تعیین سیاست سفارش اقتصادی اقلام فاسدشدنی با تورم وابسته به زمان

ابوالفضل میرزازاده
دانشجوی دکتری دانشکده مهندسی صنایع - دانشگاه صنعتی امیرکبیر
a.mirzazadeh@aut.ac.ir
میر مهدی سید اصفهانی
استادیار دانشکده مهندسی صنایع - دانشگاه صنعتی امیرکبیر
esfehani@aut.ac.ir
سید محمد تقی فاطمی قمی
استاد دانشکده مهندسی صنایع - دانشگاه صنعتی امیرکبیر
fatemi@aut.ac.ir
(تاریخ دریافت ۸۴/۶/۱۹ ، تاریخ تصویب ۸۴/۹/۲۳)

چکیده

در این تحقیق نرخ‌های تورم تابعی از زمان فرض می‌شوند. نرخ تقاضا نیز وابسته به نرخ‌های تورم است. کالا فاسدشدنی بوده و کمبود مجاز است. سطح موجودی در طول افق زمانی با استفاده از معادلات دیفرانسیل مورد ارزیابی قرار گرفته و بر مبنای روش ارزش فعلی مسأله مدل‌سازی می‌شود. از مثال عددی جهت تشریح نتایج به دست آمده استفاده شده است. شش حالت ویژه که از مدل اصلی نتیجه گیری می‌شود مورد بحث قرار گرفته و با استفاده از مثال عددی نتایج با مدل اصلی مورد مقایسه قرار می گیرند.

واژه های کلیدی: کنترل موجودی، تورم وابسته به زمان، تقاضا وابسته به تورم، فساد کالا، کمبود

مقدمه

تحولات اقتصادی و بروز پدیده تورم، فصل جدیدی از مسائل موجودی را مطرح می‌نماید که هزینه‌ها در طول افق زمانی متاثر از این پدیده تغییر نموده و به تبع آن سیاست سفارش اقتصادی نیز تغییر می‌نماید. مقالات ارائه شده در این زمینه را می‌توان بر حسب معیارهای مختلف از جمله: قطعی یا غیر قطعی بودن پارامترهای مدل، مجاز بودن یا نبودن کمبود، خرید یا تولید کالا، ثابت یا متغیر بودن تقاضا، امکان فساد یا عدم فساد اقلام و ... طبقه بندی نمود. این مدلها از لحاظ نوع کالا به دو دسته معمولی و فساد پذیر قابل تقسیم هستند. کالای معمولی کالائی است که کیفیت و کمیت آن در طول زمان تغییر نمی‌کند. کالای فساد پذیر به کالائی اطلاق می‌شود که آسیب پذیر، فاسد شونده، تبخیر شونده و یا ... می باشند. محصولاتی نظیر مواد غذایی، سبزیجات، خون انسان، فیلم عکاسی، الکل، گازوئیل، رادیواکتیو و... از این دسته به شمار می روند. با توجه به فرضیات مطرح شده در این مقاله مدل های کنترل موجودی تورمی که دو مشخصه: کالا فساد پذیر و کمبود مجاز را دارا هستند مورد بررسی قرار می گیرند.

در سال ۱۹۸۳ هوانگ و شان [۲] تأثیر پارامتر تورم بر متغیرهای تصمیم گیری یک سیستم موجودی را که درآن کالاها به صورت نمائی فاسد می‌شوند، مورد بحث قرار دادند. سو و دیگران [۳] ضمن در نظر گرفتن فساد به صورت نمائی نرخ مصرف کالا را تابعی از مقدار سفارش فرض نمودند. وی و لاو [۴] تورم و ارزش زمانی پول را در مدل موجودی اقلام فاسدشدنی که در آن تقاضا وابسته به قیمت بوده و کمبود مجاز باشد در نظر گرفتند. مدل یک محیط تولیدی با نرخ دریافت تدریجی را در نظر می‌گیرد. هدف تعیین سیاست بهینه قیمت گذاری و تولید می‌باشد. سارکر و دیگران [۵] مقدار بهینه سفارش اقلام فاسدشدنی را در یک سیستم زنجیره عرضه تعیین نمودند که در آن تأخیر در پرداخت و کمبود مجاز فرض شده است. آنالیز حساسیت روی نرخ‌های تورم و بهره انجام شده و نشان داده شده است که مقدار بهینه سفارش و ماکزیمم کمبود مجاز نسبت به تغییرات تفاوت بین نرخ تورم ونرخ بهره ($i - r$)

حساس است.

