بررسي وزن اسپيلاين هاي صفحات نازک برای مدل سازی رقومی زمين

جلال امينی[*1] و سينا تقوي کيش[2]

[1]استاديار گروه مهندسی نقشه‌برداری - پرديس دانشکده هاي فنی- دانشگاه تهران

[2]دانش آموخته کارشناسی ارشد گروه مهندسی نقشه‌برداری - پرديس دانشکده هاي فنی- دانشگاه تهران

(تاريخ دريافت ۸۳/۱۲/۹، تاريخ دريافت روايت اصلاح شده ۸۴/۸/۲۰، تاريخ تصويب ۸۴/۱۰/۲۴)

چکيده

مدل هاي رياضي گوناگوني براي برازش سطح توپوگرافی زميني پيشنهاد شده است كه يكي از اين مدل ها سطوح اسپلاين هاي صفحات نازک[a] مي باشند. در اين مقاله ابتدا به تشريح رياضي اسپلاين هاي صفحات نازک و سپس به حل و پياده سازي روي داده هاي رقومی زمين پرداخته مي شود. از آنجا که حل هر مسئله معمولاً مسائل جديدی مطرح مي كند روش حل مذکور نيز مسئله وزن را پيش مي كشد. براي بررسي وزن, بر اساس وابستگي يا عدم وابستگي به چگالي, دو گونه وزن كلي در نظر گرفته شد. به نمايندگي از روش هاي وابسته به چگالي نقاط, روش وروني و روش وزن ثابت در برابر آن در نظر گرفته شد. در نتيجه به صورت تجربي اثبات شد سطوح حاصل از اسپيلان هاي صفحات نازک به پراکندگي نقاط ايجاد كننده آنها وابستگي ندارند.

واژه های کليدي: اسپلاينهاي صفحات نازک (TPS) - مدل ارتفاعي رقومي (DEM) - انترپولاسيون

مقدمه

سطح توپوگرافي زمين را مي توان به عنـوان يـک سطح رياضي پيوسته در نظر گرفـت کـه بـراي بيـان ايـن سطح بصورت رقومي مي توان نقاطي در فواصـل مـشخص روي سطح توپوگرافي اندازه گيري نمود. مدل رقومي ايـن سطح كه مي تواند براي تعيين ارتفاع هر نقطه دلخواه بكار رود به كمک روش هاي درون يابي بر اساس نقـاط انـدازه گيري شده قابل تعيين است. به منظور ايجاد يک شبكه ي منظم بر اساس نمونه هاي اندازه گيري شده مـي تـوان از روش هاي درون يابی بهره گرفـت. بطـوركلي روش هـاي درون يابي به دو طبقه ي قطعـي و احتمـالي تقـسيم مـي شوند. روش هاي قطعي مستقيماً بـر اسـاس فرمـول هـاي رياضي براي تعيين ارتفاع نقاط استفاده مـي شـود و روش هاي احتمالی بـر اسـاس خـود همبـستگي در آمـار مـورد استفاده قرار مي گيرند. اسپيلاين هاي صفحات نازک کـه به صورت مخفف TPS نيز خوانده مي شـود يکـي از مـدل هاي درونيابي قطعـي اسـت کـه اولـين بـار بـسال ۱۹۷۶ ميلادي توسـط داچـن[2] معرفـي شـد[۴]. وي توابـع پايـه شعاعي[3] را بـه عنـوان راه حـل معرفـي نمـود کـه توسـط منگاست[4] بسط داده شدند[۱۰].

امروزه TPSها كاربردهاي بـسياري يافتـه انـد كـه مي توان به كاربردهاي ژئوفيزيكي از جمله نقـشه بـرداري ثقل سنجي و مغناطيسي[۲]. مدلـسازي اثـر انگـشت[۱], تحقيقـات پزشـكي[۱۱], توليـد داده ي شـبكه اي از روي منحني هاي ميزان[۷و۹] و غيره اشاره کرد. همچنين براي درونيابي منحني هاي ميزان مياني نيز مورد استفاده قـرار گرفته اند[۷].

جوال[5] در تحقيق خود بـر روي روشـهاي متفـاوت سيستم اطلاعات توپوگرافي 1:10000 ليتواني براي از بـين بردن جابجايي ارتفاعي تـصاوير آيكونـوس [6] جهـت ايجـاد مدل رقومي ارتفاعي[7]روش TPS را با روشـهاي چندجملـه اي كه توسط نرم افزار ERDAS استفاده مي شود مقايـسه كرده و به اين نتيجه مي رسد كه TPS الگوريتمي مطمئن تر است و نرم افزار PCI Gematica-OrthoEngineرا بـراي ايـن كـار پيـشنهادكرد[۱۲] نـرم افـزار MicroStation Descartes 7.0, TPS را به تكنيک هايش اضافه كرده كـه به صـورت كلـي بـراي تـصحيح تغييـر شـكلهاي ناشـي از Rubbersheeting به كار برده مي شـود[۱۴]. بُزتُـسان[8] در سال ۲۰۰۲ ثابت مي كند كه TPS ها در معادلات واگـرا- همگرا دچار مشكل نمي شوند و روشي با جواب منحصر به فرد براي معادلات ديفرانسيل خود مي باشند[۳].

در ادامــه ي مقالــه در بخــش دوم TPS از نظــر رياضي تعريف و راه حلي براي ايجاد آن معرفي مي كنـيم.

* نويسنده مسئول : تلفن : ۶۱۱۱۴۳۷۸ , فاكس : ۸۸۰۰۸۸۳۷ , Email: jamini@ut.ac.ir

از آنجاکه در اين راه حل مشکل وزن مطرح مـي گـردد در بخش ۳ بـه بررسـي وزن در مـدل فـوق مـي پـردازيم. در بخش ۴ روش مقاله روي نقاط ارتفاعي يـک منطقـه تپـه ماهوری پياده سازي و سپس نتايج حاصل مـورد ارزيـابي قرار مي گيرد. در انتها در بخش ۵ نتايج و پيشنهادات ارائه مي گردد.

