ۶: تغییرات عدد نوسلت موضعی در طول دیواره گرم (بالا) و دیواره سرد (پایین) برای رایلی  $10^4$ .



(ب)  $t = 20$

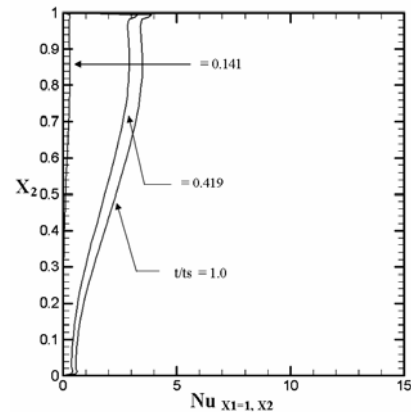
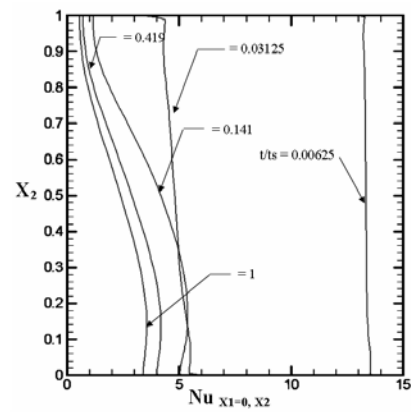


(ج)  $t = 110$



(د)  $t = 500$

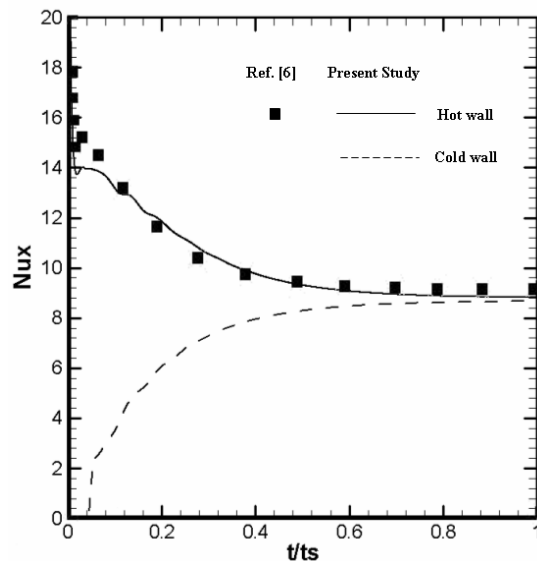
شکل ۳: نحوه تغییرات خطوط همدم (چپ) و خطوط جریان (راست) درون محفظه برای رایلی  $10^6$ .



شکل ۴: تغییرات عدد نوسلت موضعی در طول دیواره گرم (بالا) و دیواره سرد (پایین) برای رایلی  $10^4$ .

لحظه ای که جریان درون محفظه به حالت دائم می‌رسد ( $t_s$ ) داده شده‌اند. در شکل (۹) مشاهده می‌شود که گردابه قسمت قائم تقریباً حاکم بوده و بخشی از قسمت افقی را نیز در بر گرفته است. با توجه به خطوط همدمای که موازات دیواره های همدمای می‌باشند، مشخص می‌شود که در عدد رایلی  $10^4$  انتقال حرارت بین دو دیواره گرم و سرد از طریق هدایت صورت می‌گیرد. این در حالی است که در شکل (۱۰) با توجه به خطوط همدمای که الگوی آن به‌طور کلی با آنچه در شکل (۹) دیده شد متفاوت می‌باشد، انتقال حرارت از طریق جابجایی صورت می‌گیرد. نتایج حاصل با این واقعیت که در اعداد رایلی بالاتر انتقال حرارت از طریق جابجایی آزاد حاکم می‌باشد تطابق دارند. میزان دقت نتایج به‌دست آمده در مقایسه با سایر کارهای تحقیقاتی موجود در شکل‌های (۱۱) و (۱۲) ارزیابی شده است. تغییرات نوسلت موضعی در طول دیواره گرم در شکل (۱۱) برای اعداد رایلی مختلف نشان داده شده‌است. مشاهده می‌شود که در اعداد رایلی کم، نوک تیز منحنی تغییرات نوسلت در گوشه دیواره گرم جایی که خطوط همدمای در نزدیک آن جمع شده‌اند (شکل ۹) واقع شده‌است. در ضمن در رایلی‌های کم، نرخ تغییرات عدد نوسلت به جز در گوشه دیواره گرم بسیار کم می‌باشد که بیانگر انتقال حرارت هدایت می‌باشد. در اعداد رایلی بالا به سبب اثرات جابجایی تغییرات محسوسی در مقدار نوسلت مشاهده می‌شود که این بیانگر شار حرارتی کم و زیاد در نقاط مختلف ناحیه حل می‌باشد.

