حل طیفی جریان بالای صوت روی استوانه و کره

وحید اصفهانیان*۱ ، مسعود برومند ۲ و مهدی نجفی
[۱] دانشیار دانشکده مهندسی مکانیک ـ پردیس دانشکده های فنی ـ دانشگاه تهران
[۲] استادیار دانشکده مهندسی هوافضا ـ دانشگاه صنعتی امیرکبیر
[۳] دانش آموخته کارشناسی ارشد دانشکده مهندسی هوافضا ـ دانشگاه صنعتی امیرکبیر

(تاریخ دریافت ۸۲/۴/۴، تاریخ دریافت روایت اصلاح شده ۸۴/۶/۳۰، تاریخ تصویب ۸۴/۱۱/۱۵)

چکیده

حل جریان بالای صوت همراه با موج ضربه‌ای با استفاده از روشهای طیفی در این مقاله مورد بررسی قرار می‌گیرد. با توجه به آنکه روشهای طیفی از مشتق‌گیری کلی در میدان استفاده می‌کنند، وجود ناپیوستگی در خواص جریان سبب بروز پدیده گیبس شده، به رشد خطاها و در نهایت از دست دادن دقت طیفی منجر می‌شوند. برای رفع چنین مشکلی از برازش موج ضربه‌ای به‌صورت یک مرز در میدان بهره گرفته می‌شود. در این بین اعمال شرایط مرزی به‌دلیل ناچیز بودن استهلاک ذاتی روشهای طیفی برخلاف روشهای اختلاف محدود رایج، نیازمند نگاه دقیق‌تری بوده که به آن پرداخته می‌شود. در نهایت معادلات اویلر به روش طیفی هم‌مکانی چبیشف برای جریان بالای صوت روی استوانه و کره که همراه موج ضربه‌ای کمانی است، حل و جوابها با نتایج دیگر محققان مقایسه و دستیابی به دقت طیفی مورد مطالعه واقع می‌گردد.

واژه های کلیدی: روش طیفی، برازش موج ضربه‌ای، دقت طیفی، جریان بالای صوت، استوانه و کره

مقدمه

کاربرد روشهای طیفی در حل جریانهای تراکم‌پذیر چندبعدی به دو دهه پیش باز می‌گردد و اولین مقالات در این زمینه تنها امکان‌پذیر بودن آن را نشان می‌دهند. روشهای طیفی به جهت ارائه جوابهای دارای دقت زیاد که در مسائل تراکم‌ناپذیر متعددی از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است، به‌کار گرفته شدند تا به پیشبرد درک فیزیکی مسائل جریانهای تراکم‌پذیر منجر شوند. این دقت بالا که در روشهای اختلاف محدود با تعداد نقاط شبکه زیاد بسختی به‌دست می‌آید، در این روشها براحتی با تعداد نقاط بسیار اندکی قابل تحصیل است [۱]. کاهش نمایی خطا با افزایش تعداد نقاط چنین ویژگی منحصر بفردی را به روشهای طیفی می‌بخشد.

همچنین استهلاک عددی بسیار ناچیز روشهای مرتبه بالا (نظیر طیفی) امکان دستیابی به جوابهای عاری از هرگونه آثار استهلاک مجازی مانند هموارسازی[۱] را فراهم می‌سازد. البته این امر سبب بروز دشواری در اعمال چنین روشهایی به مسائلی که دارای ناپیوستگی می‌باشند، می‌گردد؛ چرا که مشتق‌گیری طیفی از یک شکستگی یا ناپیوستگی (مانند پله) نیازمند در نظر گرفتن بی‌نهایت جمله در عبارت تقریب طیفی می‌باشد؛ که از نظر محاسباتی غیرعملی است. از طرفی تقریبهای طیفی شامل تعداد جملات محدود سبب بروز پدیده گیبس[۲] و ناپایداری عددی می‌گردند. بدین جهت مدتها از روشهای طیفی خالص برای حل چنین مسائلی استفاده نمی‌شد.

برای رفع چنین مشکلی و توسعه کاربرد روشهای طیفی در دینامیک سیالات از روش برازش ناپیوستگی که در طی آن میدان فیزیکی توسط مرز نامشخص ناپیوستگی محدود می‌شود، استفاده گردید. این فرایند با یک حدس اولیه برای مرز ناپیوستگی شروع و در طی دستیابی به جوابها آن قدر تصحیح می‌شود تا مرز ناپیوستگی واقعی را به‌دست دهد. اولین بار حسینی و همکارانش [۲] و یاسوهارا و همکارانش [۳] با استفاده از روش طیفی همراه با چنین ترفندی، به حل مسأله جریان مافوق صوت روی استوانه و کره پرداختند و نشان دادند که استفاده از برازش ناپیوستگی در روشهای طیفی بسادگی آنچه مورتی و همکارش [۴] برای نخستین بار در روشهای اختلاف محدود[۳] عنوان داشته‌اند، نمی‌باشد. چرا که فرایند برازش موج ضربه‌ای منتج از روش مورتی و همکارش [۴] سبب

* نویسنده مسئول : تلفن: ۶۱۱۱۴۰۳۱ ، فاکس : ۸۸۰۱۳۰۲۹ ، Email: evahid@ut.ac.ir

بروز ناپایداری عددی در روشهای طیفی می‌گردد. برای رفع چنین مشکلی حسینی و همکارانش [۲] از پالایه‌ها[۴] استفاده کردند. این کار سبب گرفتار شدن روش عددی در مشکلات ناخواسته دیگری نظیر وارد شدن محدودیتهای شدید در پایداری (لزوم استفاده از اعداد $\mathrm{CFL} < 0.2$)، حذف شدن اطلاعات با بسامد زیاد (به‌دلیل عملکردن پالایه‌ها بمانند استهلاک مصنوعی) سپس کاهش دقت نهایی روش و در نهایت افزایش چشمگیر حجم محاسبات، گردید. در حل جریان مافوق صوت روی کره با شبکه (۹×۹)، پس از گذشت ۲۰۰۰ گام زمانی حسینی و همکارانش [۲] فقط توانستند فشار سکون را با دقت سه یا چهار رقم اعشار به‌دست آورند. همچنین یاسوهارا و همکارانش [۳] نیز رضایت چندانی از همگرایی روش به حالت پایا اعلام نداشتند.

بنابراین استفاده از روش برازش موج ضربه‌ای در روشهای طیفی غیرممکن به نظر می‌آمد تا آنکه کوپریوا و همکارانش [۵] در سال ۱۹۹۱ میلادی با ارائه روش برازش کاملتری امکان استفاده از روشهای طیفی به همراه برازش موج ضربه‌ای را از به‌کارگیری معادلات اویلر با متغیرهای اساسی لگاریتم فشار، سرعت و آنتروپی، فراهم نمودند و علت عدم دستیابی دیگر محققان تا آن زمان به جوابهای دقیق و مطلوب را، عدم استفاده از مشتق سرعت پشت موج ضربه‌ای اعلام کردند.

بدین ترتیب با استفاده صحیح از هر دو مشتق فشار و سرعت پشت موج ضربه‌ای در فرایند برازش به حل طیفی بسیار خوبی که انتظارها از یک حل طیفی را برآورده می‌ساخت، دست یافته شد. در این مقاله با استفاده از شکل معمول معادلات اویلر در صورت غیربقایی (با متغیرهای اساسی چگالی، سرعتها و فشار) به حل مسأله جریان بالای صوت حول استوانه و کره با استفاده از روش طیفی هم‌مکانی مبتنی بر چندجمله‌ایهای چبیشف پرداخته می‌شود. در نهایت نتایج به‌دست آمده با نتایج دیگر محققین مقایسه شده و موارد بهبود یافته در این روش نسبت به محققین دیگر اشاره خواهد شد.

هندسه میدان جریان

میدان جریان حول کره (یا استوانه) شامل چهار مرز محور تقارن (محور افقی)، بدنه، موج ضربه‌ای و مرز انتهایی است (شکل ۱). به‌منظور پیاده‌سازی روش ابتدا شبکه الگو گرفته از بدنه به‌صورت زیر در دستگاه دکارتی (x,y) تولید می‌شود:

$$\begin{cases} x = x_b(s) + r \quad (\hat{e}_r \cdot \hat{e}_x) \\ y = y_b(s) + r \quad (\hat{e}_r \cdot \hat{e}_y) \end{cases} \tag{۱}$$

که در آن $x_b(s)$ و $y_b(s)$ مختصات بدنه برحسب شاخص طول قوس s ، و فاصله عمودی از بدنه r، هستند. همچنین بردار $\hat{e}_r$ قائم بر بدنه می‌باشد؛ که به جهت ساده‌تر شدن محاسبات، حرکت موج ضربه‌ای فقط در این راستا در نظر گرفته می‌شود. اما از آنجا که در روشهای طیفی شبکه عددی از روابط گوسی[۵] به‌دست می‌آیند، نیاز به انجام انتقال دیگری نیز می‌باشد که در طی آن دستگاه مختصات (s,r,t) به دستگاه مختصات محاسباتی (ξ,η,t) انتقال یابد. بنابراین:

$$\begin{cases} s = s_{max} \dfrac{1+\xi}{2} \\ r = r_{sh}(s,t) \dfrac{1+\eta}{2} \end{cases} \tag{۲}$$

که در آن s_{max} بیشینه طول قوس بدنه بوده و $r_{sh}(s,t)$ فاصله موج ضربه‌ای تا بدنه می‌باشد (که تابعی از زمان فرض شده است تا با پیشرفت حل تغییر یافته و مقدار حقیقی خود برسد). اما دستگاه مختصات محاسباتی توسط رابطه معروف چبیشف ـ گوس ـ لوباتو[۶] بیان می‌شود:

$$\begin{cases} \xi_j = \cos\dfrac{\pi j}{N_x} \;, \quad j = 0,1,\ldots,N_x \\ \eta_j = \cos\dfrac{\pi j}{N_y} \;, \quad j = 0,1,\ldots,N_y \end{cases} \tag{۳}$$

و N_x و N_y معرف درجه چندجمله‌ای به‌کار رفته در جهت x و y می‌باشند.

