تعیین مقدار بهینه تولید با دوباره کاری اقلام خراب و هزینه انتظار برای دوباره‌کاری

علیرضا حجی
استادیار دانشکده مهندسی صنایع - دانشگاه صنعتی شریف
ahaji@sharif.edu
رسول حجی
استاد دانشکده مهندسی صنایع - دانشگاه صنعتی شریف
haji@sharif.edu
(تاریخ دریافت ۸۵/۱/۲۸ ، تاریخ دریافت روایت اصلاح شده ۸۵/۴/۳ ، تاریخ تصویب ۸۵/۷/۸)

چکیده

این مقاله تاثیر دوباره‌کاری اقلام خراب در مقدار اقتصادی تولید[1] (EBQ) را که در آن کمبود اقلام مجاز نیست درنظر می‌گیرد. در مدل کلاسیک EBQ فرض براین است که کل اقلام تولیدی بصورت سالم در هر دور تولید می‌شوند. ولی، در عمل بعلت فرسودگی یا عوامل دیگر اقلام خراب نیز در فرایند تولید ایجاد می‌شوند. در این تحقیق فرض شده است که در هر دور تولید، بعد از اتمام فرایند عادی تولید بلافاصله فرایند دوباره‌کاری اقلام خراب پس از یک زمان آماده سازی غیر صفر شروع می‌شود. در ایجاد مدل ریاضی در این مقاله علاوه‌بر هزینه‌هایی که در مدل کلاسیک EBQ وجود دارد، هزینه‌های بازرسی، هزینه‌های دوباره‌کاری و نگهداری موجودی هر قلم خراب، هزینه آماده سازی برای هر بار دوباره‌کاری اقلام خراب، و هزینه زمان انتظار اقلام خراب برای دوباره‌کاری در نظر گرفته شده است و مقدار بهینه دسته تولید که مجموع هزینه‌های فوق را کمینه می‌کند بدست آمده است.

واژه‌های کلیدی: تعمیر اقلام خراب، مقدار اقتصادی تولید با دوباره کاری، بهینه سازی

مقدمه

استفاده از مدل ریاضی برای کمینه کردن هزینه های موجودی در سال ۱۹۱۵، وقتی که مدل مقدار اقتصادی سفارش[2] (EOQ) برای اولین بار توسط هریس [۲] معرفی شد، شروع گردید.

مدل سازی ریاضی و تحلیل آن که بوسیله مدل EOQ مورد استفاده قرار گرفت به شرح فرایند نگهداری موجودی و تعیین مقدار بهینه سفارش می پردازد. با وجود سادگی، هنوز مدل EOQ امروزه در موسسات صنعتی مورد استفاده قرار می‌گیرد[۱۱، ۱۳]، تحقیقات زیادی در مورد عملی تر کردن مدل EOQ با توجه به فرضیات غیر واقعی آن انجام گرفته است [۱۰، ۱۲]. در بخش ساخت و تولید، وقتی اقلام بجای خرید از منابع بیرونی در داخل شرکت تولید می‌شوند، غالباً از مدل مقدار تولید اقتصادی EBQ برای تعیین اندازه بهینه هربار تولید محصول استفاده می شود. در مدل EBQ فرض می شود یک دستگاه قابل اطمینان تمام اقلام را با یک نرخ تولید ثابت و به طور سالم تولید می‌کند و در فرایند تولید هیچگونه اقلام خرابی تولید نمی‌شود. ولی در عمل بسیاری از شرایط وجود دارند که در آنها مقداری اقلام خراب، علاوه بر اقلام سالم، تولید می‌شوند. بر اساس مقدار اقلام خراب تولید شده مقدار دسته تولید اقتصادی نیز با توجه به هزینه‌های آماده سازی، و هزینه فرآیند تولید و موجودی تغییر می‌کند. در سیستم های تولیدی که فرایند دوباره کاری (تعمیر) اقلام خراب وجود ندارد این اقلام به صورت ضایعات در آمده و در نتیجه بخشی از منافع موسسه از بین می‌رود.