تغییرات عدد نوسلت میانگین در طول دیواره گرم و سرد نسبت به زمان در شکل (۱۲) نشان داده شده‌است. در ابتدا مقدار نوسلت دیواره گرم به سبب تحمیل ناگهانی دمای بالا به شرایط مرزی، بسیار بزرگ می‌باشد. از سوی دیگر تغییرات مقدار نوسلت دیواره سرد وقتی که دمای اولیه و دیواره سرد یکی می‌باشند، از صفر شروع می‌شود. بعد از گذشت زمان عدد نوسلت دیواره گرم کاهش و عدد نوسلت دیواره سرد افزایش می‌یابند تا به مقدار ثابتی در شرایط دائم برسند. در حالت دائم مقدار میانگین نوسلت دیواره گرم به علت سطح کوچکتر بیشتر از دیواره سرد می‌باشد.



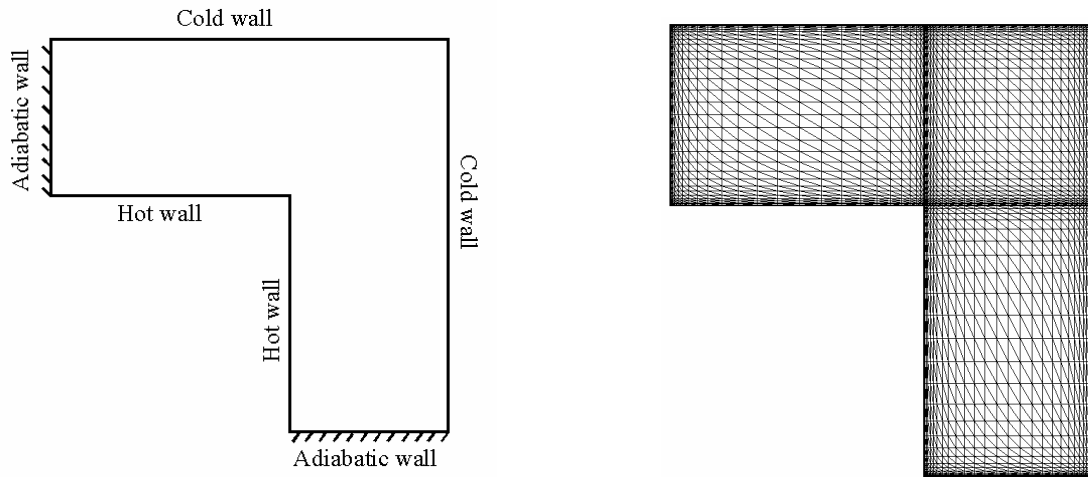
شکل ۷: مقایسه رفتار غیردائم عدد نوسلت کلی برای رایلی  $10^6$  با مرجع [۶].