معادلات حاکم

با صرفنظر از اثرات لزجت، دستگاه معادلات دیفرانسیل غیرخطی اویلر بر چنین مسأله‌ای حاکم است؛ که در شکل دوبعدی و متقارن محوری در میدان محاسباتی (ξ,η,t) به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + A\frac{\partial Q}{\partial \xi} + B\frac{\partial Q}{\partial \eta} + \alpha\frac{v}{y}H = 0 \tag{۴}$$

که در آن

$$Q=\begin{bmatrix}\rho & u & v & p\end{bmatrix}^T,$$
$$H=\begin{bmatrix}\rho & 0 & 0 & \gamma p\end{bmatrix}^T,$$

$$A=\begin{bmatrix}U & \rho\xi_x & \rho\xi_y & 0\\ 0 & U & 0 & \dfrac{1}{\rho}\xi_x\\ 0 & 0 & U & \dfrac{1}{\rho}\xi_y\\ 0 & \gamma p\xi_x & \gamma p\xi_y & U\end{bmatrix},$$
$$B=\begin{bmatrix}V & \rho\eta_x & \rho\eta_y & 0\\ 0 & V & 0 & \dfrac{1}{\rho}\eta_x\\ 0 & 0 & V & \dfrac{1}{\rho}\eta_y\\ 0 & \gamma p\eta_x & \gamma p\eta_y & V\end{bmatrix}$$

(۵)

همچنین

$$U=\xi_t+u\xi_x+v\xi_y, V=\eta_t+u\eta_x+v\eta_y$$

(۶)

مؤلفه‌های سرعت پادوردا[7] بوده و γ نسبت ضرایب گرمایی ویژه است. این دستگاه معادلات با $\alpha=0$ معرف معادلات دوبعدی و $\alpha=1$ بیانگر معادلات متقارن محوری است. کمیتهای بدون بعد ρ، u ، vو p ، به‌ترتیب چگالی، مؤلفه افقی و قائم سرعت و فشار می‌باشند؛ که از بی‌بعدسازی کمیتهای بعددار $(*)$ با خواص جریان آزاد (∞) به‌صورت زیر هستند:

$$u=u^*\frac{\sqrt{\gamma}}{a_\infty},\ v=v^*\frac{\sqrt{\gamma}}{a_\infty},\ a=a^*\frac{\sqrt{\gamma}}{a_\infty},$$
$$\rho=\frac{\rho^*}{\rho_\infty},\ p=\frac{p^*}{p_\infty}$$

(۷)

که در آن $a_\infty=\sqrt{\gamma p_\infty/\rho_\infty}$ سرعت صوت در جریان آزاد می‌باشد. همچنین مکان و زمان بی‌بعد شده نیز به‌صورت زیر می‌باشند:

$$x=\frac{x^*}{L},\ y=\frac{y^*}{L},\ t=\frac{t^*}{L}\frac{a_\infty}{\sqrt{\gamma}}$$

(۷)

که در آن L طول مرجع و برابر شعاع مقطع هندسه مورد نظر انتخاب می‌گردد.

گسسته‌سازی طیفی هم‌مکانی

روشهای اختلاف محدود مشتقات یک تابع را توسط عبارتهای محلی[8] تقریب می‌زنند. مانند:

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x}=\frac{u(x+\Delta x)-u(x-\Delta x)}{2\Delta x}$$

این روشها برای چندجمله‌ایهای مرتبه پایین تقریبهای خوبی به‌دست می‌دهند. این رفتار منطقی به نظر می‌رسد چرا که مشتق، یک خاصیت محلی تابع بوده و بنابراین نیازی به استفاده از مقادیر مختلف تابع در نقاط دورتر از نقطه مورد نظر در محاسبه مشتق در آن نقطه، احساس نمی‌شود. اما این کار سبب کاهش دقت عملیات مشتق‌گیری می‌شود. در حالی که عبارت مشتق در روشهای طیفی کلی[9] است. راه معمول این روشها با تعریف تابع تقریب به‌صورت حاصل جمع توابع بنیادی بسیار هموار آغاز می‌شود. مانند:

$$u(x)=\sum_{k=0}^{N}a_k\phi_k(x)$$

(۸)

که در آن $\phi_k(x)$ توابع چندجمله‌ای یا مثلثاتی می‌باشند و مشتق $u(x)$ از مشتق‌گیری این توابع به‌دست می‌آید. اما فرآیند مشتق‌گیری را می‌توان برای تعداد مشخصی از نقاط به شکل ماتریسی نیز اعمال کرد:

$$(D_Nu)(x_j)=\sum_{j=0}^{N}(D_N)_{ij}u(x_j)$$

(۹)

مقادیر $(D_N)_{ij}$ مطابق مرجع [۱] برای نقاط معمول گوس-لوباتو[10] عبارتند از:

$$(D_N)_{ij}=\begin{cases}\dfrac{\bar{c}_i}{\bar{c}_j}\dfrac{(-1)^{i+j}}{x_i-x_j} & i\neq j\\ \dfrac{-x_j}{2(1-x_j^2)} & 1\le i=j\le N-1\\ \dfrac{2N^2+1}{6} & i=j=0\\ -\dfrac{2N^2+1}{6} & i=j=N\end{cases}$$

(۱۰)

که در آن

$$\bar{c}_j=\begin{cases}2\ , & j=0,N\\ 1\ , & 1\le j\le N-1\end{cases}$$

(۱۱)

است. در حالت دوبعدی (x,y) این ماتریس مشتق‌گیری در دو جهت مطرح می‌شود. اگر در جهت x، M_x نقطه و در جهت y، M_y نقطه وجود داشته باشد، آنگاه ماتریس‌های مشتق‌گیری به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$D_x = I_{(M_y \times M_y)} \otimes D_{(M_x \times M_x)}$$
(۱۲)

$$D_y = D_{(M_y \times M_y)} \otimes I_{(M_x \times M_x)}$$
(۱۳)

که در آن I ماتریس واحد و $\otimes$ عملگر حاصلضرب تانسوری کرونکر[11] به‌صورت زیر است:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & 2a & 2b \\ c & d & 2c & 2d \\ 3a & 3b & 4a & 4b \\ 3c & 3d & 4c & 4d \end{pmatrix}$$
(۱۴)

حال در دستگاه (۴) مشتقات مکانی توسط حاصلضرب ماتریس مشتق‌گیری طیفی در بردار کمیت مربوطه روی نقاط شبکه، به‌صورت فوق جایگزین شده و یک دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی حاصل می‌شود.

شرایط مرزی

اعمال شرایط مرزی در روشهای طیفی بسادگی روشهای اختلاف محدود نمی‌باشد و هرگونه اعمال اضافی[12] سبب بروز ناپایداری عددی می‌گردد [۱]. بنابراین اعمال شرایط مرزی در چهار مرز حاضر در میدان فیزیکی به تشریح دقیق نیاز دارد.