تعداد کمی از پژوهشگران مساله دوباره کاری اقلام خراب را در نظر گرفته‌اند. گویال و گناشه خاران [۱] اثر کنترل فرایند را در نظر گرفتند ولی شرایط تولید خرابی ها را نادیده گرفتند. هیگ و سالامه [۴]، لی [۷]، و لی و

Archive of SID

www.SID.ir

روزنبلت [۹] موضوع تولید خرابی‌ها و کنترل کیفی را در مسئله تعیین دسته تولید بیان داشتند. لی، چاندارا، و دل ویوکس [۸] یک مدل تعیین اندازه تولید در یک سیستم تولید چند مرحله‌ای را، با در نظر گرفتن کسرهای مختلف محصولات خراب تولید شده در هر مرحله تولید، ارائه دادند. ولی آنها گزینه دوباره کاری اقلام خراب را در نظر نگرفتند. جمال، سارکر، و موندال [۵] مسئله مقدار اقتصادی تولید با توجه به فرایند دوباره کاری محصولات خراب را بررسی کردند و مقدار اقتصادی تولید را برای دو روش مختلف در حالت تک محصولی به دست آوردند. آنها با نادیده گرفتن (الف) وجود زمان آماده سازی برای هر بار فرایند دوباره کاری، (ب) هزینه‌های زمان انتظار اقلام خراب برای دوباره کاری در همان دوری که تولید می‌شوند، (ج) هزینه‌های بازرسی، و نیز (د) با یکسان گرفتن هزینه های فرآیند عادی تولید و فرآیند دوباره کاری برای هر واحد محصول و صرفنظر کردن از تفاوت این دو هزینه مقدار اقتصادی هر بار تولید محصول را بدست اوردند.

در این مقاله با در نظر گرفتن نکات فوق، که عموما در شرایط عملی تولید وجود دارند، مساله تعیین مقدار بهینه تولید را برای حالتی که در فرایند عادی تولید اقلام خراب نیز تولید می شوند و امکان دوباره کاری این اقلام خراب توسط دستگاه تولید وجود دارد بررسی شده است. در هر دور تولید، پس از فرایند تولید عادی دستگاه برای انجام فرایند دوباره کاری آماده سازی می شود. در این تحقیق، در مدل ریاضی برای تعیین دسته تولید بهینه، علاوه بر هزینه‌های مدل کلاسیک EBQ ، هزینه‌های دوباره کاری اقلام خراب و هزینه های نگهداری موجودی اقلام دوباره کاری شده، هزینه های بازرسی، هزینه‌های زمان انتظار اقلام خراب برای دوباره‌کاری و نیز هزینه آماده سازی برای فرایند دوباره کاری اقلام خراب در هر دور در نظر گرفته شده است. در این مطالعه مقدار بهینه تولید با کمینه سازی مجموع هزینه‌های فوق به دست آمده است.

فرضیات

در این مقاله از فرضیات زیر استفاده شده است:

- نرخ تقاضا برای محصول ثابت است.
- نرخ تولید مقادیر سالم برای محصول ثابت و بزرگتر از نرخ تقاضای آن محصول است.
- اقلام خراب تولید شده قابل دوباره کاری هستند و پس از دوباره کاری به صورت سالم در می آیند.
- کمبود مجاز نیست. یعنی تمام تقاضای محصول باید برآورده شود.
- برای فرآیند تولید عادی و دوباره کاری از منابع یکسانی استفاده می شود.
- سرعت کار منابع چه در حالت تولید عادی و چه در حالت دوباره کاری یکسان است.
- زمان آماده سازی برای هر بار فرایند دوباره کاری محصولات می تواند غیر صفر باشد.

مدل

در این مدل در هر دور تولید بلافاصله پس از تولید محصول عملیات دوباره کاری روی خرابی های محصول انجام می گیرد. برای جلوگیری از کمبود موجودی نه تنها باید نرخ تولید محصول بزرگتر از نرخ تقاضای آن محصول باشد بلکه باید نرخ تولید مقدار سالم محصول نیز بزرگتر از نرخ تقاضای آن باشد. یعنی،

$$P(1-\beta) > D \qquad (1)$$

وجود این رابطه با توجه به شکل (۱) در طول زمان t_1 مشخص می شود.