مدل رياضي اسپيلاين هاي صفحات نازک

اسپيلاين صفحه ي نازک برگرفتـه از يـک مفهـوم فيزيکي به مفهوم صفحه اي الاسـتيک خـالي از هـر گونـه نيروي خارجي است که بر روي نقاط کنترل رها مي شود. بنابراين اين سطح بايد داراي کم ترين انـرژي پيچـشي در نقاط کنترل باشد. اين انرژي به صـورت انتگـرال زيـر روي فضاي $\Re^2$ تعريف مي شود[۱۳].

$$I[f(x,y)] = \iint_{\Re^2} f_{xx}^2 + 2f_{xy}^2 + f_{yy}^2$$

(۱)

در معادله ي (۱)، f معرف ارتفاع در مدل سه بعدي است. از خواص معادله ي (۱) ميتـوان بـه ايـن اشـاره کـرد کـه پيچشي است غير حساس به دوران[۹], پوشش دهنـده ي نرم دوم سطح اسـت و آن هنگـام کـه مينـيمم گـردد بـه معناي اينست که پيچش سطح در نقاط کنترل و تغييرات شيب در صفحات مماس به حداقل خود رسيده است.

اسپيلاين های صفحات نازک برای بيان سـطوح می‌توانند جواب يک مسئله انترپولاسيون[۹] و يا يک مـسئله تقريب[۱۰] باشند. در يک مسئله انترپولاسيون برای n نقطه داده شـده از سـطح بـا ارتفـاع معلـوم f_i ، معادلـه سـطح (تابع $f(x,y)$) طوری پيدا مي شود که در نقاط داده شده $f(x_i,y_i) = f_i \quad (x_i, y_i, f_i ; i = 1,2,...,n)$ و انتگـــرال (۱) مينيمم شود.

از طرف ديگر سطح اسـپيلاين هـاي صـفحات نـازک بـه عنوان يک تقريب از سطح واقعـي داده هـا مـي بايـست از نزديکي نقاط کنترل عبور کند (جواب مسئله تقريـب). در اين حالت سطح $f(x,y)$ طوری تعيين مي شود که فاصله ي آن با نقاط کنترل کمينه مي شود, به عبارتي رابطه (۲) (نرم L2) مينيمم شود[۱۱].

$$E_{TPS} = \sum_{i=1}^{n} \mu_i (f(x_i,y_i) - z_i)^2 + \iint_{\Re^2} f_{xx}^2 + 2f_{xy}^2 + f_{yy}^2$$

(۲)

داچُن و سوبر نشان دادند که توابعي به شکل رابطه (۳) جواب مسئله انترپولاسيون مي باشند.

$$\sum_i a_i \phi(r_i(x_j,y_j)) + b_0 + b_1 x_j + b_2 y_j = z_j ;$$
$$\sum_j a_i = 0; \sum_j a_i x_i = 0; \sum_j a_i y_i = 0;$$
$$(j = 1,...,n);$$

(۳)

و با در نظـر گـرفتن وزن هـاي μ_i در مـسئله ي تقريب [معادله ي(۲)]، توابع شکل زير جواب مسئله فـوق است[۴].

$$\frac{8\pi a_j}{\mu_j} + \sum_i a_i \phi(r_i(x_j,y_j)) + b_0 + b_1 x_j + b_2 y_j = z_j ;$$
$$(j = 1,...,n)$$

(۴)

که ϕ همان توابع پايه شعاعي مي باشـند کـه در مـورد TPS ها بـه فـرم کلـي $\phi(x,x_j) = \phi(r_j) = r_j^{2m}\log(r_j)$ نمايش داده مي شـوند و از پيوسـتگي C^{2m-1} برخـوردار است[۳]. انتخاب m خارج از بحث اين مقاله بوده بنـابراين بر اساس آنچه براي TPS هاي مـورد اسـتفاده در DTM[۱۱] معمول است m را ۱ اختيـار کـرديم؛ بنـابراين تـابع ϕ از پيوســـتگي C^1 برخـــوردار بـــوده و بـــه صـــورت $\phi(x,x_i) = \phi(r_i) = r_i^2\log(r_i)$ مـي باشـد کـه در آن r فاصله ي اقليدسي بين نقاط در فضاي دو بعدي مي باشـد ($r_i(x_j,y_j) = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}$).

روش پيشنهادي داچُن حل مستقيم اين سري معـادلات است که در واقـع يـک سيـستم معـادلات خطـي بـا n+3 معادله مي باشد [۴].

$$\begin{pmatrix} 8\pi/\mu_1 & c_{21} & \cdots & c_{n1} & 1 & x_1 & y_1 \\ c_{21} & 8\pi/\mu_2 & \cdots & c_{n2} & 1 & x_2 & y_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{1n} & c_{2n} & \cdots & 8\pi/\mu_n & 1 & x_n & y_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n & 0 & 0 & 0 \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \\ b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$
$$c_{ij} = \phi(r_i(x_j,y_j))$$

(۵)

مـــي تـــوان معادلـــه ي (۵) را بـــه صـــورت $\begin{pmatrix} C & F \\ F^T & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z \\ 0 \end{pmatrix}$ نيز نمايش داد. مـاتريس ضـرايب $\begin{pmatrix} C & F \\ F^T & 0 \end{pmatrix}$ يک ماتريس قرينه ي مثبت است. کاراسـو[۱۲] حل معادلات فوق را از طريق تکنيک فاکتور گيـري QR[۱۳] پيشنهاد کرد[۹], بطوريکه Q يک ماتريس (n,n) ارتوگونال

و R يک ماتريس به فرم (n,3) مي باشد که تمامي اعضاي آن بغير از بالا مثلث U صفر است.

$$R=\begin{pmatrix}U\\0\end{pmatrix};Dim[U]=3\times 3$$

(۶)

از آنجا که F ماتريسي $3\times n$ از مرتبه ي[۱۴] ۳ مـي باشـد پس حد اقل ۳ نقطه با مختصات نا مشخص وجود دارد لذا R داراي مرتبه ي ۳ بوده و U معکوس پذير خواهد بود.

$$\begin{pmatrix}C & F\\F^T & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}Q & 0\\0 & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Q^TCQ & R\\R & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Q^T & 0\\0 & I\end{pmatrix};$$

$$I=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

(۷)

با جايگذاري معادلـه(۷) در معادلـه (۵) مـي تـوان نوشت:

$$\begin{pmatrix}Q & 0\\0 & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Q^TCQ & R\\R & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Q^T & 0\\0 & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}Z\\0\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\left.\begin{matrix}\begin{pmatrix}Q & 0\\0 & I\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}Q & 0\\0 & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Q^TCQ & R\\R & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Q^Ta\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}Q & 0\\0 & I\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}Z\\0\end{pmatrix}\\ \wedge\\ Q^{-1}=Q^T\end{matrix}\right\}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\begin{pmatrix}Q^TCQ & R\\R & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}d\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}Q^TZ\\0\end{pmatrix}\\ a=Qd\end{cases}$$