محور تقارن

شرایط مرزی روی محور تقارن، از تقارن هندسی و فیزیکی میدان جریان نسبت به محور x حاصل می‌شوند. از تقارن هندسی و فیزیکی می‌توان گفت: روی محور تقارن سرعت در راستای قائم صفر است؛ بعلاوه (از آنجا که میان تمامی متغیرها در بالا و پایین محور تقارن تناظر یک به یک برقرار است)، روی این مرز مشتق بقیه کمیتهای اصلی، در جهت y، صفر هستند. یعنی:

$$v = 0,\ \frac{\partial \rho}{\partial y} = 0,\ \frac{\partial u}{\partial y} = 0,\ \frac{\partial p}{\partial y} = 0$$
(۱۵)

اما آزمایشهای عددی بیان داشته‌اند که استفاده از چنین شرایطی برای محور تقارن سبب بروز ناپایداری در توزیع چگالی روی این محور می‌گردد و باعث کند شدن شدید روند همگرایی روش و حتی (گاهی اوقات) واگرایی آن می‌شود. البته ناپایداری مذکور بشدت به شرایط اولیه وابسته است. علت این امر نیز طبیعی به نظر می‌رسد؛ چرا که متغیرهای چگالی، سرعت افقی و فشار از صفر قرار دادن مشتق آنها در جهت y به‌دست آمده و معادلات حاکم هیچ گونه نقشی در آنها ندارند. در حالی که روی این محور یک تراکم آیزنتروپیک رخ می‌دهد و با تغییرات اندک چگالی همراه است. بنابراین یکی از متغیرها را می‌بایست به نحوی از طریق معادلات حاکم به اطلاعات میدان مرتبط نمود. برای این منظور باید به این نکته توجه داشت که محور تقارن خود یکی از خطوط جریان سیال است و در جریان غیرلزج آنتروپی روی خطوط جریان ثابت است. به عبارت دیگر آنتروپی روی خطوط جریان منتقل می‌گردد. از طرفی معادله انرژی در یک جریان غیرلزج آیزنتروپیک برحسب آنتروپی به‌صورت زیر قابل بیان است:

$$\frac{\partial \boldsymbol{s}}{\partial t} + u\frac{\partial \boldsymbol{s}}{\partial x} + v\frac{\partial \boldsymbol{s}}{\partial y} = 0$$
(۱۶)

که با صفر بودن مؤلفه سرعت در جهت قائم روی محور تقارن به شکل زیر در می‌آید:

$$\frac{\partial \boldsymbol{s}}{\partial t} + u\frac{\partial \boldsymbol{s}}{\partial x} = 0$$
(۱۷)

از طرفی بلافاصله بعد از موج ضربه‌ای، خواص جریان را می‌توان از روابط رانکین-هاگونیوت[13] به‌دست آورد که در این صورت مقدار آنتروپی در طول محور تقارن با مقدار آن در محل تلاقی موج ضربه‌ای و محور مذکور برابر خواهد بود. لذا روی محور تقارن

$$\frac{\partial \boldsymbol{s}}{\partial x} = 0$$
(۱۸)

خواهد بود و با استفاده از رابطه آنتروپی، $\boldsymbol{s} = p / \rho^{\gamma}$ می‌توان آخرین مجهول (چگالی) را نیز به‌دست آورد.

از طرفی شرایط (۱۵) نشان دهنده یک شرط از نوع دیریکله[14] و سه شرط از نوع نیومن[15] می‌باشند. نحوه اعمال شرط دیریکله در روشهای طیفی هم‌مکانی مانند روشهای اختلاف محدود، اعمال مستقیم مقدار داده شده کمیت مورد نظر می‌باشد. در اعمال شرط نیومن از دو روش می‌توان بهره گرفت. در روش اول از رابطه مشتق‌گیری (۹) استفاده نموده و مقدار عددی متغیر از

مقدار مشتق در نقطه مورد نظر به‌دست می‌آید. در روش دوم مقدار مشتق توسط یک تابع جریمه در حل وارد می‌شود [۶]. روش دوم به‌دلیل ماهیتی که دارد سبب کند شدن روند همگرایی می‌شود؛ لذا در این تحقیق از روش اول استفاده می‌شود. به عنوان نمونه نحوه اعمال شرط نیومن برای متغیر سرعت تشریح می‌گردد.

پس از انتقال به میدان محاسباتی شرط مذکور به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{\partial u}{\partial y}=0 \;\Rightarrow\; \xi_y\frac{\partial u}{\partial \xi}+\eta_y\frac{\partial u}{\partial \eta}=0 \tag{۱۹}$$

از طرفی عملیات مشتق‌گیری به‌صورت ضرب ماتریسی انجام می‌پذیرد؛ به عبارت دیگر برای شبکه محاسباتی با N_x+1 و N_y+1 نقطه به‌ترتیب در جهت های x و y و در کل $N=(N_x+1)(N_y+1)$ نقطه مشتق‌گیری به‌صورت

$$\left[\frac{\partial u}{\partial \xi}\right]_{(N\times1)}=[D_\xi]_{(N\times N)}\times[u]_{(N\times1)}$$

$$\left[\frac{\partial u}{\partial \eta}\right]_{(N\times1)}=[D_\eta]_{(N\times N)}\times[u]_{(N\times1)}$$

خواهد بود؛ که در آن $\left[D_\xi\right]$ و $\left[D_\eta\right]$ به‌ترتیب ماتریس‌های مشتق‌گیری نسبت به مختصه ξ و η هستند. لذا در نقطه‌ای مانند j،

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_j=\left[\xi_y\frac{\partial u}{\partial \xi}+\eta_y\frac{\partial u}{\partial \eta}\right]_j=$$
$$\sum_{k=0}^{N-1}\Big(\xi_y\big|_j[D_\xi]_{j,k}+\eta_y\big|_j[D_\eta]_{j,k}\Big)[u]_k=0 \tag{۲۰}$$

که از آنجا

$$[u]_j=$$
$$\frac{-\sum\limits_{k=0,\;k\neq j}^{N-1}\Big(\xi_y\big|_j[D_\xi]_{j,k}+\eta_y\big|_j[D_\eta]_{j,k}\Big)[u]_k}{\Big(\xi_y\big|_j[D_\xi]_{j,j}+\eta_y\big|_j[D_\eta]_{j,j}\Big)} \tag{۲۱}$$

بنابراین مقادیر متغیرهای اساسی روی این مرز بدین صورت به‌دست می‌آیند.

مرز بدنه

این مرز به‌دلیل نفوذناپذیری بیانگر صفر بودن مؤلفهٔ سرعت در جهت عمود بر بدنه است. بنابراین چگالی، سرعت مماسی و فشار می‌بایست با استفاده از روابط سازگاری محاسبه شوند. برای چنین مرزی، شرط مذکور عبارت است از:

$$\vec{u}\cdot\hat{e}_r=u\eta_x+v\eta_y=0 \tag{۲۲}$$

این رابطه به تنهایی قادر به ارائه تمام مجهولات روی مرز نمی‌باشد. با توجه به آنکه مرز بدنه در مسأله مورد نظر به خط $\eta=-1$ نسبت داده شده است، در نتیجه روابط سازگاری مورد نیاز برای نقاط روی مرز بدنه از ضرب ماتریس زیر (که بردارهای ویژه چپ ماتریس B که دارای مقادیر ویژه مثبت بوده و از داخل میدان به طرف مرز انتقال اطلاعات می‌دهند، هستند) از سمت چپ در دستگاه معادلات حاکم (۴) حاصل می‌گردد؛ که عبارت است از:

$$\begin{bmatrix} a^2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -\eta_y & \eta_x & 0 \\ 0 & \eta_x & \eta_y & \dfrac{\sqrt{\eta_x^2+\eta_y^2}}{\rho a} \end{bmatrix} \tag{۲۳}$$

بنابراین با استفاده از چهار معادله (یکی شرط مماس بودن سرعت روی بدنه و سه رابطه سازگاری) مقادیر مجهول روی این مرز محاسبه می‌شوند.

موج ضربه‌ای متحرک

نحوهٔ اعمال وجود موج ضربه‌ای کمانی در میدان جریان و آثار آن، در این تحقیق به‌صورت برازشی شبیه‌سازی می‌شود. لذا در ابتدا از حدس اولیه‌ای برای تابع $r_{sh}(s,t)$ (تابع مکان موج) استفاده شده و پس از پایان هر مرحله از حل عددی، دوباره سرعت و مکان موج تعیین می‌گردند. این عملیات تا رسیدن به یک حالت پایا ادامه می‌یابد.