به علاوه، تولید اقلام سالم در طی مدت t_1 باید مقدار تقاضا در طول زمان آماده سازی S_2 را نیز برآورده کند. یعنی،

$$P(1-\beta-D)t_1 > DS_2$$

با توجه به شکل (۱) در طول مدت t_1 محصول با نرخ P تولید می شود ولی مقدار سالم آن با نرخ $P(1-\beta)$ تولید و موجودی مقادیر سالم محصول با نرخ $[P(1-\beta)-D]$ انباشته می شود. بعد از مدت زمان t_1 بلافاصله دستگاه برای دوباره کاری اقلام خراب تولید شده در طی مدت S_2 آماده سازی می شود. سپس دوباره کاری روی اقلام خرابی که در طول t_1 تولید شده‌اند شروع و در طول t_2 فرایند دوباره کاری با نرخ P انجام و موجودی محصول سالم با نرخ $(P-D)$ انباشته می شود. فرض شده است که در طول فرایند دوباره کاری یعنی در طول زمان t_2، به علت دقت عملیات یا توجه خاص مسئول تولید، هر محصول خراب به صورت سالم در می‌آید.

Archive of SID

www.SID.ir

می توان به آسانی نشان داد که طول زمان تولید عادی محصول در هر دور، t_1، و طول زمان دوباره کاری خرابی‌های محصول در هر دور، t_2، به ترتیب برابرند با

$$t_1 = \frac{Q}{P} = \frac{D}{P}T \quad (۲)$$

$$t_2 = \beta\frac{Q}{P} = \beta\frac{D}{P}T \quad (۳)$$

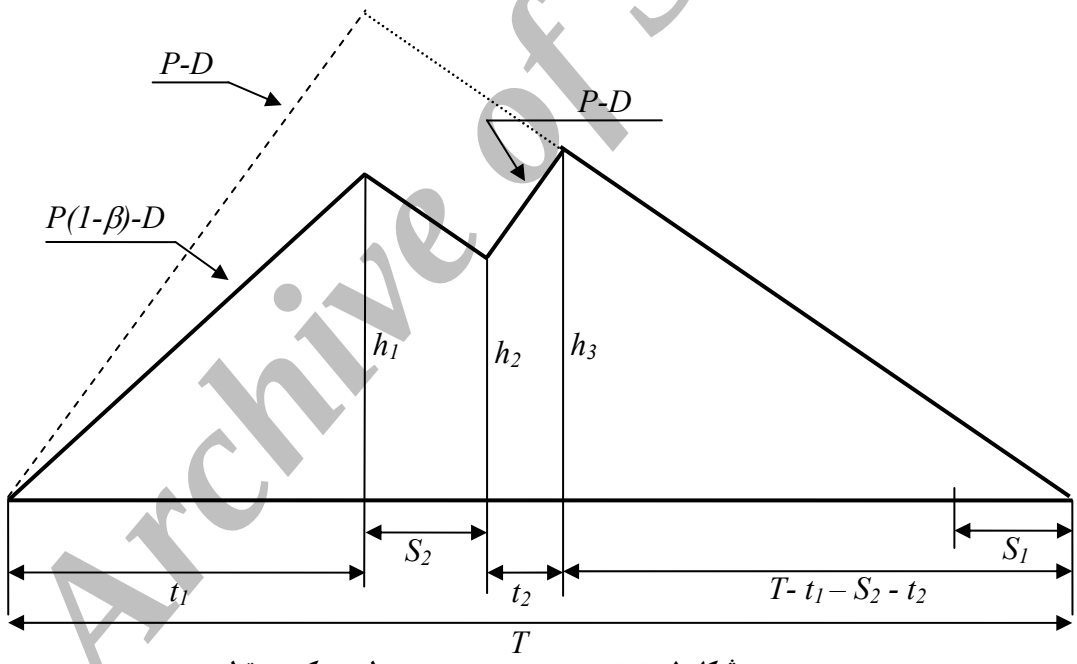
مقدار موجودی محصول سالم در انتهای t_1 ، در انتهای $S_2 + t_1$ و در انتهای $t_1 + S_2 + t_2$ را به ترتیب با h_1، h_2 و h_3 نشان می‌دهیم. با توجه به شکل (۱)