## ۲- محفظه L شکل

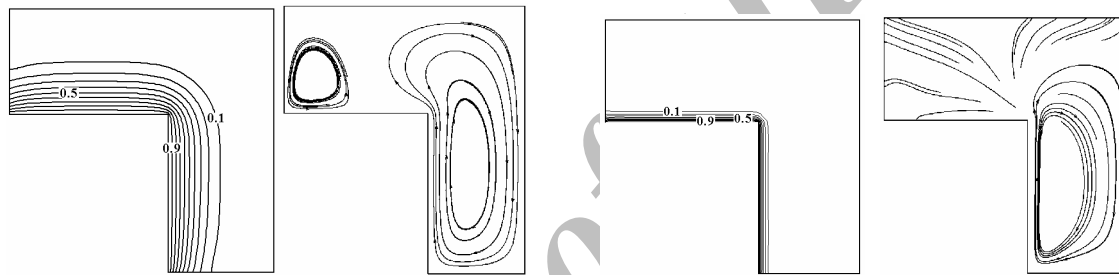
در این قسمت به حل جریان جابجایی آزاد در حالت غیردائم در درون یک محفظه به شکل حرف L پرداخته می‌شود. با توجه به تعداد المانهای لازم در حل محفظه مربعی در این مسأله از یک شبکه با سازمان که دارای  $5400$  المان مثلثی و  $2821$  گره می‌باشد، استفاده شده‌است. به علت حساسیت اضلاع مرزی و نقاط گوشه‌ای، المانها در این نقاط متراکم‌تر هستند. شبکه مورد نظر و شرایط مرزی مسأله در شکل (۸) نشان داده شده‌اند. محفظه شامل دو دیواره آدیاباتیک بوده و دیواره‌های درونی و برونی همدمای می‌باشند. سیال درون محفظه در ابتدا ساکن و دمای آن همدمای دیواره‌های همدمای  $T = 0$  می‌باشد. سپس به‌طور ناگهانی دمای دیواره درونی تا  $T = 1$  بالا برده شده و در همین دما ثابت نگه داشته می‌شود. پدیده غیردائمی که بعد از این لحظه به‌وجود می‌آید، مورد مطالعه قرار می‌گیرد. مسأله برای عدد پرناتل  $Pr = 1$  و دو عدد رایلی  $10^4$  و  $10^6$  حل شده‌است. در اینجا از دو اندازه قدم  $\Delta t = 0.25$  و  $\Delta t = 0.5$  برای دستیابی به دقت لازم در زمان واقعی به ترتیب برای دو عدد رایلی  $10^4$  و  $10^6$  استفاده شده‌است. همچنین طول مدت محاسبات برای دو عدد رایلی  $10^4$  و  $10^6$  بر روی کامپیوتر P4-2.4GHZ به ترتیب  $108$  دقیقه و  $180$  دقیقه بوده‌است.

شکل‌های (۹) و (۱۰) به ترتیب نشان دهنده توزیع خطوط همدمای و خطوط جریان به ترتیب برای دو عدد رایلی  $10^4$  و  $10^6$  می‌باشند که در چهار زمان مختلف از لحظه  $t = 0$  تا



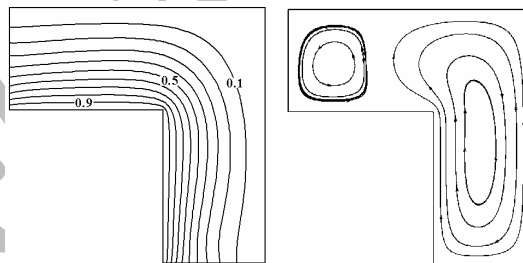


شکل ۸: المان بندی و شرایط مرزی مساله.