با جايگذاري $Q=(Q_{1_{n\times 3}}Q_{2_{n\times n-3}})$ و $d=\begin{pmatrix}d_{1_{3\times 1}}\\d_{2_{(n-3)\times 1}}\end{pmatrix}$ در معادله بالا داريم.

$$\begin{pmatrix}Q_1^TCQ_1 & Q_1^TCQ_2 & U\\Q_2^TCQ_1 & Q_2^TCQ_2 & 0\\U^T & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}d_1\\d_2\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}Q_1^TZ\\Q_2^TZ\\0\end{pmatrix}$$

$$\wedge$$

$$a=Q_1d_1+Q_2d_2$$

(۸)

از معادله ي (۸) مي توان ديد که $U^Td_1=0$ چـون U غيــر صــفر اســت لــذا $d_1=0$؛ از معادلـــه ي $Q_2^TCQ_2d_2=Q_2^TZ$ مــي تــوان d_2 و در نتيجــه $a=Q_2d_2$ را بدســـت آورد؛ از معادلـــــه ي $Q_1^TCQ_2d_2+Ub=Q_1^TZ$ نيز مي توان b را استـــخراج نمود.

در روش حل مستقيم که در بالا به تفـصيل بحـث شد اگر بيش از ۳ نقطه ي کنترل غير تکراري داشته باشد هرگز جواب تکينه نخواهد داد. ولي ازنقاط ضـعف آن بايـد به وزن هاي μ_i در معادله ي (۴) اشاره کردکه باعث مـي شود جوابهاي حاصل از اين روش متأثر از μ_i ها گردد. در اين مقاله به بررسي وزنهـای فـوق در مـدل هـاي رقـومي زمين توســـط اسپلاين هاي صفحات نازک می پردازيم.

بررسي وزن در اسپلاين هاي صفحات نازک

براي سادگي بحث, معادله ي (۲) را به صورت زير نمايش داديم.

$$E_P=P\sum_{i=1}^{n}r_i(f(x_i,y_i)-z_i)^2+I(f)$$

(۹)

که در آن $P=\sum_i\mu_i$ و $r_i=\frac{\mu_i}{P}$ که r_i وزن نسبي نقطه ي (x_i,y_i,z_i) است و P در واقع تضمين کننـده ي قـدرت معيــار بــرازش $e(f)=\sum_{i=1}^{n}r_i(f(x_i,y_i)-z_i)^2$ در برابــر معيار پيچش $I(f)$ است .

بنابراين انتخاب صحيح وزن هاي P و r_i الزامي است.

الف) بحث را با P آغاز مي کنيم

فرض کنيد $P>0$ نمايانگر يک TPS منحـصر بـه فـرد باشد که مـشخص کننــده ي سـطح f_P اسـت و معادلـه $E_P(f)=P.e(f)+I(f)$ را مينيمم مي کند؛ به همين ترتيب براي $Q>0$, که مـشخص کننــده ي سـطح f_Q است و معادله $E_Q(f)=Q.e(f)+I(f)$ را مينيمم مي کنـد. بـه دليـل خاصـيت مينـيمم $E_P(f_P)$ و $E_Q(f_Q)$ داريم:

$$E_P(f_P)\le E_P(f_Q) \text{ و } E_Q(f_Q)\le E_Q(f_P)$$

به عبارت ديگر:

$$P.e(f_P)+I(f_P)\le P.e(f_Q)+I(f_Q)$$

(۱۰)

$$Q.e(f_Q)+I(f_Q)\le Q.e(f_P)+I(f_P)$$

(۱۱)

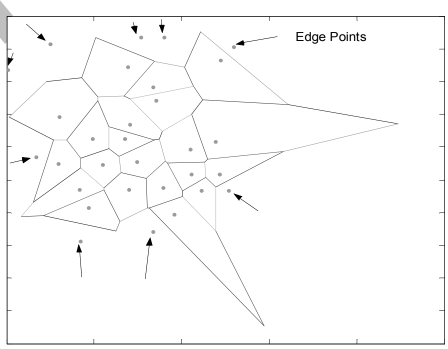
اگــــر $P>Q$ باشـــد آنگــــاه $I(f_P)\ge I(f_Q)$ و $e(f_P)\le e(f_Q)$؛ اين به اين معني است که سـطح f_Q

نرمتر از سطح f_P خواهد بود. از طرف ديگر اگر P به سمت بينهايت ميل کند سطح ما مي تواند کاملاً منطبق بر سطح واقعي داده گردد.

ب) حال فرض مي کنيم P مشخص شده و وزن هاي r_i را بررسي مي کنيم

البته ساده ترين وزن مي تواند $r_i = 1/n$ براي تمامي نقاط باشد (در اين مقاله پيشنهاد مي شود که $r_i = 1$ در نظر گرفته شود تا P را محاسبه نکنيم). اما به دليل نامنظم بودن نقاط و تفاوت چگالي محلي نقاط تعيين وزن از طريق مساحت چندضلعي هاي وروني[15] معرفي مي گردد [۶و۹]. لذا به طور خلاصه اين روش را معرفي مي کنيم و سپس آنچه اين مقاله بر اساس آن پايه گذارده ايم به بحث مي گذاريم.

چند ضلعي هاي وروني (شکل ۱) يک روش افراز فضاي $\Re^2$ است، که در آن شرط مرزي مجموعه هاي افراز کننده عمود منصف ميان مراکز ثقل همسايه ي آنهاست.



شکل ۱: چند ضلعي های وروني.

از آنجا که فضاي $\Re^2$ داراي وسعتي از $+\infty$ تا $-\infty$ مي باشد و نقاط ما هرگز نمي تواند کران بالا يا کران پايين اين مجموعه را پوشش دهد. لذا در مراکز ثقل حاشيه ای مقدار μ_i يک در نظر گرفته مي شود. از اين رو در اين تحقيق در ذيل روشهاي (a) تا (e) که بر اساس مساحت نرمال شده وروني با وزنهای مختلف P و روش (f) بر اساس مساحت وروني و (g) با وزن ثابت ۱ استفاده شده مطرح مي گردد.

a) روش مساحات نرمال شده ي وروني با وزن ثابت P=۱ که مقدار μ_i در مراکز ثقل حاشيه اي برابر يک در نظرگرفته شده است.