$$h_1 = [P(1-\beta) - D]t_1 \quad (۴)$$

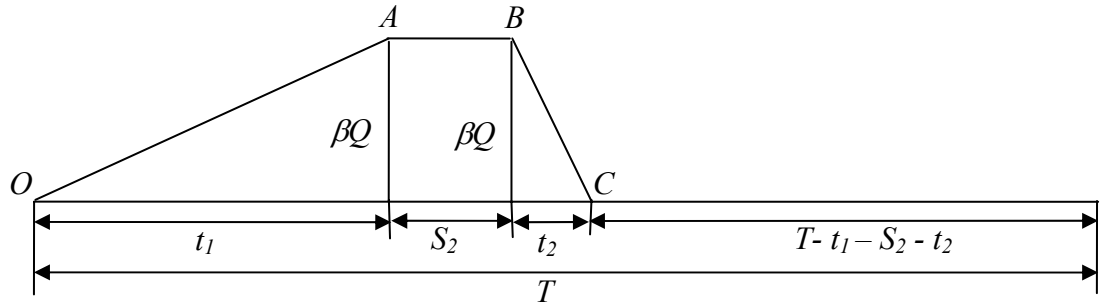
$$h_2 = h_1 - DS_2 \quad (۵)$$

$$h_3 = h_2 + (P-D)t_2 = h_1 - DS_2 + (P-D)t_2 \quad (۶)$$

هزینه تولید محصول شامل هزینه‌های آماده سازی، هزینه فرآیند عادی تولید، هزینه های بازرسی، و هزینه‌های نگهداری موجودی است. باید توجه کرد که در طی مدت آماده سازی و دوباره‌کاری، $S_2 + t_2$، مجدداً سیستم متحمل هزینه‌های آماده سازی، هزینه‌های فرایند عملیات دوباره کاری برای تعمیرات خرابی‌های محصول، و هزینه‌های نگهداری موجودی محصولات سالم ناشی از دوباره کاری اقلام خراب خواهد شد. بعلاوه، در طی مدت $t_1 + S_2 + t_2$ صف اقلام خراب (شکل ۲) در حال انتظار برای دوباره کاری وجود دارد و هزینه کل زمان انتظار اقلام خراب نیز به سیستم تولید تحمیل می گردد.



شکل ۱: منحنی موجودی در دست محصول در یک دور تولید.



شکل ۲: منحنی صف اقلام خراب منتظر دوباره کاری توسط دستگاه در هر دور تولید.

Archive of SID
www.SID.ir

اگر هزینه آماده سازی سالیانه برای هر دور تولید را با K_S نشان دهیم. در این صورت

$$K_S = \frac{D}{Q}(A_1 + A_2) = \frac{A_1 + A_2}{T}$$

(۷)

اگر متوسط موجودی محصول را با $\bar{I}$ نشان دهیم، متوسط موجودی را باتوجه به شکل (۱) می‌توان به صورت زیر نوشت.

$$\bar{I} = \frac{1}{2T}\left[h_1 t_1 + (h_1 + h_2)S_2 + (h_2 + h_3)t_2 + h_3(T - t_1 - S_2 - t_2)\right]$$