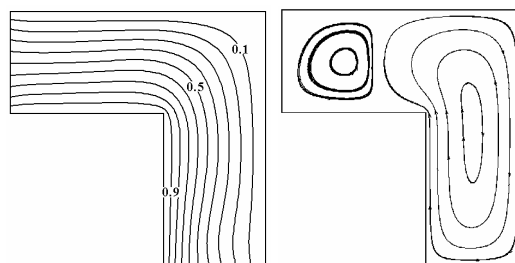


(ب)  $t = 0$

(الف)  $t = 1$

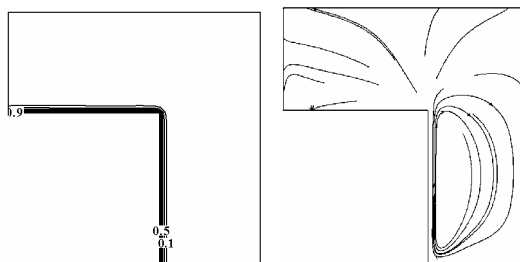


(ج)  $t = 25$

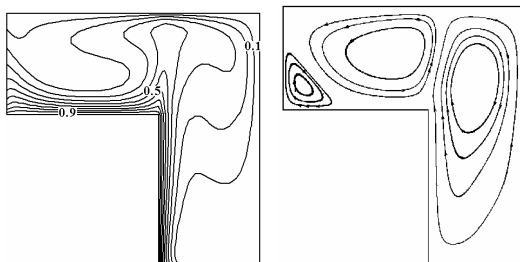


(د)  $t_s = 75$

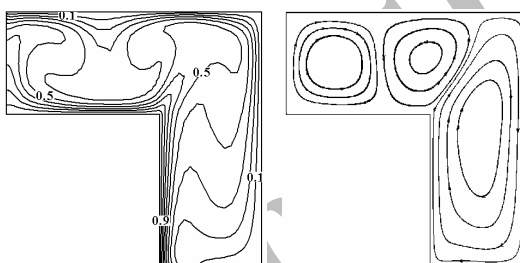
شکل ۹: نحوه تغییرات خطوط همدم (چپ) و خطوط جریان (راست) درون محفظه برای رایلی  $10^4$ .



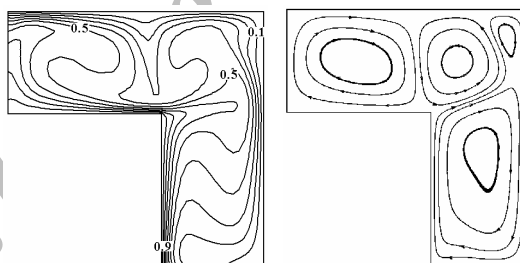
t = ۱ (الف)



t = ۳۵ (ب)

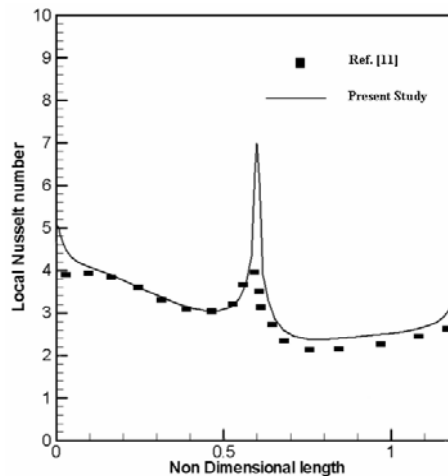
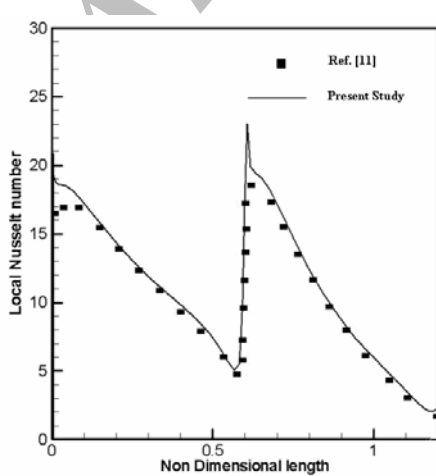


t = ۱۶۰ (ج)



t<sub>s</sub> = ۴۰۰ (د)