در اين روش وزن دهي همانطور که از نام آن پيداست P برابر ۱ و r_i مساحت نرمال شده ي چندضلعي وروني است که نماينده ي نقطه ي i ام است, اين روش داراي سيستم تعريف وزني به صورت زير مي باشد:

$$\mu_i = \begin{cases} r_i = \dfrac{A_i}{\sum_{j=1}^{n} A_j}; & if\,(i = 1,2,3,\ldots,n \;\&\; A_i \neq \infty) \\ 1; & if\,(A_i = \infty) \end{cases}$$

(۱۲)

که در آن A همان مساحت چند ضلعي وروني است که براي چندضلعي هاي باز مراکز ثقل حاشيه اي مقدار آن صفر در نظر گرفته شده است.

b) روش مساحات نرمال شده ي وروني با ضريب P=100

آنچه که روش مساحت ها ي نرمال شده ي وروني با ضريبP برابر يک ايجاد مي کند سطحي است که ميزان نرمي آن به نزديکي گذر آن از نقاط کنترل برتري دارد لذا بر اساس آنچه در ابتداي اين فصل گفته شد ثابت P وارد معادلات مي گردد. لازم به ذکر است که P را رقمي بين 10^{3} تا 10^{5} معرفي مي کنند[۴]. لذا در اين مقاله مشاهدات خود را بر مبناي تغيير در P نيز بررسي کرديم.

$$\mu_i = 100 \times \frac{A_i}{\sum_{j=1}^{n} A_j}; i = 1,2,3,\ldots,n$$

(۱۳)

c) روش مساحات نرمال شده ي وروني با ضريب P=1000

$$\mu_i = 1000 \times \frac{A_i}{\sum_{j=1}^{n} A_j}; i = 1,2,3,\ldots,n$$

(۱۴)

d) روش مساحات نرمال شده ي وروني با ضريب P=10000

$$\mu_i = 10000 \times \frac{A_i}{\sum_{j=1}^{n} A_j}; i = 1,2,3,\ldots,n$$

(۱۵)

e) روش مساحات نرمال شده ي وروني با ضريب P=100000

$$\mu_i = 100000 \times \frac{A_i}{\sum_{j=1}^{n} A_j}; i = 1,2,3,\ldots,n$$

(۱۶)

f)روش مساحات وروني

اين روش بر اين اساس پايه گـزارده شـد كـه حالـت نرمال و غير نرمال را بتوان با هم مقايسه كرد.

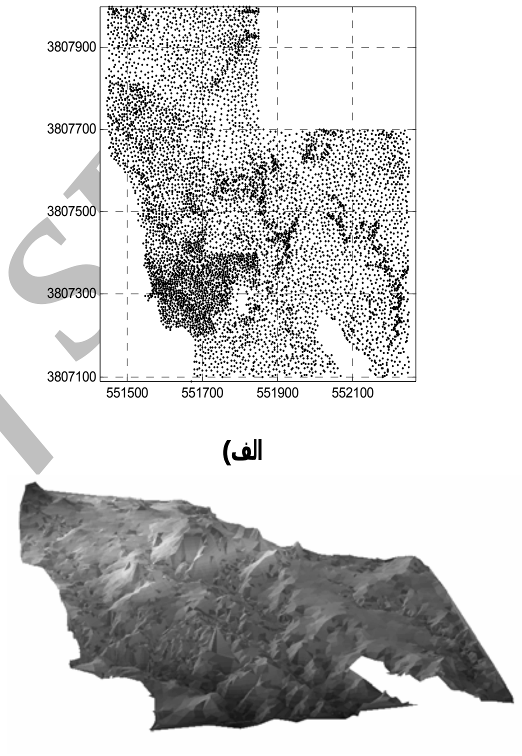
$$\mu_i = A_i ; i = 1,2,3,...,n$$

(۱۷)

g) روش وزن ثابت برابر يک

$$\mu_i = 1 ; i = 1,2,3,...,n$$

(۱۸)



الف)

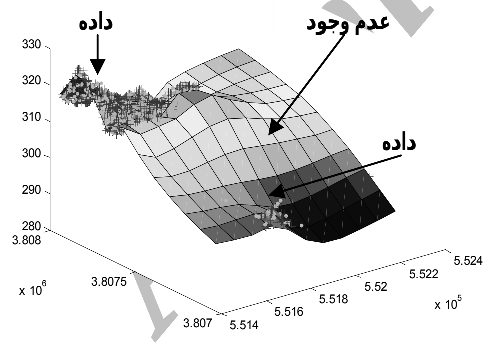
ب)

شكل ۲- الف) : نماي دو بعدي از داده هاي آموزشي ب) نماي ۳ بعدي از داده هاي آموزشي .

پياده سازي و ارزيابي نتايج

در اين پروژه داده هاي ارتفاعي منطقه اي واقع در استان مركزي (شهر اراک) به وسعت ۸۰۴*۹۱۰ مترمربـع كه شامل ۷۳۳۰ نقطه ارتفـاعي بـود مـورد اسـتفاده قـرار گرفت (شكل ۲). براساس تئوري بيان شـده در بخـش۲ و تعيـين وزن هـاي لازم در بخـش۳ برنامـه اي در محـيط MATLAB نوشـته شـد. برنامـه ي مـذكور ابتـدا پـس از دريافـت داده مـشخص مـي كنـد چـه مقـدار از كـل داده انتخاب شود تا مدل TPS روي آن اجـرا شـود؛ بـراي ايـن منظور دو روش انتخاب براي كـاربر در نظـر گرفتـه شـده است. روش انتخاب اول نقاط را بـه همـان ترتيبـي كـه در داده ي اوليه برداشـت شـده و بـدون ايجـاد نظـم در آنهـا انتخاب مي كند. براي اين كار به دو مؤلفه نقطه ي شـروع و تعداد نقاط انتخاب شونده نيـاز دارد. روش انتخـاب دوم، داده را به نظم در آورده و پنجره اي از آن بـر اسـاس يـک شبكه ي m*m استخراج مي كند. مثلاً سـتون اول جـدول (۱) نماينده ي دو نحوه ي انتخاب داده اسـت. سـطر آخـر كه از لحاظ تعداد نقاط متفاوت از ديگر سطرها است نشان دهنده ي روش انتخاب نقـاط بـه شـيوه ي اول اسـت كـه نقطه ي شروع نقطه ي شماره يک است كه تعـداد ۱۵۰۰ نقطه در كل از داده ي اوليه برداشت مـي كنـد. همچنـان سطر های اول اين جدول انتخاب يک پنجره ۵ در ۵ است كه همان شيوه ي دوم انتخاب داده مطرح شده مي باشد.