با جانشین کردن مقادیر t_1، t_2 از روابط (۲) و (۳) ومقادیر h_1، h_2 و h_3 از روابط (۴)، (۵) و (۶) در رابطه فوق داریم

$$\begin{aligned}\bar{I} = \frac{1}{2T}\Bigg\{&[P(1-\beta)-D]\frac{D^2T^2}{P^2} + \\ &\left[2[P(1-\beta)-D]\frac{DT}{P} - DS_2\right]S_2 + \\ &2\left[[P(1-\beta)-D]\frac{\beta DT}{P} - DS_2\right]\frac{\beta DT}{P} + \\ &(P-D)\frac{\beta^2 D^2 T^2}{P^2} + \\ &\left[[P(1-\beta)-D]\frac{DT}{P} - DS_2 + (P-D)\frac{\beta DT}{P}\right]\times \\ &\left[T - (1+\beta)\frac{DT}{P} - S_2\right]\Bigg\}\end{aligned}$$

که با ساده سازی این رابطه به صورت زیر در می آید.

$$\bar{I} = \frac{1}{2}\left[P - D - \beta D(1+\beta)\right]\frac{D}{P}T - \beta D S_2$$

(۸)

بنابراین اگر هزینه نگهداری سالیانه را با K_H نشان دهیم آنگاه با توجه به (۸) داریم:

$$K_H = \frac{H}{2}\left[P - D - \beta D(1+\beta)\right]\frac{D}{P}T - H\beta D S_2$$

(۹)

حال هزینه فرایند عملیات سالیانه را با K_O نشان می دهیم. برای تعیین K_O ابتدا توجه می کنیم که در هر دور تولید هزینه فرایند عملیات تولید در طی مدت t_1 برابر است با $C_1 Q$ و هزینه فرایند عملیات دوباره کاری مقدار βQ واحد خراب، تولید شده در t_1، برابر است با $\beta C_2 Q$ و مجموع این دو هزینه در هر دور برابر است با $(C_1 + C_2\beta)Q$. بنا بر این هزینه سالیانه فرایند عملیات تولید و دوباره‌کاری، K_O، برابر است با:

$$\begin{aligned}K_O &= \left[(C_1 + C_2\beta)Q\right]\frac{1}{T} \\ &= (C_1 + C_2\beta)D\end{aligned}$$

(۱۰)

اگر هزینه زمان انتظار اقلام خراب برای دوباره کاری را در هر دور با $K_w(T)$ نشان دهیم، آنگاه طبق شکل (۲) مقدار کل هزینه زمان انتظار در یک دور برابر است با حاصل ضرب سطح زیر ذوزنقه $OABC$ در C_w هزینه زمان انتظار هر واحد خراب در واحد زمان. یعنی:

$$\begin{aligned}K_w(T) &= C_w\left[\frac{\beta Q}{2}t_1 + \beta Q S_2 + \frac{\beta Q}{2}t_2\right] \\ &= C_w\beta Q\left(\frac{t_1 + t_2}{2} + S_2\right)\end{aligned}$$

با جانشین کـردن مقـادیر t_1 و t_2 از روابـط (۲) و (۳) در رابطه فوق داریم:

$$K_w(T) = C_w\beta Q\left(\frac{Q(1+\beta)}{2P} + S_2\right)$$

و چون $Q = DT$ می توان نوشت:

$$K_w(T) = C_w\beta D\left(\frac{DT(1+\beta)}{2P} + S_2\right)T$$

اگر هزینه سالیانه زمان انتظار را با K_w نشان دهیم آنگاه

$$\begin{aligned}K_w &= \frac{1}{T}K_w(T) \\ &= C_w\beta\frac{D^2T}{2P}(1+\beta) + C_w\beta D S_2\end{aligned}$$

(۱۱)

هزینه سالیانه بازرسی در هر دور برابر است با مجموع هزینه بازرسی Q واحد در طی تولید عادی و هزینه بازرسی βQ واحد در طی فرآیند دوباره کاری، یعنی این هزینه برابر است با $lQ + m\beta Q$. بنابراین اگر هزینه کل بازرسی در سال را با K_B نشان دهیم آنگاه با توجه به اینکه $Q = DT$ داریم

$$K_B = \frac{1}{T}\left[lQ + m\beta Q\right] = D\left(l + m\beta\right)$$

(۱۲)