در گذر از موج ضربه‌ای برخی خواص جریان به‌طور جهشی (پله ای) تغییر می‌کنند. چنین تغییری در چگالی، سرعت قائم بر موج و فشار صورت می‌پذیرد؛ در حالی که خواصی نظیر سرعت مماسی، دمای سکون، آنتالپی سکون ثابت باقی خواهند ماند. اما برای تعیین خواص جریان بعد از موج ضربه‌ای از روابط رانکین-هاگونیوت به‌صورت زیر استفاده می‌شود:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1}=\frac{\delta_1}{\delta_2} \tag{۲۴}$$

$$\vec{u}_2 \cdot \vec{T}_s = \vec{u}_1 \cdot \vec{T}_s \tag{۲۵}$$

$$\delta_2 = \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\delta_1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1}\frac{p_1}{\rho_1\delta_1} \tag{۲۶}$$

$$p_2 = \frac{2}{\gamma+1}\left(\rho_1\delta_1^2 - \frac{\gamma-1}{2}p_1\right) \tag{۲۷}$$

که در آن

$$\delta_i = (\vec{u}_i - \vec{u}_{sh}) \cdot \vec{N}_s \tag{۲۸}$$

سرعت نسبی قائم سیال نسبت به موج ضربه‌ای است. همچنین $\vec{u}_{sh} = (\dot{x}_{sh}, \dot{y}_{sh})$ سرعت حرکت ناپیوستگی[۱۶] است و بردار عمود بر منحنی آن $\vec{N}_s = (N_{s,x}, N_{s,y})$، از سمت پرفشار به سمت کم‌فشار اشاره می‌کند. این بردار و تغییرات زمانی آن از رابطه $\vec{N}_s = \vec{\nabla} r_{sh}(x,y,t)$ به‌دست می‌آید.
از طرفی به جهت ساده‌تر شدن عملیات مورد نیاز برای تولید مجدد شبکه، محاسبه توابع فاصله و دیگر کمیتهای میدان فیزیکی، حرکت مرز ناپیوستگی فقط در راستای خطوط شبکه عمود بر بدنه انجام می‌پذیرد. بنابراین بردار سرعت موج ضربه‌ای در راستای قائم به‌صورت

$$\vec{u}_{sh} = u_{sh}\hat{e}_\eta \tag{۲۹}$$

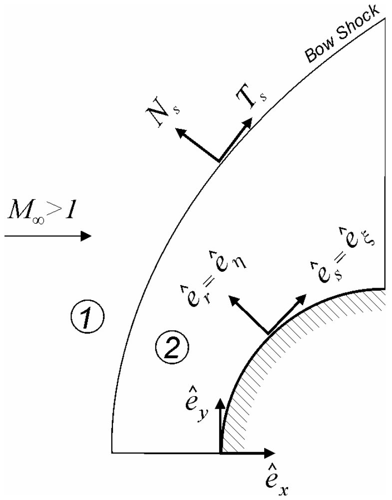
است. از طرفی با توجه به شکل (۱) سرعت موج ضربه‌ای به‌صورت

$$u_{sh} = \frac{\partial r_{sh}}{\partial t} \tag{۳۰}$$

نیز بیان می‌شود. همچنین بردار مماس بر منحنی موج ضربه‌ای $\vec{T}_s$ برحسب مؤلفه‌های بردار قائم بر همان منحنی $N_{s,x}$ و $N_{s,y}$ به‌صورت $\vec{T}_s = (-N_{s,y}, N_{s,x})$ می‌باشد و رابطه (۲۶) این گونه خواهد شد:

$$u_2 N_{s,y} - v_2 N_{s,x} = u_1 N_{s,y} - v_1 N_{s,x} \tag{۳۱}$$

بنابراین مجهولات سمت پرفشار (که با زیرنویس 2 مشخص می‌شوند) عبارتند از ρ_2، u_2، v_2 و p_2 که با تعیین مقدار سرعت موج ضربه‌ای u_{sh}، قابل محاسبه هستند. اما برای محاسبه سرعت نیاز به استفاده از رابطه دیگری می‌باشد.



شکل ۱: هندسه و میدان جریان بالای صوت حول استوانه یا کره.

از دیدگاه تئوری مشخصه‌ها، جریان در راستای عمود بر موج ضربه‌ای ساکن زیرصوت است. بنابراین با آنکه وقتی جریان بعد از موج ضربه‌ای مایل مافوق صوت است و از لحاظ عملی هیچ اغتشاشی به سمت بالادست (موج ضربه‌ای مایل) منتقل نمی‌شود، اما یکی از موجهای صوتی[۱۷] متناسب با مقدار ویژه $(|\vec{u}| + a)$ از جریان زیرصوت بعد از موج ضربه‌ای به سمت آن حرکت می‌کند؛ که صرفنظر کردن از آن در روشهایی که مشتق‌گیری‌های کلی دارند، سبب ناپایداری حل می‌شود (برخلاف روشهای اختلاف محدود) [۵]. برای رفع این ناپایداری و داخل نمودن اثرات حرکت موج مذکور به سمت موج ضربه‌ای از رابطه سازگاری مناسبی می‌بایست استفاده شود. این رابطه همان رابطه سازگاری مربوط موجی است که به سمت موج ضربه‌ای حرکت می‌کند. از آنجا که موج ضربه‌ای در شبکه محاسباتی به خط $\eta = 1$ نسبت داده شده است، بنابراین رابطه سازگاری مورد نظر در جهت η نوشته می‌شود. به‌منظور ساده‌تر شدن نگارش اگر دستگاه معادلات حاکم به‌صورت مختصر زیر نمایش داده شود:

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}\rho\\ u\\ v\\ p\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}R_\rho\\ R_u\\ R_v\\ R_p\end{pmatrix} \tag{۳۲}$$

آنگاه رابطه سازگاری مورد نظر از ضرب بردار زیر در دستگاه فوق حاصل می‌گردد:

$$\begin{bmatrix}0 & N_{s,x}\rho_2 a_2 & N_{s,y}\rho_2 a_2 & 1\end{bmatrix} \tag{۳۳}$$

که در آن از مشتقات زمانی سرعتها و فشار استفاده شده است و می‌بایست از روابط رانکین-هاگونیوت عبارتهای مناسبی به‌جای آنها جایگزین نمود. بنابراین، رابطه سازگاری به‌صورت خلاصه زیر ارائه می‌گردد:

$$\frac{\partial p_2}{\partial t}+\rho_2 a_2\left(N_{s,x}\frac{\partial u_2}{\partial t}+N_{s,y}\frac{\partial v_2}{\partial t}\right)= R_p+\rho_2 a_2(N_{s,x}R_u+N_{s,y}R_v)=R \tag{۳۴}$$

که با نمایش سرعتها به‌صورت بردار $\vec{u}=(u,v)$، در رابطه بالا

$$\frac{\partial p_2}{\partial t}+\rho_2 a_2\left(\frac{\partial \vec{u}_2}{\partial t}\cdot\overrightarrow{N}_s\right)=R \tag{۳۵}$$

خواهد بود. از طرفی

$$\vec{u}_2\cdot\overrightarrow{N}_s=\delta_2+u_{sh}\hat{e}_\eta\cdot\overrightarrow{N}_s \tag{۳۶}$$

است و چون $\hat{e}_\eta$ نسبت به زمان ثابت در نظر گرفته می‌شود:

$$\frac{\partial \vec{u}_2}{\partial t}\cdot\overrightarrow{N}_s=\frac{\partial}{\partial t}(\vec{u}_2\cdot\overrightarrow{N}_s)-\vec{u}_2\cdot\frac{\partial \overrightarrow{N}_s}{\partial t}= \dot{\delta}_2+\dot{u}_{sh}(\hat{e}_\eta\cdot\overrightarrow{N}_s)+(u_{sh}\hat{e}_\eta-\vec{u}_2)\cdot\frac{\partial \overrightarrow{N}_s}{\partial t} \tag{۳۷}$$

و با جایگزینی در رابطه (۳۵)

$$R=\dot{p}_2+\rho_2 a_2\left(\dot{\delta}_2+\dot{u}_{sh}(\hat{e}_\eta\cdot\overrightarrow{N}_s)+(u_{sh}\hat{e}_\eta-\vec{u}_2)\cdot\frac{\partial \overrightarrow{N}_s}{\partial t}\right) \tag{۳۸}$$

خواهد بود. حال کافی است از تغییرات زمانی روابط رانکین-هاگونیوت (مانند سرعت نسبی قائم $\dot{\delta}_2$ و فشار $\dot{p}_2$)، بهره گرفت و در رابطه (۳۸) قرار داد.

بدین منظور در اینجا از روابط (۲۶) و (۲۷) نسبت به زمان مشتق گرفته می‌شود. برای دستیابی به روابط کلی‌تر تغییرات زمانی خواص بالادست با زمان نیز در نظر گرفته می‌شود؛ یعنی

$$\begin{pmatrix}\dot{\delta}_2\\ \dot{p}_2\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}\kappa_{11} & \kappa_{12} & \kappa_{13}\\ \kappa_{21} & \kappa_{22} & \kappa_{23}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\dot{\delta}_1\\ \dot{p}_1\\ \dot{\rho}_1\end{pmatrix} \tag{۳۹}$$

که در آن κ_{ij} عبارتند از:

$$\begin{aligned}&\kappa_{11}=\frac{\gamma-1}{\gamma+1}-\frac{2\gamma}{\gamma+1}\frac{p_1}{\rho_1\delta_1^2},\\ &\kappa_{12}=\frac{2\gamma}{\gamma+1}\frac{1}{\rho_1\delta_1},\ \kappa_{13}=-\frac{2\gamma}{\gamma+1}\frac{p_1}{\rho_1^2\delta_1},\\ &\kappa_{21}=\frac{4}{\gamma+1}\rho_1\delta_1,\ \kappa_{22}=-\frac{\gamma-1}{\gamma+1},\\ &\kappa_{23}=\frac{2}{\gamma+1}\delta_1^2\end{aligned} \tag{۴۰}$$

سمت راست دستگاه (۳۹) مقادیر معلومی هستند که از حل معادلات حاکم بر تغییرات زمانی خواص بالادست و یا از شرایط مرزی ثابتی به‌دست می‌آیند. با نگاهی به تعریف δ_i می‌توان نوشت:

$$\dot{\delta}_i=\left(\frac{\partial \vec{u}_i}{\partial t}-\dot{u}_{sh}\hat{e}_\eta\right)\cdot\overrightarrow{N}_s+ (\vec{u}_i-u_{sh}\hat{e}_\eta)\cdot\frac{\partial \overrightarrow{N}_s}{\partial t} \tag{۴۱}$$

بنابراین هر دو معادله دستگاه (۳۹) دارای عبارت شتاب موج ضربه‌ای $\dot{u}_{sh}$، می‌باشند.