حـال بـه منظـور مقايـسه ي روشـهاي وزن دهـي مطرح شده در بخش ۳, ۱۰ سري داده با پراكندگي هـاي متفـاوت از داده انتخـاب گرديـد.پـس از اعمـال روشـهاي مطرح شده در اين مقاله روي هر سري داده, براي بدسـت آوردن دقت هر سري داده نقاط كنترل و نقاط چـک[16] بـه نسبت ۲ به ۱ از داده ي گزينش شده انتخاب شد. انحراف معيار و ميانگين باقيمانده ها بر روي نقاط چک بـراي هـر يک از روش هاي وزن دهي محاسبه گرديد كه بـه ترتيـب در جداول (۱) و (۲) و شكل (۴) نتايج حاصل آمده است.



شكل۳ : رفتار TPS در مناطق بدون داده.

نكته جالب رفتار نرم منحني TPS در مناطق بدون داده و عدم وجود افزونگي برونيابي[17] مي باشد (شكل ۳).

همانطور كه انتظار مـي رفـت روشـهاي مـساحات نرمال شده ي ورونـي بـا وزن ثابـتP=1 [روش a] بـدليل برتري قسمت انتگرال پيچش به قسمت نُرم L2 در معادله ي (۲) و بحث صورت گرفته در قسمت (الـف) بخـش۳ در

نزديكي به نقاط كنترل نسبت به ديگر روش هـاي معرفـي شده از خود ضعف نشان مى دهد.

روشهاي ورونـي كـه وزن ثابـت[P]آنهـا مخـالف ۱ باشد پاسخي بهتر از تمامي موارد بحث شـده مـي دهنـد. ولي آنچه آشـكار اسـت جـواب بهينـه ميـان 10^{3} تـا 10^{5} مي باشد, ولي اين مطلب تقريبي بوده مـثلاً در شـكل (۴) بـراي حالـت ۲۴۲ نقطـه, b [P=100] انحـراف معيـاري كوچكتر از مينيمم c، d و e دارد. لذا بايد براي هـر نمونـه, P بهينه را يافت و تنها يک جواب منحصر بـه فـرد وجـود ندارد (شكل ۴ روشهاي b، c، d و e) و اين بر خلاف ايـده ي بهتر شدن جواب در صورت ميل P به سـمت بينهايـت است كه در قسمت (الف) بخش۳ مطرح گرديد.

f همواره پاسخي بهتر از a مي دهد ولي با توجـه به ميزان خطا لزوماً بدتر از b، c، d و e نيست لـذا نتيجـه آنست كه روشهاي نرمال شده در TPS ها برتري فاحشي بـر روش غيـر نرمـال آن ندارنـد (شـكل ۴ روشـهاي (fوe,d,c,b,a .

برخلاف انتظار در تمامي۱۰ حالت مورد آزمـايش, نتايج حاكي از اينست كه اگر وزنهاي μ_i را ثابـت و برابـر يک(روش g) در نظر بگيريم، تفاوت چنـداني ميـان پاسـخ آن و بهتـرين پاسـخ هـاي روش هـاي اسـتفاده كننـده از الگوريتم وروني ندارد (شكل ۴). از طرفي الگـوريتم مزبـور مـشكلاتي را نيـز بـه TPS اضـافه مـي كنـد كـه وزنهـاي ثابت μ_i برابر يک (g) داراي آنها نيستند. ايـن مـشكلات عبارتند از:

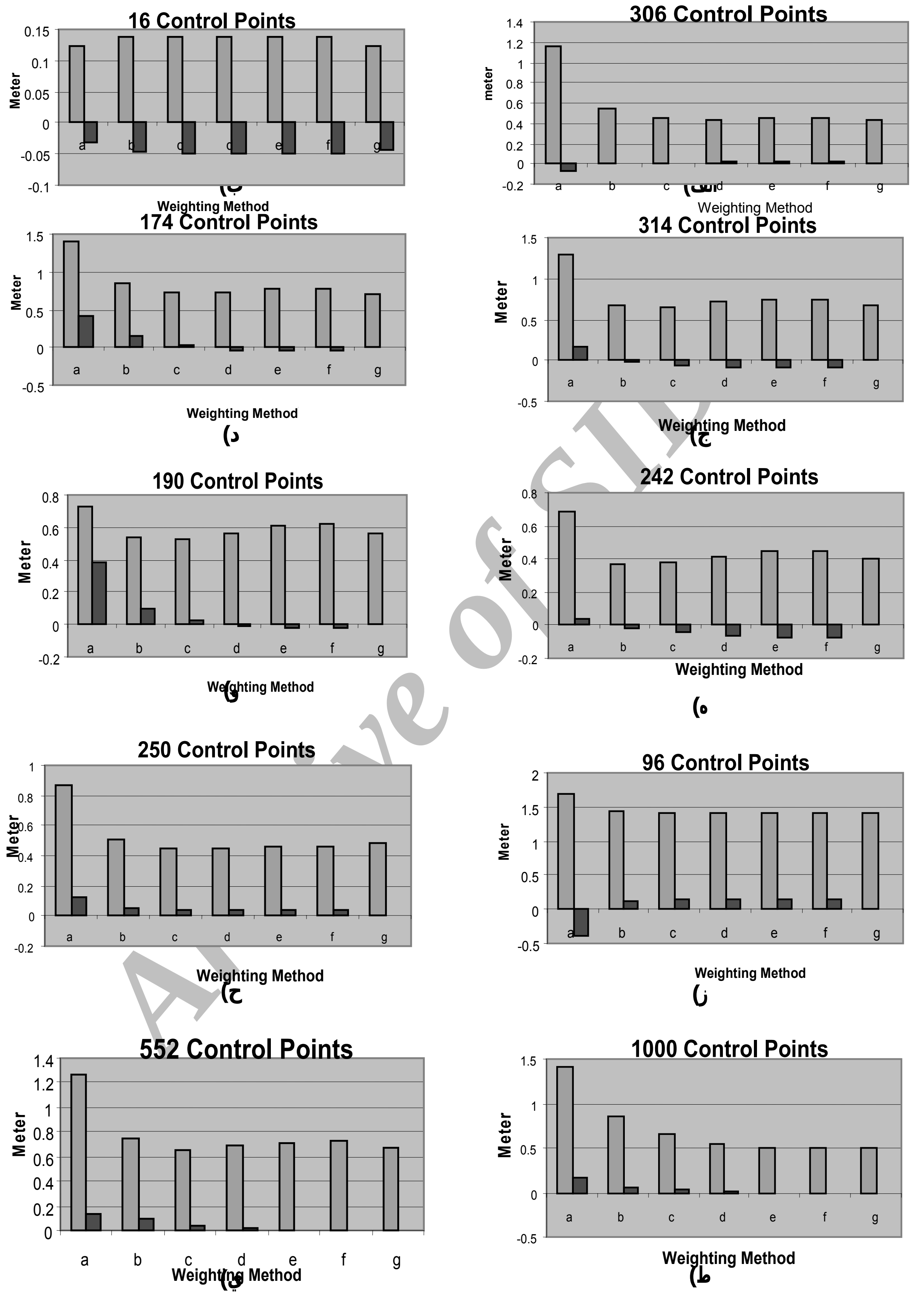
- ✓ امكان وجود بيش از سه مركز ثقل بر روي يک دايـره و ايجاد چند ضلعي محاطي توسـط آنهاسـت(n نقطـه) كه ايـن روش را دچـار ابهـام مينمايـد زيـرا بـيش از C_n^2عمود منصف همـرس خـواهيم داشـت و امكـان تعريف نقاط همسايه را مشكل مي سازد.