هزینه کل سالیانه

اگر هزینه کل سالیانه برای محصول را بـا K نشـان دهیم آنگاه می توان K را از جمع روابط (۷)، (۹)، (۱۰)، (۱۱)، و (۱۲) به دست آورد. یعنی:

Archive of SID

www.SID.ir

$$K=(C_1+C_2\beta)D-H\beta DS_2+D(l+m\beta)+C_w\beta DS_2+\frac{(A_1+A_2)}{T}+\{H[P-D-\beta D(1+\beta)]+C_w\beta(1+\beta)D\}\frac{DT}{2P} \quad (۱۳)$$

به آسانی می‌توان با دو بار مشتق گیری از تابع فوق بر حسب T نشان داد که این تابع محدب است. بنا بر این با مشتق گیری از این تابع و مساوی صفر قرار دادن آن مقدار بهینه T، T^*، به صورت زیر به دست می‌آید.

$$T^*=\sqrt{\frac{2(A_1+A_2)P}{HD[P-D-\beta D(1+\beta)]+C_w\beta(1+\beta)D^2}} \quad (۱۴)$$

بنابراین مقدار بهینه هر بار تولید محصول برابر است با $Q^*=DT^*$.یعنی:

$$Q^*=\sqrt{\frac{2(A_1+A_2)PD}{H[P-D-\beta D(1+\beta)]+C_w\beta(1+\beta)D}} \quad (۱۵)$$

برای حالت $\beta=0$، چون آماده سازی برای دوباره کاری وجود ندارد بنابراین در رابطه (۱۴) باید A_2 نیز برابر صفر در نظر گرفته شود. ملاحظه می شود که در حالت $\beta=0$ رابطه (۱۵) درست همان رابطه مقدار بهینه هر بار تولید را به دست می‌دهد[۳] و [۶]. یعنی

$$Q^*=\sqrt{\frac{2DA}{H(1-\frac{D}{P})}}$$

مثال عددی

در یک سیستم تولیدی مقدار تقاضا برای محصول (D) ۳۰۰ واحد در سال، نرخ تولید (P) ۵۵۰ واحد در سال، هزینه نگهداری هر واحد (H) ۵۰ واحد پول در سال، هزینه آماده سازی برای تولید عادی (A_1) ۵۰ واحد پول در هر بار، هزینه انتظار برای دوباره کاری (C_w) واحد پول در سال، هزینه آماده سازی برای دوباره کاری اقلام خراب (A_2) ۵۰ واحد پول در هر بار است.

کسر اقلام خراب در تولید عادی (β) برابر ۰/۰۵ است. برای این سیستم تولیدی مقدار بهینه تولید Q^* را می توان با گذاشتن مقادیر پارامترهای فوق در معادله (۱۵) برابر ۳۹/۸۳ = Q^* واحد به دست آورد.

بدون در نظر گرفتن هزینه آماده سازی و هزینه زمان انظار مقدار اقتصادی تولید برای این مثال برابر ۳۸ = Q^* واحد است [۵].

نتیجه گیری

در این تحقیق مساله تعیین مقدار اقتصادی تولید در حالتی که کمبود موجودی مجاز نیست و اقلام خراب در مدت تولید عادی ایجاد می شوند مورد بررسی قرار گرفته است. در مدل کلاسیک مقدار اقتصادی تولید EBQ فرض براین است که کل اقلام تولیدی به صورت سالم تولید می شوند. در صورتیکه در عمل به علت عوامل مختلف در فرایند تولید عادی ممکن است اقلام خراب نیز تولید شوند. در این مقاله با فرض اینکه امکان دوباره کاری اقلام خراب وجود دارد و زمان آماده سازی ماشین برای دوباره کاری اقلام خراب می تواند غیر صفر باشد مقدار بهینه هر بار تولید که مجموع هزینه های نگهداری، آماده سازی، دوباره کاری، بازرسی، زمان انتظار، و فرایند تولید را کمینه می‌کند به دست آمده است.