با افزودن معادلات (۳۹) و (۴۱) در رابطه (۳۸) عبارت زیر برای شتاب موج ضربه‌ای به‌دست خواهد آمد:

$$-b_4(\hat{e}_\eta\cdot\overrightarrow{N}_s)\dot{u}_{sh}+b_1\left(\frac{\partial \vec{u}_1}{\partial t}\cdot\overrightarrow{N}_s\right)+b_2\dot{p}_1+ (b_1\vec{u}_1-b_0\vec{u}_2-b_4u_{sh}\hat{e}_\eta)\cdot\frac{\partial \overrightarrow{N}_s}{\partial t}+b_3\dot{\rho}_1=R \tag{۴۲}$$

که در آن

$$b_0=\rho_2a_2, b_1=(\kappa_{21}+\kappa_{11}b_0), b_2=(\kappa_{22}+\kappa_{12}b_0),\\ b_3=(\kappa_{23}+\kappa_{13}b_0), b_4=(b_1-b_0)$$

هستند. با ثابت گرفتن خواص جریان بالادست نسبت به زمان رابطه شتاب موج ضربه‌ای زیر حاصل می‌گردد:

$$\dot{u}_{sh}=\frac{(b_1\vec{u}_1-b_0\vec{u}_2-b_4u_{sh}\hat{e}_\eta)\cdot\dfrac{\partial \overrightarrow{N}_s}{\partial t}-R}{b_4(\hat{e}_\eta\cdot\overrightarrow{N}_s)} \tag{۴۳}$$

انتگرال‌گیری این رابطه در زمان، هم سرعت و هم موقعیت موج ضربه‌ای را به‌دست می‌دهد.

بنابراین نحوه برخورد با موج ضربه‌ای متحرک در میدان به‌ترتیب زیر خلاصه می‌شود:

۱ـ محاسبه شتاب موج ضربه‌ای از معادله (۴۳).

۲ـ انتگرال‌گیری از آن و دستیابی به سرعت و موقعیت جدید موج ضربه‌ای.
۳ـ تعیین بردار عمود بر موج ضربه‌ای و محاسبه مشتق زمانی آن.
۴ـ استفاده از روابط رانکین-هاگونیوت (۲۵) تا (۲۸) برای تعیین مشخصات جریان پایین دست.

مرز انتهای میدان

در تعیین این مرز اشاره شد که تا جایی میدان حل ادامه پیدا می‌کند که جریان به‌طور کامل بالای صوت باشد. لذا در این ناحیه تمام مشخصه‌های جریان میدان را ترک می‌کنند؛ بنابراین نیازی به اعمال شرط خاصی وجود نخواهد داشت. در اینجا معادلات حاکم مانند نقاط داخل میدان حل می‌شوند.

انتگرال‌گیری زمانی

پس از گسسته‌سازی معادلات حاکم، شرایط مرزی بدنه و معادله شتاب موج ضربه‌ای نوبت به اعمال شرایط اولیه و انتگرال‌گیری زمانی از آنها فرا می‌رسد. با آنکه روشهای ضمنی سبب همگرایی سریعتری با افزایش گستره پایداری می‌شوند، اما به‌دلیل بروز خطای مستعار[۱۸] در روشهای طیفی که ناشی از عبارتهای غیرخطی موجود در معادلات حاکم و محدود بودن نقاط شبکه است، در اکثر موارد از آنها به‌منظور پیشبرد زمانی جوابها تا رسیدن به حالت پایا استفاده نمی‌شود (برای اطلاعات بیشتر به فصل سوم و چهارم مرجع [۱] رجوع شود). از دیدگاه هزینه محاسباتی نیز به‌دلیل غیرصفر بودن تمام عضوهای ماتریس‌های مشتق‌گیری در روشهای طیفی، استفاده از روشهای ضمنی به‌صرفه نخواهد بود و بنابراین از روشهای صریح معمول با دقت بالای حل معادلات دیفرانسیل معمولی در انتگرال‌گیری زمانی، استفاده می‌شود. در میان این روشها اغلب از روش رانگ-کوتا[۱۹] مرتبه چهار به جهت گستره پایداری خوب و هزینه محاسباتی قابل قبولی که دارد بهره گرفته می‌شود.
همچنین در ابتدای حل، شکل موج ضربه‌ای از تقریب بیلیگ [۷] استفاده شده و تمام نقاط شبکه نیز توسط مقادیر پشت موج ضربه‌ای مقداردهی می‌شوند به استثنای بدنه که شرط مماس بودن بردار سرعت در آنجا اعمال می‌گردد.

نتایج

در این قسمت نتایج حاصل از اعمال روش عددی ذکر شده، بر مسأله نمونه جریانهای بالای صوتی روی استوانه و کره با موج ضربه‌ای کمانی جدا شده، ارائه می‌گردد. نتایج حاصله، جوابهای حالت پایا دستگاه معادلات اویلر ناپایا می‌باشند. بدین ترتیب انتظار می‌رود با پیشروی زمانی جوابهای حل میدان جریان و سرعت موج ضربه‌ای و موقعیت آن به سمت مقادیر یکنواخت و ثابتی میل کنند. در نخستین گامهای زمانی، اندازه تغییرات کمیتها بزرگ می‌باشد، اما با گذشت چند گام زمانی، این تغییرات بتدریج کوچک می‌شوند تا آنکه دیگر مقدار کمیتها تغییر نمی‌کنند. در این حالت جوابها به عنوان جواب حالت پایا ثبت و بررسی می‌شوند.
در مسأله مورد بحث محور تقارن و بدنه یکی از خطوط جریان است. موج ضربه‌ای روی این خط جریان به‌صورت قائم می‌باشد، لذا از روابط ساده دینامیک گاز، خواص جریان بلافاصله بعد از موج ضربه‌ای روی آن به‌طور تحلیلی قابل دستیابی بوده و معیار مقایسه خوبی برای ارزیابی نتایج حل عددی به شمار می‌رود؛ که در نتایج به‌طور خاص مورد بحث قرار می‌گیرد. روی این خط جریان مقدار آنتروپی در گذر از موج ضربه‌ای به‌طور ناگهانی افزایش می‌یابد و تا انتهای بدنه ثابت باقی می‌ماند؛ چرا که جریان بعد از موج ضربه‌ای آیزنتروپیک خواهد بود. مقدار آنتروپی قبل و بعد از موج ضربه‌ای روی این خط جریان سرعت نیز قبل از موج ضربه‌ای مافوق صوت است و بعد از آن به‌طور ناگهانی به زیرصوت تقلیل می‌یابد و روند کاهشی خود را تا برخورد به بدنه ادامه می‌دهد تا در محل برخورد با بدنه به صفر می‌رسد. مقدار فشار در گذر از موج ضربه‌ای روی این خط نیز به‌طور ناگهانی افزایش یافته و روند افزایشی خود را تا رسیدن به فشار سکون در برخورد با بدنه ادامه می‌دهد. در طول بدنه با انبساط جریان سرعت افزایش و فشار نیز کاهش می‌یابد.
یکی از کمیتهای حائز اهمیت از دیدگاه مطالعاتی جریان، چرخش[۲۰] می‌باشد که عبارت است از:

$$\psi = \left\| \vec{\nabla} \times \vec{u} \right\| = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \qquad (۴۴)$$

در بسیاری از جریانهای غیرلزج آیزنتروپیک، این کمیت به جهت دارا بودن ترکیب خطی مشتقات سرعت، قادر به

پیشگویی رفتار سیال می‌باشد و در بعضی موارد به‌عنوان معیاری از خطای روش نیز استفاده می‌شود.