جدول ۱: نتايج انحراف معيار مربوط به مجموعه داده ۱.

تعداد نقاط كنترل زميني	روش بكار رفته براي وزن دهي						
	a	b	c	d	e	f	g
16	0.122	0.139	0.138	0.138	0.138	0.138	0.122
174	1.414	0.861	0.717	0.740	0.779	0.783	0.710
190	0.724	0.542	0.521	0.568	0.614	0.622	0.564
250	0.872	0.505	0.453	0.454	0.458	0.457	0.483
552	1.257	0.748	0.660	0.683	0.718	0.723	0.663
306	1.152	0.547	0.452	0.437	0.458	0.460	0.432
314	1.301	0.682	0.641	0.710	0.747	0.749	0.682
242	0.692	0.373	0.382	0.417	0.444	0.447	0.398
96	1.693	1.429	1.410	1.416	1.420	1.420	1.404
1000	1.401	0.867	0.654	0.536	0.507	0.510	0.504

جدول ۲ : نتايج ميانگين مربوط به مجموعه داده ۱.

تعداد نقاط كنترل زميني	روش بكار رفته براي وزن دهي						
	a	b	c	d	e	f	g
16	-0.032	-0.045	-0.048	-0.049	-0.049	-0.049	-0.043
174	0.411	0.140	0.033	-0.034	-0.051	-0.051	-0.020
190	0.385	0.092	0.032	-0.009	-0.023	-0.025	0.001
250	0.123	0.056	0.040	0.040	0.041	0.041	0.035
552	0.140	0.088	0.042	0.021	0.008	0.006	0.016
306	-0.069	0.003	0.005	0.017	0.019	0.019	0.012
314	0.177	-0.009	-0.054	-0.082	-0.093	-0.094	0.010
242	0.040	-0.022	-0.044	-0.068	-0.079	-0.080	-0.061
96	-0.390	0.112	0.133	0.139	0.143	0.143	0.117
1000	0.156	0.049	0.029	0.005	-0.006	-0.010	-0.013



شکل ٤ : مقایسه میانگین و انحراف معیار روشهای مختلف وزن دهی برای تعداد نقاط کنترل متفاوت الف) ٣٠٦ ب) ١٦ ج) ٣١٤ د) ١٧٤ ه) ٢٤٢ و) ١٩٠ ز) ٩٦ ح) ٢٥٠ ط) ١٠٠٠ ي) ٥٥٢ نقطه است که ستون هاي خاکستري کمرنگ معرف انحراف معيار و ستون هاي خاکستري تيره معرف ميانگين مي باشند.

✓ همچنين مسئله ي تعيين چندضلعي هاي حاصل از اين نقاط مي تواند به عنوان يک مسئله ي مهم مطرح گردد که از نظر برنامه نويسي پيچيده و زمانبر مي باشد.

✓ محاسبه ي مساحت چند ضلعي هاي نامنتظم نيز به پيچيدگي هاي برنامه اضافه مي گردد.

لذا لزوم بازبيني در دلايل معرفي روشهاي استفاده كننده از مساحات چند ضلعي هاي وروني بار ديگر اهميت خود را نشان داده و نويسنده را بر آن داشت که آزمايشي ديگر براي آنها ترتيب دهد. كنترل حساس است. بنابراين در ادامه به بررسي اين خاصيت در شرايط خاص TPS ها پرداخته و آزمايشي تعريف شد. به اين صورت که دو ناحيه همسايه از دو مجموعه داده اصلي انتخاب گرديد. اولي(I) داراي ۴۵۴ نقطه و دومي (II) ۴۷۳ نقطه داشت.

نقاط کنترل و چک به نسبت ۲ به ۱ جدا شده تا خطاي سطح ايجاد شده توسط نقاط کنترل با استفاده از نقاط چک تعيين گردد. چگالي نقاط کنترل در I, ۱۰ نقطه در کيلومتر مربع و در داده II، ۱۰ نقطه در کيلومتر مربع بود. خطاها براي ترکيب دو سري داده ي فوق محاسبه شد که نتايج در جداول (۳) و (۴) آورده شده است.

سپس در مر حله ي بعد داده ي منطقه ي I تغيير داده نشد و تنها داده ي منطقه ي II نصف گرديد و به ۲۳۶ نقطه رسيد. دوباره نقاط کنترل و چک به نسبت ۲ به ۱ جدا شد و چگالي نقاط کنترل در II به ۵ نقطه در کيلومتر مربع يعني کمتر از نصف II تقليل يافت که نتايج مربوط به آن در سطر I+½II جداول (۳) و (۴) آورده شده است.

در ادامه در حاليکه هنوزمنطقه ي I دست نخورده باقي مانده است داده ي منطقه يII ½ دوباره نصف و به ۱۱۹ نقطه رسانده شد که چگالي در اين حالت تقريباً ۲ نقطه در کيلومتر مربع يعني به کمتر از يک چهارم II تقليل يافت. نتايج در جدول (۳) و (۴) در سطرI+¼II نشان داده شده است.

حال براي آخرين بار داده ي منطقه ي ¼II نصف گرديده و به ۶۰ نقطه رسيد در حاليکه چگالي نقاط کنترل که به نسبت ۲ به ۱ انتخاب شده بودند به ميزان تقريباً ۱ نقطه در کيلومتر مربع يعني به يک هشتم II رسيد. نتايج درسطرI+⅛II در جداول (۳) و (۴) نشان داده شده است.