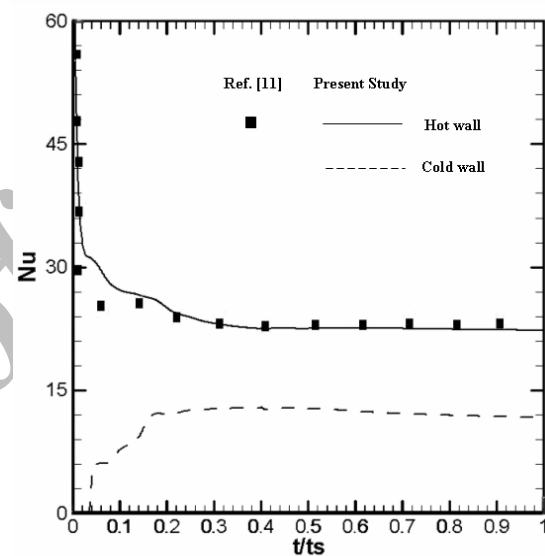
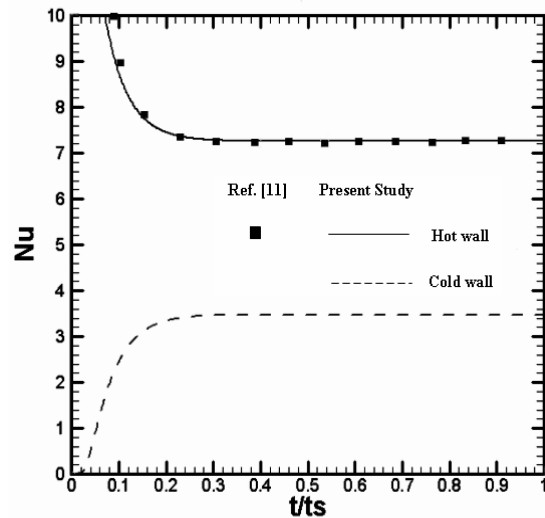
شکل ۱۰: نحوه تغییرات خطوط همدم (چپ) و خطوط جریان (راست) درون محفظه برای رایلی ۱۰<sup>۶</sup>.



شکل ۱۱: مقایسه تغییرات عدد نوسلت موضعی در طول دیواره گرم برای اعداد رایلی ۱۰<sup>۴</sup> (بالا) و ۱۰<sup>۶</sup> (پایین) با مرجع [۱۱].

### نتیجه گیری

در این مقاله نشان داده شده است که با ترکیب روشهای تراکم‌پذیری مجازی و تلفات مجازی جیمسون و بر پایه روش اجزای محدود می‌توان یک روش کارآمد برای حل مسائل جابجایی آزاد غیردائم ارائه نمود. روش مورد استفاده کاملاً صریح بوده و از این‌رو دارای سادگی و سهولت استفاده می‌باشد. به دلیل همین ماهیت روش نیاز به تعداد زیادی تکرار جهت نیل به همگرایی در زمان مجازی دارد که طبعاً می‌تواند زمان محاسبات را به‌طور نامطلوبی افزایش دهد. این مشکل با بهره‌گیری از تکنیکهای پردازش موازی تا حد زیادی قابل رفع می‌باشد. همچنین انتخاب مناسب پارامتر تراکم‌پذیری مجازی  $\beta$  می‌تواند تا حد امکان به تسریع همگرایی در زمان مجازی کمک کند. شایان ذکر است که تعداد سعی و خطا و نحوه انتخاب پارامتر تراکم‌پذیری مجازی به شکل محفظه و مقدار عدد رایلی وابسته می‌باشد. با پیچیده‌شدن شکل هندسی مسأله و زیاد شدن عدد رایلی این مقدار کوچکتر می‌شود. نتایج حاصل از تحلیل مسائل بررسی شده در این مقاله حاکی از دقت مطلوب روش مورد استفاده در محدوده رایلی مورد مطالعه می‌باشد.



شکل ۱۲: مقایسه رفتار غیردائم عدد نوسلت کلی برای اعداد رایلی  $10^4$  (راست) و  $10^6$  (چپ) با مرجع [۱۱].