استوانه

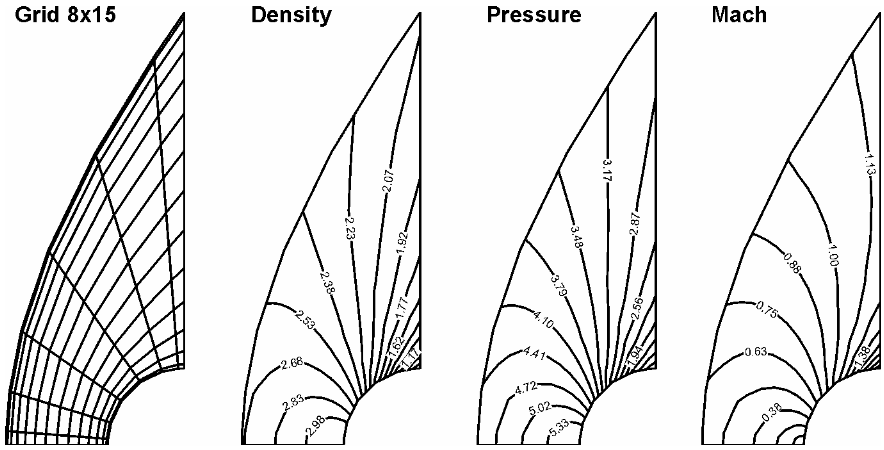
ربع استوانه‌ای در جریان مافوق صوت با عدد ماخ $M_\infty = 2$ قرار می‌گیرد. فشار نقطه سکون (که محل تلاقی بدنه با محور افقی است) برای آن عبارت است از $P = 5.6404$. در این مسأله از عدد $\mathrm{CFL} = 4.4$ استفاده شد و شبکه مورد استفاده 15×8 بوده که به همراه خطوط همتراز چگالی، فشار و عدد ماخ در شکل (۲) آمده‌اند. همچنین خطوط جریان، خطوط همتراز آنتروپی و چرخش در شکل (۳) ترسیم شده‌اند. از آنجا که موج ضربه‌ای در نزدیکی محور تقارن، قائم می‌شود، میزان چرخش نیز به صفر نزدیک می‌شود؛ در آن ناحیه مقدار آنتروپی تقریباً ثابت است. بنابراین تئوری کلوین[۲۱] در آنجا برقرار است و خطوط چرخش ثابت، خطوط جریان را دنبال می‌کنند. با دور شدن از محور تقارن، شکل موج ضربه‌ای، بشدت خمیده شده، آنتروپی نیز بشدت تغییر کرده و تولید چرخش به بیشترین مقدار خود می‌رسد. در این ناحیه که میزان خمیدگی موج ضربه‌ای به بیشینه خود رسیده است و تغییرات شدید آنتروپی وجود دارد، تئوری کلوین صادق نیست و خطوط همتراز چرخش، خطوط جریان را دنبال نمی‌کنند. در شکل (۴) نیز تغییرات آنتروپی، عدد ماخ و فشار را روی خط جریانی که بر محور تقارن منطبق است و روی مرز بدنه ادامه می‌یابد نشان می‌دهد. تطابق خوب تغییرات آنتروپی، عدد ماخ و فشار با آنچه از تئوری انتظار می‌رفت نشان دهنده صحت الگوریتم و دقت خوب روش طیفی است. در شکل (۵) روند همگرایی روش در مانده معادله فشار در یکی از نقاط داخل میدان جریان، خطای فشار سکون (فشار محل تلاقی بدنه و محور تقارن) و سرعت موج ضربه‌ای روی محور تقارن به تصویر کشیده شده‌اند. در آغاز حل به‌دلیل حساسیت شدید روشهای طیفی به تغییرات ناگهانی و شرایط اولیه و مرزی نوسانهای کوچکی رخ داده و به‌سرعت مستهلک شده‌اند. برخلاف نتایج حسینی و همکارانش [۲] که همگرایی مطلوبی را نداشتند (که مطابق اظهار آنها برای همین مسأله با شبکه 9×9، بعد از 2000 گام زمانی حداکثر مانده معادله فشار هنوز بیشتر از 10^{-4} بود) سیر نزولی خطی مانده فشار و سرعت موج ضربه‌ای تا رسیدن به حالت پایا، کارکرد صحیح الگوریتم عددی را نشان می‌دهند. همچنین نحوه رسیدن مقدار فشار نقطه سکون به مقدار نهایی خود پس از نوسانهای اولیه به‌طور مطلوبی انجام پذیرفته است.

توزیع فشار روی استوانه در شکل (۶) آمده است؛ که انطباق کامل توزیع فشار به‌دست آمده بر نتایج دیگر محققان، تاییدی بر صحت نتایج دارد. برای دریافت دقت طیفی روش و چگونگی کاهش خطا با افزایش تعداد نقاط شبکه در این مسأله، اجراهای متفاوتی صورت گرفته است که در جدول (۱) نتایج آن آمده است.

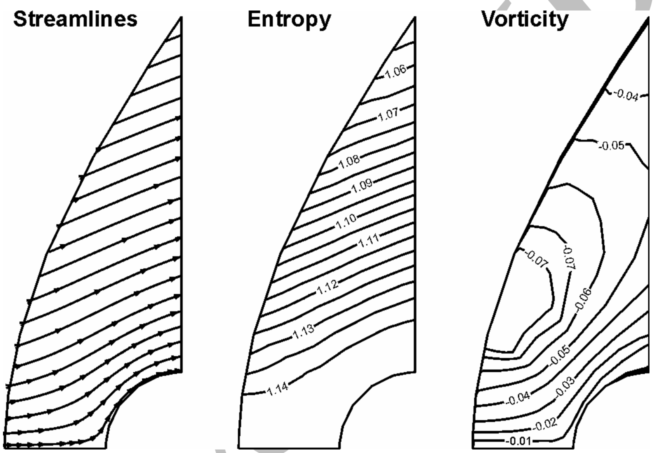
کره

جسمی کروی در جریان مافوق صورت با عدد ماخ $M_\infty = 2.94$ قرار می‌گیرد. فشار نقطه سکون (که محل تلاقی بدنه با محور تقارن است) برای آن عبارت است از $P = 11.6026$. در این مسأله از عدد $\mathrm{CFL} = 3.1$ استفاده شد و شبکه مورد استفاده 8×8 بوده که به‌همراه خطوط همتراز چگالی، فشار، عدد ماخ، آنتروپی و خطوط جریان در شکل (۷) آمده است. خطوط جریان، خطوط همتراز آنتروپی و چرخش در شکل (۸) ترسیم شده‌اند. در شکل (۹) نیز تغییرات آنتروپی، عدد ماخ و فشار را روی خط جریانی که بر محور تقارن منطبق است و روی مرز بدنه ادامه می‌یابد نشان می‌دهد. در اینجا نیز تطابق خوب تغییرات آنتروپی، عدد ماخ و فشار با آنچه از تئوری انتظار می‌رود، نشان دهنده صحت الگوریتم و دقت خوب روش طیفی است.

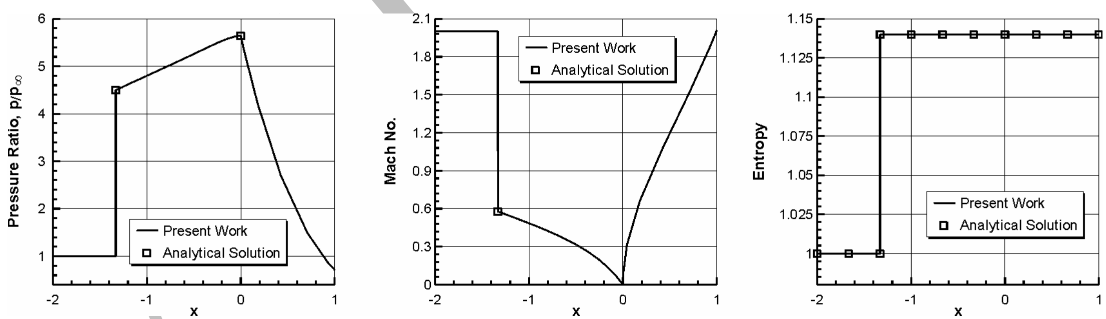
در شکل (۱۰) روند همگرایی روش در مانده معادله فشار در یکی از نقاط داخل میدان جریان، خطای فشار سکون (فشار محل تلاقی بدنه و محور تقارن) و سرعت موج ضربه‌ای روی محور تقارن به تصویر کشیده شده‌اند. در آغاز حل به‌دلیل همان حساسیت شدید ذکر شده روشهای طیفی نوسانهای کوچکی رخ داده و به‌سرعت مستهلک شده‌اند. این بار سیر نزولی همگرایی متفاوت با مسأله استوانه است و اثر حضور عبارتهای تقارن محوری در معادلات حاکم به‌صورت حباب‌وار تا رسیدن به حالت پایا دیده می‌شود. شکل خاص این گونه همگرایی بسیار مشابه نتایج کوپریوا و همکارانش [۵] است. همچنین اثر مذکور در نحوه رسیدن مقدار فشار نقطه سکون به مقدار نهایی خود پس از نوسانهای اولیه دیده می‌شود؛ که با مسأله استوانه اندکی تفاوت دارد؛ اما در کل به‌طور مطلوبی انجام پذیرفته است.