در شکل (۵) نمايي دو بعدي از داده هاي تغيير يافته براي چگالي هاي مختلف نشان داده شده است, آنچه انتظار مي رفت اين بود که چون در روش وزنهاي μ_i ثابت و برابر يک(روش g) نسبت به چگالي حساسيت نداشت و با تغيير چگالي نقاط وزن ها تغيير نمي يافتند مي بايست با کاهش چگالي در قسمتي از منطقه, پاسخ آن نسبت به الگوريتم وروني دچار ضعف گردد. ولي چنانچه در شکل (۶) ملاحظه مي شود روش وزنهاي ثابت μ_i برابر يک (روشg) حتي در زماني که چگالي نقاط به يک هشتم داده ي اوليه مي رسد, خطايي نزديک به روشهاي وروني حاصل مي نمايد و دچار ضعف نگشته و از بافت پيشبيني شده تبعيت نمي کند. در شکل (۷) رفتار هريک از روشهاي وزن دهي نشان داده شده است, اين شکل نشان مي دهد با تغيير چگالي حتي روشهاي وروني با وزنهاي P, ۱۰۰ تا ۱۰۰۰۰ نيز از يک فرم کلي تبعيت نمي کنند و هيچکدام از نتايج يک منحني صعودي يا نزولي نمي‌شود. لذا اين نتيجه گرفته شد که در کمال تعجب روش TPS به چگالي نقاط حساسيت ندارد.

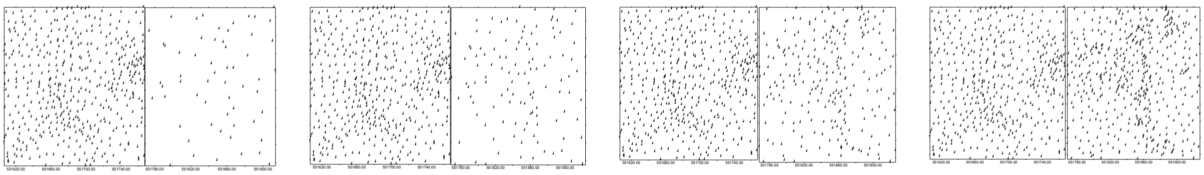
آنچه در اين بخش ذکر شد نشان مي دهد براي اين راه حل خاص اسپيلاين هاي صفحات نازک با وزن ثابت يکي از بهترين گزينه هاي وزن مي باشد؛ اين حالت علاوه بر اينکه جوابي قابل قبول مي دهد, نياز به محاسبات پيچيده ندارد و روش TPS را به صورت روشي متحدالشکل براي داده هاي گوناگون در مي آورد که چگالي داده براي آن مهم نيست.

جدول ۳: نتايج انحراف معيار مربوط به پراكندگی های مختلف داده I و II.

چگالي داده	روش بكار رفته براي وزن دهي						
	a	b	c	d	e	f	g
I+II	1.789	0.816	0.637	0.583	0.595	0.609	0.581
I+½II	1.308	0.685	0.623	0.634	0.634	0.635	0.615
I+¼II	2.638	1.004	0.648	0.648	0.622	0.638	0.620
I+⅛II	1.690	0.578	0.578	0.534	0.545	0.554	0.531

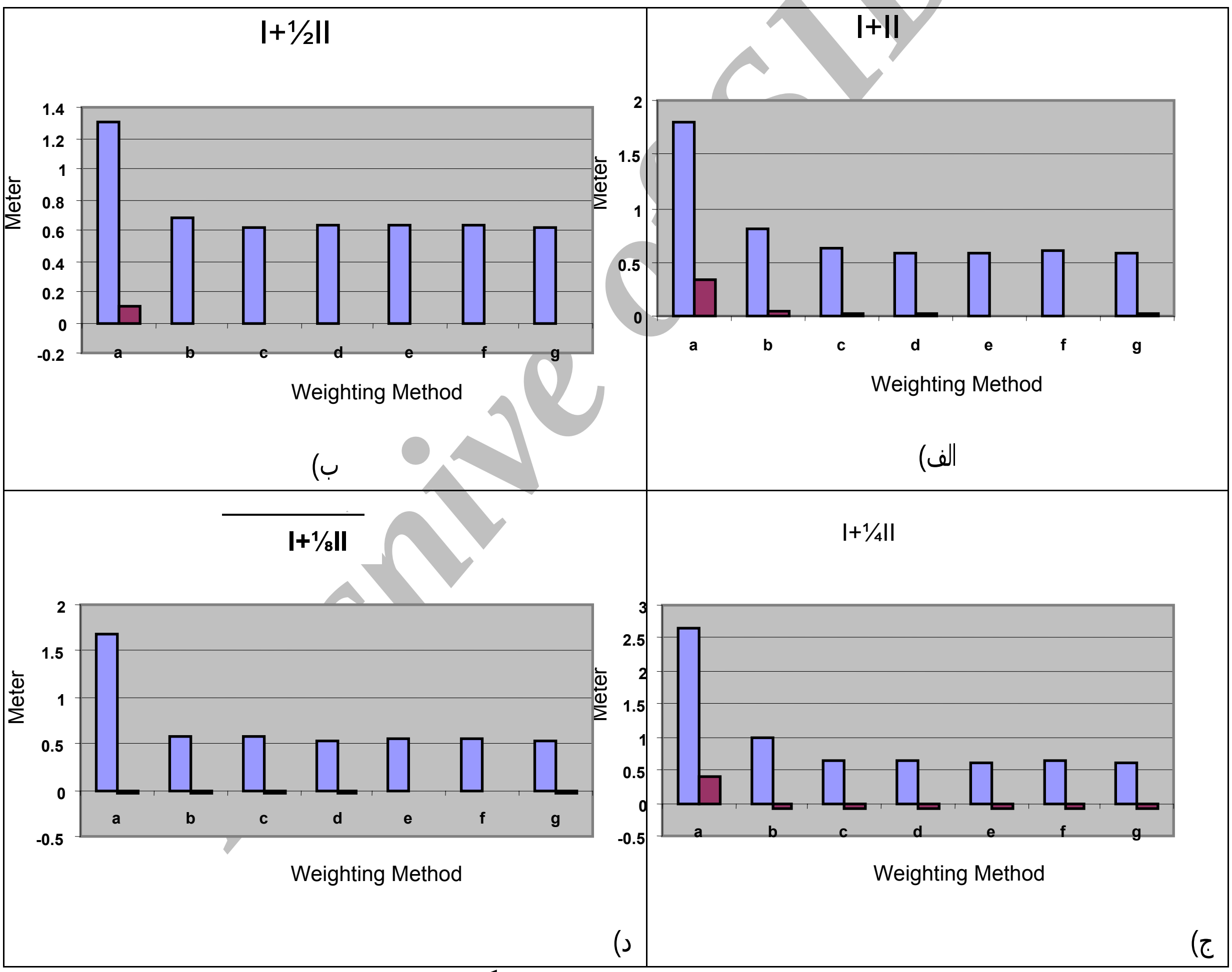
جدول ٤: نتايج ميانگين مربوط به پراکندگی های مختلف داده I و II.