چانگ [۶] در سال ۲۰۰۴ مسأله تاخیر مجاز را با محدودیت حداقل سفارش برای بهره گیری از تاخیر بررسی نمودند. یانگ[۷] مسأله موجودی با دو انبار را برای اقلام فاسدشدنی با نرخ ثابت تقاضا و کمبود مورد بحث قرار دادند. بلخی [۸] در سال ۲۰۰۴ فرض نمود نرخ تولید در هر لحظه به تقاضا و سطح موجودی در دسترس وابسته است. نرخ تقاضا و نرخ فساد کالا توابعی کلی و پیوسته از زمان در نظر گرفته می‌شوند. کمبود مجاز بوده اما تنها بخشی از آن جبران شده و مابقی به عنوان فروش از دست رفته تلقی می‌گردد. بلخی [۹] در سال ۲۰۰۴ مدل دیگری را مطرح نمود که در آن نرخ‌های تولید، تقاضا و فساد توابعی شناخته شده، پیوسته و تفکیک پذیر از زمان هستند. کمبود مجاز بوده و بخشی از آن جبران می‌شود.

هائو و لین [۱۰] مدلی تورمی جهت اقلام فاسدشدنی با نرخ فروش وابسته به میزان ذخیره کالا ارائه نمودند که در آن فرض می‌شود مقدار فروش تابعی است از سطح موجودی در دسترس و نرخ فساد کالا ثابت است. هدف تعیین تعداد بهینه سفارشات و طول زمانی سیکل سفارش دهی برای به حداکثر رساندن ارزش فعلی درآمدها طی افق زمانی است. مون، گیری و کو [۱۱] در سال ۲۰۰۵ به بررسی اقلامی پرداختند که مرور زمان منجر به بهبود ارزش، کارکرد و یا حتی کمیت می‌شود. تقاضا تابعی از زمان بوده و سیاست بهینه سفارش دهی با در نظر گرفتن ارزش زمانی پول تعیین می‌شود. میرزازاده، فاطمی قمی و سید اصفهانی [۱] سیاست سفارش اقتصادی را در شرایط غیر قطعی نرخ‌های تورم مورد بررسی قرار دادند.

در مقالات فوق نرخ تورم در طول افق زمانی ثابت و کاملا شناخته شده در نظر گرفته می‌شود، در حالی که تجربه نشان داده است که نرخ تورم در طول زمان تغییر می‌نماید. در بسیاری از صنایع شناخت خوبی از روند تغییرات هزینه‌ها و نرخ‌های تورم وجود دارد. بر این اساس در این مقاله مدل جدیدی ارائه می‌شود که در آن نرخ‌های تورم تابعی پیوسته از زمان در نظر گرفته شده‌اند. از طرف دیگر نرخ تقاضا معمولا با نوسانات نرخ تورم تغییر می‌نماید. ارتباط بین تقاضا و تورم در مدل های پیشین لحاظ نشده است. در مدل ارائه شده فرض می‌شود نرخ تقاضا وابسته به نرخ‌های تورم داخلی و خارجی است. تحت این شرایط و سایر فرضیاتی که در ادامه مطرح خواهد شد، مسأله مدل‌سازی شده است. مدل پیشنهادی با استفاده از مثال عددی حل شده است. نهایتا شش حالت ویژه که از مدل اصلی قابل استنتاج است مورد بررسی قرار گرفته و نتایج به دست آمده با مدل اصلی مورد مقایسه قرار می‌گیرد. این حالات عبارتند از:

حالت (۱) : نرخ‌های تورم در طول افق زمانی ثابت و یکنواخت هستند.