### مراجع

- 1 - Nicolette, V. F., Yang, K. T. and Lloyd, J. R. (1985). "Transient cooling by natural convection in a two-dimensional square enclosure." *Int. J. Heat Transfer*. Vol. 28, PP.1721-1732.
- 2 - Chorin, A. J. (1968). "Numerical solution of the Navier-Stokes equations." *Math. Comput.*, Vol. 22, PP. 745-762.
- 3 - Patterson, J. and Imberger, J. (1980). "Unsteady natural convection in a rectangular cavity." *J. Fluid Mech.*, Vol. 100, Part 1, PP. 65-86.
- 4 - Khalilollahi, A. and Sammakia, B. (1986). "Unsteady natural convection by a heated surface within an enclosure." *Numer. Heat Transfer*, Vol. 9, PP. 715-730.
- 5 - Ivey, G. N. (1984). "Experiments on transient natural convection in a cavity." *J. Fluid Mech.*, Vol. 144, PP. 389-401.
- 6 - Fu, W., Perng, J. and Shieh, W. (1989). "Transient laminar natural convection in an enclosure partitioned by an adiabatic baffle." *Numerical Heat Transfer, Part A*, Vol. 16, PP.325-350.

- 7 - Kazemzadeh, S., Sadeghipur, M. S. and Nazaktabar, M. (2002). "Natural Convection Heat Transfer from horizontal Cylinders in a vertical array confined between vertical walls." *Journal of Engineering*, Vol. 15, No. 3, PP. 293-302.
- 8 - Aung, W. (1991). *Cooling techniques for computer*. Hemisphere Publishing Corporation, PP. 27-166.
- 9 - Betts, C., Boorman, C. and Sheriff, N. (1983). "Thermal striping in liquid cooled fast breeder reactors." *Proc. 2<sup>nd</sup> Int. Topical Meeting on Nuclear Reactor Thermal Hydraulics*, ANS, PP. 1292-1301.
- 10 - Evren-Selamet, E., Arpaci, V. S. and Borgnakke, C. (1992). "Simulation of laminar buoyancy driven flows in an enclosure." *Numerical Heat Transfer*, Vol. 22, Part A, PP. 401-420.
- 11 - Nithiarasu, P., Sundararajan, T. and Seetharamu, K. N. (1998). "Finite element analysis of transient natural convection in an odd-shaped enclosure." *Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*, Vol. 8, No. 2, PP. 199-216.
- 12 - Chorin, A. J. (1967). "A numerical method for solving incompressible Navier-stokes equations." *J. Comp. Physics*, Vol. 2, PP. 12-26.
- 13 - Markle, C. L. and Athavale, M. (1987). "Time-accurate unsteady incompressible flow algorithm based on artificial compressibility." *AIAA*, PP. 87-1137.
- 14 - Rogers, E. and Kwak, D. (1989). "Numerical solution of the incompressible Navier-stokes equations for steady and time-dependent problems." *AIAA*, PP. 89-1463.
- 15 - Soh, W. Y. and Goodrich, J. W. (1988). "Unsteady solution of incompressible Navier-stokes equations." *J. Comp. Phys.*, Vol. 79, PP. 113-134.
- 16 - Jameson, A., Schmidt, W. and Turkel, E. (1981). "Numerical simulation of the euler equations by the finite volume method using Runge-Kutta time stepping schemes." *AIAA*, PP. 81-1259.
- 17 - Barth, T. (1991). "Numerical Aspects of Computing Viscous High Reynolds Number Flows on Unstructured Meshes." *AIAA*, PP. 91-0721.
- 18 - Manzari, M. T. (1999). "An explicit finite element algorithm for convection heat transfer problems." *Int. J. Numer. Methods Heat & Fluid Fflow*, Vol. 9, No. 8, PP. 860-877.
- 19 - Peraire, J., Peiro, J. and Morgan, K. (1993). "Multigrid solution of the 3-D incompressible flows using unstructured grids." *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. 36, No. 6, PP. 1029-1044.
- 20 - de Val Davis, G. (1983). "Natural convection of air in a square cavity: A Bench mark numerical solution." *Int. J. Numer. Methods Fluids*, Vol. 3, PP. 249-264.

### واژه های انگلیسی به ترتیب استفاده در متن

- |                            |                                  |                 |
|----------------------------|----------------------------------|-----------------|
| 1 - Scale analysis         | 2 - Artificial Incompressibility | 3 - Upwind      |
| 4 - Artificial Dissipation | 5 - Edge-based                   | 6 - Pseudo-time |
| 7 - Weak formulation       | 8 - Lumped mass matrix           |                 |