نماد ها

در این مقاله از نماد های زیر استفاده شده است:

T = طول زمان هر بار تولید که در آن علاوه بر محصولات سالم محصولات خراب نیز تولید می‌شوند.

S_1 = مدت زمان آماده سازی ماشین برای هر بار فرآیند تولید عادی.

S_2 = مدت زمان آماده سازی ماشین برای هر بار فرایند دوباره کاری اقلام خراب درهربار تولید.

C_1 = هزینه فرایند تولید عادی برای هر واحد محصول (واحد/ تومان).

C_2 = هزینه فرایند دوباره کاری برای هر واحد محصول خراب (واحد/ تومان).

D = نرخ تقاضای محصول (سال/ واحد).

P = نرخ تولید محصول (سال/ واحد).

Q = مقدار تولید هر بار محصول.

β = کسر خرابی محصول در هر دور تولید.

A_1 = هزینه آماده سازی ماشین برای هر بار تولید عادی محصول.

Archive of SID

www.SID.ir

A_2 = هزینه آماده سازی ماشین برای دوباره‌کاری اقلام خراب در هر بار تولید.

H = هزینه نگهداری هر واحد محصول در سال (سال-واحد/ تومان).

C_w = هزینه زمان انتظار هر واحد محصول خراب در سال (سال-واحد/ تومان).

l = هزینه بازرسی هر واحد در فرآیند تولید عادی (واحد/ تومان).

m = هزینه بازرسی هر واحد در فرآیند دوباره کاری اقلام خراب (واحد/ تومان).

مراجع

1 - Coyol, S. K. and Gonashekharan, A. (1990). "Effect of dynamic process quality control on the economic production." *International Journal of Operations and Production Management,* Vol. 10, No. 3, PP.69-77.

2 - Harris, F. (1915). *Operations and Cost. (Factory Management series)*, Chicago, A. W Shaw Co. PP. 48-52.

3 - Hax, A. and Canada, D. (1984). *Production and Inventory Management.* Prentice-Hall, Englewood cliffs, New Jersey.

4 - Hayek, P. A. and Salameh, M. K. (2001). "Production lot sizing with the reworking of imperfect quality item produced." *Production Planning and Control.* Vol. 12, No. 6, PP. 584 - 590.

5 - Jamal, A. M. M. Bhabara., R. Sarker, and Mondel, S. (2004). "Optimal manufacturing batch size with network process at a single-stage production system." *Computer & Industrial Engineering*, Vol. 47, PP.77-89.

6 - Johnson, L. A. and Montgomery, D. C. (1974). *Operations research in production planning, and inventory control*. New York, John Wiley and Sons.

7 - Lee, H. L. (1992). "Lot sizing to reduce capacity utilization in production process with defective item, process corrections, and rework." *Management Science,* Vol. 38, No. 9, PP.1314 -1328.

8 - Lee, H. L., Chandra, M. J. and Deleveaux, V. J. (1997). "Optimal batch size and investment in multistage production systems with scrap." *Production Planning and Control,* Vol. 8, No. 6, PP.586-596.

9 - Lee, H. L. and Rosenblatt, M. J. (1986). "Economic production cycles with imperfect production processes." *IIE Transactions,* Vol. 18, No. 1, PP.48-55.

10 - Nahmias. S. (2001). *Production and operations analysis.* 4th ed., Mc Graw-Hill, New York.

11 - Osteryoung, J. S., Nosari, E., McCarty, D. E. and Reinhart, W. J. (1986). *Use of EOQ Model for Inventory Analysis, Production and Inventory Management,* Vol. 27, PP.39-45.

12 - Silver, E. A., Pyke, D. F. and Peterson, R. (1998). *Inventory Management and Production Planning and Scheduling*. 3rd ed., John Wiley, New York.

13 - Zipkin, P. H. (2000). *Foundations of inventory management.* Mc Graw-Hill, New York.

واژه های انگلیسی به ترتیب استفاده در متن

1 - Economic Batch Quantity
2 - Economic Order Quantity

Archive of SID

www.SID.ir