حالت (۲) : کلیه هزینه‌ها با یک نرخ تورم افزایش می‌یابند (نرخ‌های تورم داخلی و خارجی یکسان)

حالت (۳) : کمبود مجاز نیست.

حالت (۴) : کالا فاسد نمی‌شود.

حالت (۵) : در نظر گرفتن حالات (۲)، (۳) و (۴) به طور همزمان.

حالت (۶) : در نظر گرفتن حالات (۱)، (۲)، (۳) و (۴) به طور همزمان.

مدل ارائه شده در طول یک افق زمانی مشخص، تعداد بهینه سفارشات و زمان بهینه وقوع کمبود را تعیین می‌نماید.

توصیف مسأله

در این بخش، ابتدا فرضیات و نمادهای مسأله بیان شده و سپس کلیات مسأله تشریح می‌شود.

فرضیات

مفروضات مسأله عبارت است از:

۱- هزینه‌های سیستم موجودی در ابتدای دوره برنامه‌ریزی شناخته شده بوده و طی دوره با نرخ‌های تورم داخلی و خارجی افزایش می‌یابند.

۲- نرخ‌های تورم داخلی و خارجی تابعی خطی از زمان هستند.

۳- نرخ تقاضا تابعی خطی از نرخ‌های تورم داخلی و خارجی است.

٤- کالای موجود در انبار در طول زمان با نرخ ثابت فاسد می‌شود.

٥- سیستم موجودی تک کالا و بدون محدودیت است.

٦- زمان تأمین کالا برابر با صفر است.

۷- کمبود مجاز و به طور کامل قابل جبران است (مگر در دوره آخر که کمبود مجاز نیست).

۸- طول افق زمانی محدود است.

۹- موجودی ابتدا و انتهای دوره برنامه‌ریزی برابر با صفر است.

نمادها

نمادهای مورد استفاده به صورت زیر تعریف می شوند.

i_m نرخ تورم داخلی (برای m=1) و نرخ تورم خارجی (برای m=2) که توابعی خطی از زمان می باشند:

$$i_m = a_m + b_m t \quad (۱)$$

a_m و b_m اعداد حقیقی هستند. در صورتی که b_m منفی باشد، نرخ تورم کاهشی و در صورتی که مثبت باشد نرخ تورم افزایشی خواهد بود. در صورتی که $b_m=0$ باشد، نرخ تورم در طول افق زمانی ثابت خواهد بودکه این موضوع در بخش موارد ویژه مورد بحث قرار خواهد گرفت.

r نرخ بهره

R_m نرخ بهره خالص از تورم:

$R_m = r - i_m$

$D(i_1,i_2)$ نرخ تقاضای کالا در واحد زمان که تابعی خطی از نرخ‌های تورم است:

$$D(i_1,i_2) = a_0 + b_0 i_1 + c_0 i_2 ,\ a_0 > 0 \quad (۲)$$

پارامترهای a_0 ، b_0 و c_0 اعداد ثابت و حقیقی هستند. نظر به اینکه نرخ تقاضا مقداری مثبت است، پارامتر a_0 الزاما به اندازه کافی مثبت خواهد بود.

θ ضریب فساد موجودی در دست در واحد زمان $(0<\theta<1)$

c هزینه خرید هر واحد کالا در زمان صفر

S هزینه سفارش کالا در شروع افق زمانی

c_{1m} هزینه نگهداری داخلی (برای m=1) و خارجی(برای m=2) هر واحد کالا در هر واحد زمان در شروع افق زمانی

c_{2m} هزینه کمبود داخلی (برای m=1) و خارجی (برای m=2) هر واحد کالا در هر واحد زمان در شروع افق زمانی

H طول افق زمانی

T طول هر دوره سفارش دهی (و یا فاصله زمانی مابین دو سفارش متوالی)

k کسری از دوره سفارش دهی که در آن لحظه سطح موجودی کالا به صفر می‌رسد

n تعداد دوره‌های سفارش دهی در طول افق زمانی

CH_{jm} ارزش فعلی هزینه‌های داخلی (برای m=1) و هزینه‌های خارجی (برای m=2) نگهداری مربوط به دوره j

CP_j ارزش فعلی هزینه‌های خرید مربوط به دوره j

CR_j ارزش فعلی هزینه سفارش مربوط به دوره j

CS_{jm} ارزش فعلی هزینه‌های داخلی (برای m=1) و هزینه‌های خارجی (برای m=2) کمبود مربوط به دوره j

$TVC(n,k)$ ارزش فعلی کل هزینه‌های سیستم موجودی که تابعی از n و k است.