چگالي داده	روش بکار رفته براي وزن دهي						
	a	b	c	d	e	f	g
I+II	0.342	0.046	0.021	0.017	0.010	0.003	0.011
I+½II	0.110	-0.014	-0.013	-0.001	-0.001	-0.001	-0.009
I+¼II	0.412	-0.084	-0.090	-0.090	-0.081	-0.077	-0.082
I+⅛II	-0.045	-0.038	-0.038	-0.025	-0.017	-0.017	-0.026



الف) ب) ج) د)

شکل ۵ : پراکندگی نقاط در چگاليهای مختلف که مربع چپ با چگالي داده I و مربع راست الف) با چگالي داده II؛ ب) با نيمي از چگالي داده II؛ ج) با يك چهارم چگالي داده II و د) با يك هشتم چگالي داده II.



شکل ۶ : مقايسه روشهای مختلف برای چگاليهای متغير شکل ۵.

نتيجه گيري

TPS ها به عنوان روشي كه حساسيت به چگالي داده ندارند مي توانند براي برازش سطوح در نقشه برداري نوين نقشي قدرتمند ايفا كنند چرا كه معمولاً در نقشه برداري منابع داده گوناگون است و لزوماً چگالي داده ي توليد شده از روشهاي متفاوت يكسان نيست و اين تعيين وزن ها از مباحث هميشگي در نقشه برداري به نظر مي رسد. از طرف ديگر با استفاده از TPSو عدم كاربرد روش وروني كه سبب محدوديت هايي در تعداد نقاط كنترل و سرعت عمليات مي گردد مي توان سطحي رياضي را بر

خلاف روشهايي همچون BSPline ها بر تمام داده در يک بار پردازش برازاند. از آنجاکه روش مستقيم حل مسئله يک فرم رياضي عاري از مقياس را مي دهد مي توان در نرم افزار هاي CAD/CAM نيز از آن استفاده نمود.

آنچه که به نظر مي رسد اينست که استقلال از چگالي مي بايست از خواص اسپيلاين هاي صفحات نازک باشد از اين رو پيشنهاد مي شود مطالعاتي بر روي ديگـر روشـهاي حل معادله ي TPS مانند روشـهاي تكـراري مطـرح شـده توسط فرانک ۱۹۸۲[14] صورت گيرد. چرا که حداقل نشان دهنده ي اين است که اين روش در مناطق چگـال و غيـر چگال با خطايي تقريباً مشابه جوابگوست. بـه هـر صـورت استفاده از اين روش بدليل عدم وجـود افزونگـي درونيـابي براي مناطق تپه ماهوری با داده ي کافي پيشنهاد مي شود زيرا که تغييرات يک منطقه بر روي منطقه ي مجاور تأ ثير زيادي ندارد.

تغيير در مختصات، حذف و يا جابجـايي يـك نقطـه در روش حل ذکر شده در اين مقاله منجر به تکرار محاسـبات ميگردد چرا که يك نقطه در تمامي نقاط ديگر تأثير گذار است. لذا تحقيق بر روي روشي کـه ويـرايش نقـاط سـبب انجام محاسبات TPS کمتر گردد بسيار مفيد خواهد بود.

مراجع

1 - Bazen, A. M. and Gerez, S. H. (2002). "Thin-Plate Spline modelling of elastic deformations in fingerprints." *3rd IEEE Benelux Signal Processing Symposium* (SPS-2002)., Leuven, Belgium, March 21-22.

2 - Billings, Stephen D., Beatsonz, Rick K., and Newsam, Garry N. (2002). "Interpolation of geophysical data using continuous global surfaces." *GEOPHYSICS*, Vol. 67, No. 6.

3 - Boztosun, I., Chara, A., Zerroukat, M. and Djidjeli, K. (2002). "Thin-plate spline radial basis function scheme for advection-diffusion problems." *Electronic Journal of Boundary Elements,* Vol. BETEQ 2001, No. 2, PP. 267-282.

4 - Duchon, J. (1976). "Interpolation des fonctions de deux variables suivant le principe de la flexion des plaques minces." *RAIRO Analyse Numérique 10*, PP.5-12.

5 - Franke, R. (1982). "Smooth interpolation of scattered data by local thin plate splines." *Computing and Mathematics with Applications 8*, PP.273–281.

6 - Goncalves, G., Julien, P., Riazanoff, S. and Cervelle, B. (2002). "Preserving cartographic quality in DTM interpolation from contour lines." *ISPRS 56* (2002), PP.210-220.

7 - Gousie, M. B. *Converting Elevation Contours to a Grid*.

8 - Jenkins, David R. (2000). "Thin plate spline interpolation on an annulus." *ANZIAM J. 42* (E), PP. C819{C836, 2000 C819, 7 August 2000.

9 - Maillet, Gregoire *DSM reconstruction, Manual of photogrammetry.*

10 - Meinguet, J. (1979). "Multivariate interpolation at arbitrary points made simple." *J. Appl. Math. Phys.* Vol. 30, PP.292-304.

11 - Pedersen, Lars. (2000). *Estimation of Thin Plate Spline warp parameters from protein spot positions in 2d electrophoresis gels*.

12 - Sjowall, Aldona. (2001). *Short Report on OrthoEngine*. Vilnius 2001, PP.04-08.

13 - http://mathworld.wolfram.com

14 - http://www.bentley.com/products/descartes

واژه هاي کليدي به ترتيب استفاده در متن

1 - Thin plate splines
2 - J. Duchon
3 - Radial Bases Functions
4 - J. Meinguet
5 - Sjowall
6 - IKONOS
7 - Digital Elevavation Model
8 - Boztosun
9 - Interpolation
10 - Approximation
11 - Digital Terrian Model (DTM)
12 - C. Carasso
13 - Orthogonal-triangular decomposition
14 - Rank
15 - Voronoi Polygons
16 - Check Point
17 - ExtraPolation