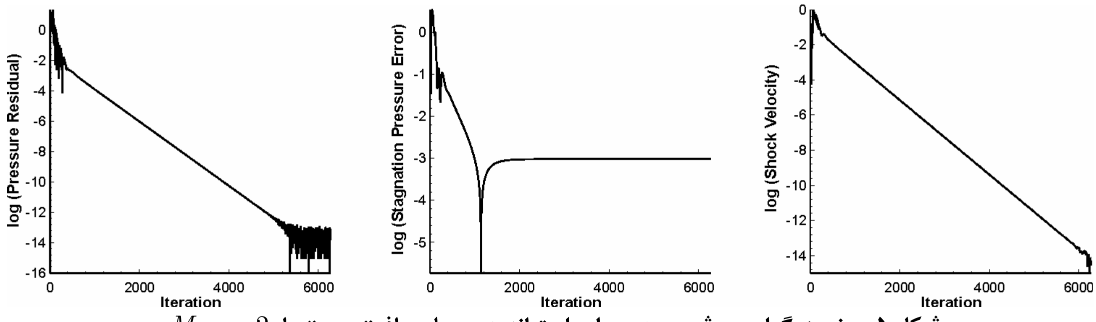
شکل ۲: شبکه، خطوط همتراز چگالی، فشار، و عدد ماخ برای استوانه در جریان مافوق صوت با $M_{\infty} = 2$.



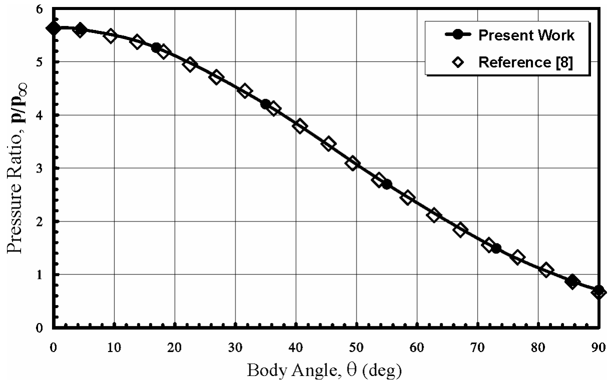
شکل ۳: خطوط جریان، خطوط همتراز آنتروپی و چرخش برای استوانه در جریان مافوق صوت با $M_{\infty} = 2$.



شکل ۴: توزیع فشار، عدد ماخ و آنتروپی روی خط جریان منطبق بر محور تقارن و بدنه در گذر از موج ضربه‌ای برای استوانه در جریان مافوق صوت با $M_{\infty} = 2$ (محل تلاقی محور تقارن با موج ضربه‌ای در $x = -1.329$ و با بدنه در $x = 0$ واقع شده است).



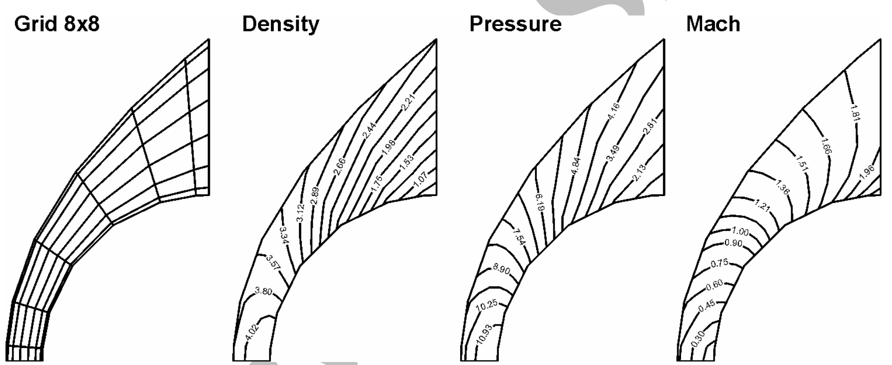
شکل ۵: روند همگرایی روش عددی برای استوانه در جریان مافوق صوت با $M_{\infty} = 2$.



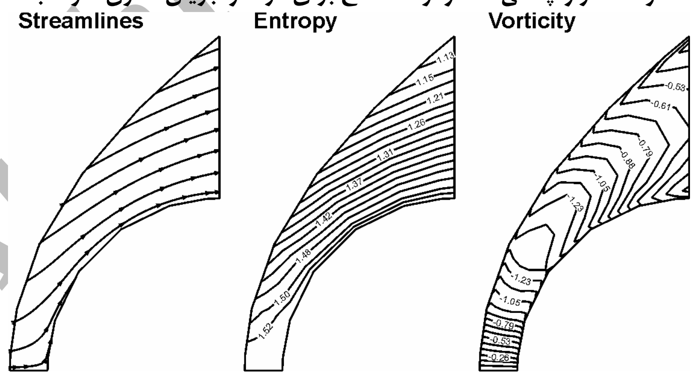
شکل ۶: توزیع فشار روی استوانه در جریان مافوق صوت با $M_\infty = 2$.

جدول ۱: تعداد گامهای زمانی، خطای فشار سکون، لگاریتم مانده فشار، لگاریتم سرعت موج ضربه‌ای و عدد CFL در دقت شبکه‌های متفاوت برای استوانه در جریان مافوق صوت با $M_\infty = 2$.

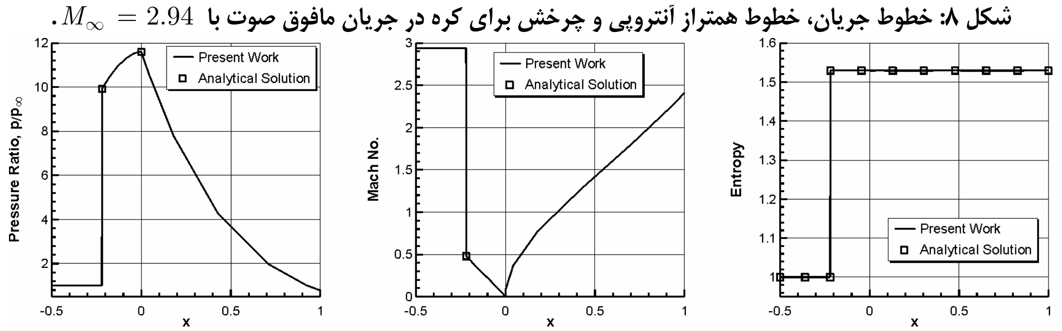
Grid	Iteration	log(Error in P)	$\log(R_p)$	$\log(\dot{u}_{sh})$	CFL
8×15	6187	-3.0176	-15.0515	-14.0663	4.4
10×15	6219	-4.4728	-14.4494	-14.3219	4.4
12×15	7625	-5.9260	-14.1484	-14.2635	4.0



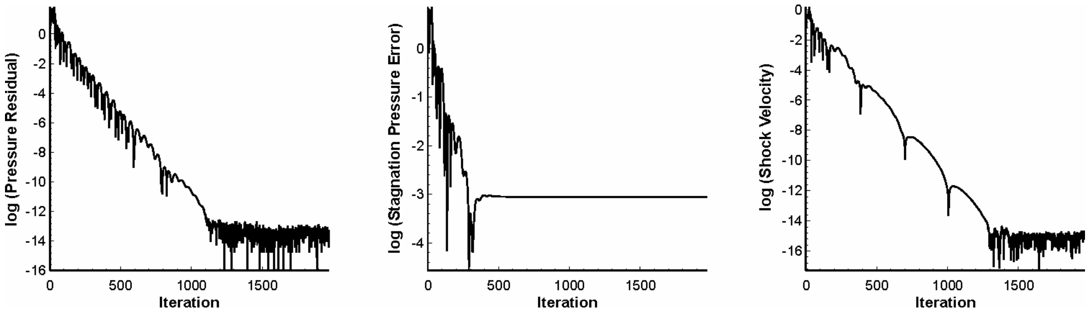
شکل ۷: شبکه، خطوط همتراز چگالی، فشار، و عدد ماخ برای کره در جریان مافوق صوت با $M_\infty = 2.94$.



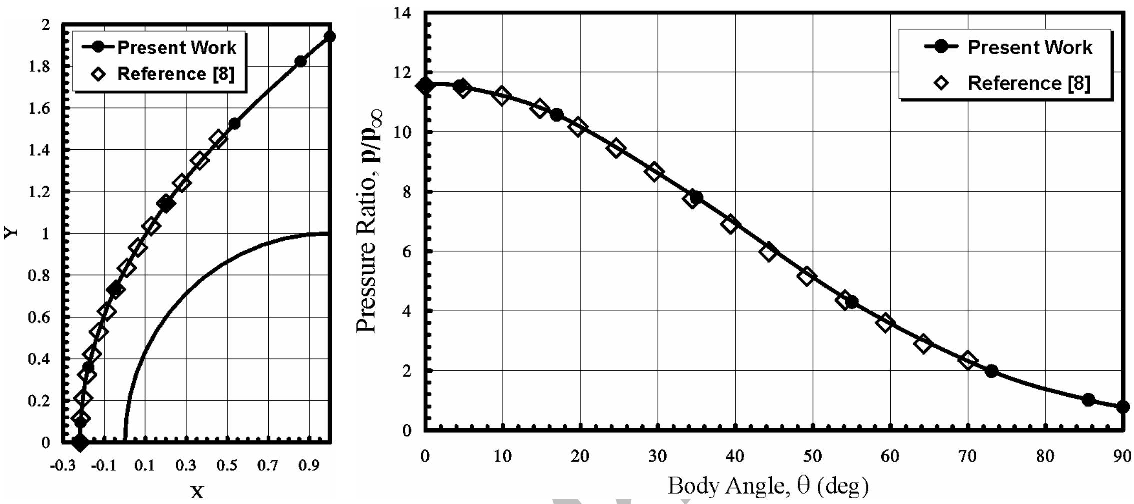
شکل ۸: خطوط جریان، خطوط همتراز آنتروپی و چرخش برای کره در جریان مافوق صوت با $M_\infty = 2.94$.