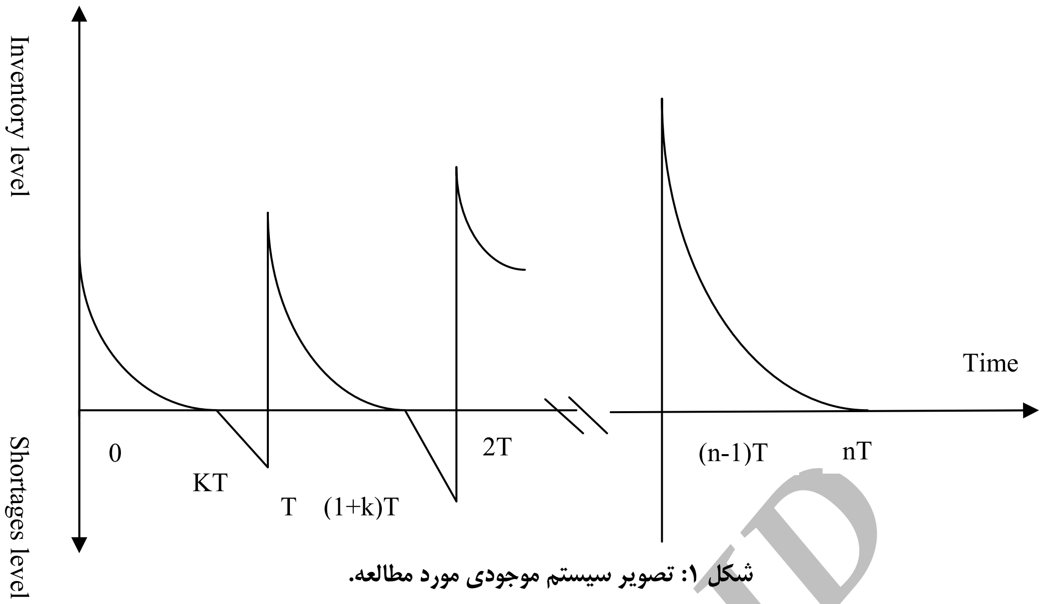
با توجه به وابستگی تقاضا به تورم و همچنین وابستگی تورم به زمان، نرخ تقاضا را می‌توان به صورت تابعی از زمان بیان نمود:

$$\begin{aligned} D(i_1,i_2) &= a_0 + b_0 i_1 + c_0 i_2 \\ &= a_0 + b_0(a_1 + b_1 t) + c_0(a_2 + b_2 t) \\ &= (a_0 + b_0 a_1 + c_0 a_2) + (b_0 b_1 + c_0 b_2)t \\ &= a + bt, \qquad a > 0 \end{aligned} \quad (۳)$$

تشریح مسأله

فرض می‌شود که در طول افق زمانی، n بار سفارش (n عدد صحیح است) با فاصله زمانی یکسان T صورت می‌گیرد، بنابراین $H=nT$. سیستم موجودی مورد مطالعه به صورت گرافیکی به شکل (۱) قابل نمایش است.

در لحظه صفر، کالا سفارش داده شده و به صورت یکجا دریافت می‌شود.کالای دریافت شده با نرخ تقاضای $D(i_1,i_2)$ مصرف شده و با نرخ ثابت θ به صورت نمائی فاسد می‌شود. بنابراین کاهش سطح موجودی انبار ناشی از مصرف کالا و فساد کالا است. در لحظه kT حجم موجودی انبار به صفر رسیده و کمبود واقع می‌شود. مقدار کمبود در لحظه T که کالا مجددا سفارش داده می‌شود به حداکثر مقدار خود می‌رسد. این سفارش می‌بایست کمبود دوره قبل و همچنین مصرف کالا و فساد کالا در دوره جاری را پوشش دهد.