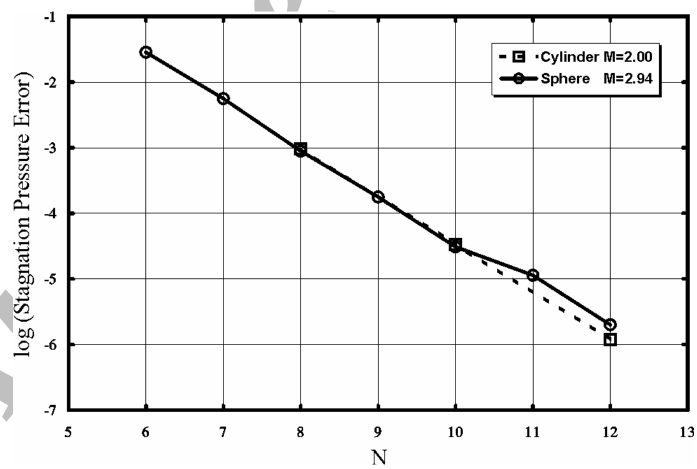
شکل ۹: توزیع فشار، عدد ماخ و آنتروپی روی خط جریان منطبق بر محور تقارن و بدنه در گذر از موج ضربه‌ای برای کره در جریان مافوق صوت با $M_\infty = 2.94$ (محل تلاقی محور تقارن با موج ضربه‌ای در $x = -0.219$ و با بدنه در $x = 0$ واقع شده است).



شکل ۱۰: روند همگرایی روش عددی برای کره در جریان مافوق صوت با $M_\infty = 2.94$.



شکل ۱۱: توزیع فشار و شکل موج ضربه‌ای روی کره در جریان مافوق صوت با $M_\infty = 2.94$.



شکل ۱۲: کاهش نمایی خطا با افزایش تعداد نقاط شبکه برای استوانه و کره در جریان مافوق صوت.

جدول ۲: تعداد گامهای زمانی، خطای فشار سکون، لگاریتم مانده فشار، لگاریتم سرعت موج ضربه‌ای و عدد CFL در دقت شبکه‌های متفاوت برای کره در جریان مافوق صوت با $M_\infty = 2.94$.

Grid	Iteration	log(Error in P)	$\log(R_p)$	$\log(\dot{u}_{sh})$	CFL
6×6	703	-1.5467	-14.0515	-13.3182	3.4
7×7	1006	-2.2524	-14.4494	-13.7051	3.4
8×8	1203	-3.0518	-14.4494	-13.4096	3.1
9×9	2154	-3.7509	-14.4494	-13.0290	2.95
10×10	2302	-4.5100	-14.4484	-13.0020	2.92
11×11	3398	-4.9440	-14.0515	-13.0176	2.92
12×12	3566	-5.6980	-14.4494	-13.3810	2.92

همچنین مقایسه‌ای با دیگر محققان توسط توزیع فشار روی سطح بدنه و منحنی موج ضربه‌ای برازش شده در شکل (۱۱) انجام پذیرفته است. با وجود درشت بودن شبکه به‌کار گرفته شده، نتایج دارای دقت بسیار خوبی هستند؛ که یکی از مزایای روشهای طیفی می‌باشد.

برای دریافت دقت نمایی روش طیفی و چگونگی کاهش خطا با افزایش تعداد نقاط شبکه در این مسأله، اجراهای متفاوتی صورت گرفته است که در جدول (۲) و در شکل (۱۲) نتایج آن به همراه نتایج همین بررسی در استوانه آمده است. کاهش نمایی خطا با افزایش تعداد نقاط شبکه بوضوح ملاحظه می‌شود؛ که مختص روشهای طیفی است.

بحث و نتیجه گیری

روش طیفی هم‌مکانی چبیشف برای حل عددی معادلات اویلر در مسأله جریان بالای صوت حول استوانه و کره با استفاده از روش برازش موج ضربه‌ای با حفظ ویژگیهای روشهای طیفی (در حل مسائل هموار) اعمال گردید. همچنین با پیاده‌سازی برازش صحیح ناپیوستگی (موج ضربه‌ای) با استفاده از هر دو مشتق فشار و سرعت از روابط رانکین-هاگونیوت و جایگزینی آن در رابطه سازگاری مربوط به موج صوتی که به سوی موج ضربه‌ای حرکت می‌کند، روش قادر به ارائه دقت طیفی، همگرایی سریع و عدم ایجاد محدودیت شدید در حوزه پایداری شد. گستره پایداری روش، به‌طور بسیار خوبی نسبت به نتایج کوپریوا و همکارانش [۵] که در آن با روش نقطه میانی[۲۲] و $\mathrm{CFL} = 0.9$ در شبکه 8×8 انتگرال‌گیری زمانی انجام گرفته است، افزایش یافت؛ تا آنجا که از $\mathrm{CFL} = 4.4$ در استوانه و از $\mathrm{CFL} = 3.1$ در کره استفاده شد.

بدین ترتیب یکی از موانع پیشروی روشهای طیفی در مواجهه با ناپیوستگی به روش ارائه شده قابل رفع می‌باشد. در نهایت روش عددی طیفی برای حل جریانهای بالای صوت روی اجسام پخ همراه با موج ضربه‌ای منفصل ارائه گردید. با افزودن اندکی تغییرات می‌توان به حل مسائلی که با دو ناپیوستگی همراه هستند، اقدام نمود. همچنین می‌توان در تحلیل جریانهای داخلی نیز از آن استفاده نمود؛ به‌خصوص در نازلهای چند گلوگاهه و نازلهای مرکب که چند موج ضربه‌ای در آن تشکیل می‌شود.

تشکر و قدردانی

در پایان نگارندگان از دانشگاه تهران، دانشگاه صنعتی امیرکبیر و صنایع شهید باقری به‌دلیل مساعدتها و کمکهای بی‌شائبه تشکر و قدردانی می‌نمایند.

مراجع

1 - Canuto, C., Hussaini, M. Y., Quarteroni, A. and Zang, T. A. (1987). *Spectral Methods in Fluid Dynamics.* Springer-Verlag, New York.

2 - Hussaini, M. Y., Kopriva, D. A., Salas, M. D. and Zang, T. A. (1985). “Spectral methods for the euler equations: PartII-Chebyshev Methods and Shock Fitting.” *AIAA J.*, Vol.23, No.2, PP.234-240.

3 - Yasuhara, M., Nakamura, Y. and Wang, J. P., “Numerical calculation of hypersonic flow by the spectral method.” *Proc., 11th Int. Conf. on Numerical Methods in Fluid Dynamics.,* edited by Dwoyer, D. L., Hussaini, M. Y. and Voigt, R. G., Lecture Notes in Physics, Vol.323, Springer-Verlag, Berlin, PP.607-611.

4 - Moretti, G. and Abbett, M. (1966). “A time-dependent computational method for blunt body flows.” *AIAA J.* Vol. 4, No. 12, PP.2136-2141.

5 - Kopriva, D. A., Zang, T. A. and Hussaini, M. Y. (1991). “Spectral methods for the Euler equations: The blunt body problem revisited.” *AIAA J.* Vol. 29, No. 9, PP.1458-1462.

6 - Funaro, D. (1992). *Polynomial Approximation of Differential Equations*. Springer-Verlag, Berlin, Germany.

7 - Billig, F. S. (1967). “Shock-wave shapes around spherical and cylindrical nosed bodies.” *J. of Spacecraft and Rockects,* Vol. 4, PP.822-823.

8 - Chakravarthy, S. R., Anderson, D. A. and Salas, M. D. (1980). "The split-coefficient matrix method for hyperbolic systems of gasdynamic equations." *AIAA Paper 80-0268,* Pasadena, California.

واژه های انگلیسی به ترتیب استفاده در متن

1 - Smoothing
2 - Gibbs Phenomena
3 - Finite Difference
4 - Filters
5 - Gauss-Quadratures
6 - Chebyshev-Gauss-Lobatto
7 - Contravariant
8 - Local
9 - Global
10 - Gauss-Lobatto
11 - Kronecker
12 - Over Specification
13 - Rankine-Hugoniot
14 - Dirichlet
15 - Neumann
16 - Discontinuity Propagation Speed
17 – Acoustic Wave
1 8 - Aliasing Error
19 - Runge-Kutta
20 - Vorticity
21 - Kelvin's Theorem
22 - Mid Point