شکل ۱: تصویر سیستم موجودی مورد مطالعه.

آخرین سفارش در زمان (n-1)T صورت می‌گیرد و این سفارش کمبود دوره قبل و همچنین مصرف و فساد دوره جاری تا لحظه nT را پوشش خواهد داد (در دوره آخر کمبود مجاز نیست). همان گونه که در شکل (۱) نشان داده است، سطح موجودی کالا در دوره‌های مختلف تغییر می‌نماید. (در این شکل روند سطح موجودی افزایشی است، اما در حالت کلی این روند می‌تواند افزایشی یا کاهشی باشد). علت آن است که تقاضا تابعی از تورم است و با تغییرات تورم، سطح تقاضا در طول زمان تغییر می‌نماید. هدف تعیین تعداد بهینه سفارشات در طول افق زمانی (n) و لحظه بهینه وقوع کمبود (k) است. این هدف از طریق حداقل سازی کل هزینه‌های سیستم موجودی در طول افق زمانی تامین خواهد شد.

مدل رياضي

به طورکلی در تجزیه وتحلیل مدل های موجودی دو روش هزینه یکنواخت و ارزش فعلی مورد استفاده قرار می گیرند. کانت و مایلز [۱۲] در سال ۱۹۸۵ در مسأله مقدارسفارش اقتصادی با تورم این دو روش را مقایسه نموده و نتیجه گیری کردند که درشرایط تورمی روش دوم (ارزش فعلی) دقیق تر و مؤثرتر عمل می کند. لذا در این مقاله از روش ارزش فعلی استفاده می‌شود.

هدف مسأله مورد بررسی کمینه سازی ارزش فعلی هزینه‌های سیستم موجودی در طول افق زمانی است. جهت فرموله کردن مسأله، تغییرات سطح موجودی نسبت به متغیر زمان در طول افق زمانی مورد بررسی قرار می‌گیرد.

بررسی تغییرات سطح موجودی نسبت به متغیر زمان

طی سیکل های اول تا ما قبل آخر سفارش دهی، رفتار موجودی دو حالت مختلف به شرح زیر دارد:

۱- نخست از لحظه شروع سیکل و یا لحظه‌ای که کالا سفارش داده می‌شود تا لحظه‌ای که کمبود رخ می‌دهد. معادله دیفرانسیل مربوط به این حالت عبارت است از:

$$\frac{dI_{1j}(t_{1j})}{dt_{1j}} + \theta I_{1j}(t_{1j}) = -D_{1j}(t_{1j}),$$
$$(j-1)T \le t_{1j} \le (k+j-1)T \qquad (۴)$$

نظر به اینکه مقدار تقاضا در دوره‌های مختلف سفارش دهی متفاوت است، نمی‌توان مقدار موجودی در تمام دوره‌های سفارش دهی را یکسان در نظر گرفت و بر این اساس از اندیس j استفاده شده است.

۲- در هر سیکل سفارش دهی، از لحظه (k+j-1)T کمبود واقع شده و مقدار آن تا لحظه دریافت سفارش افزایش می‌یابد. سطح موجودی طی فاصله زمانی [(k+j-1)T , jT] به صورت زیر قابل محاسبه است.

$$\frac{dI_{2j}(t_{2j})}{dt_{2j}} = -D_{2j}(t_{2j}),$$
$$(k+j-1)T \le t_{2j} \le jT \qquad (۵)$$

در سیکل آخر کمبود مجاز نبوده و رفتار موجودی به شکل زیر خواهد بود:

$$\frac{dI_3(t_3)}{dt_3}+\theta I_3(t_3)=-D_3(t_3),$$
$$(n-1)T\le t_3\le nT$$

(۶)

برای حل معادلات فوق از شرایط مرزی به شرح زیر استفاده می‌شود.

$$I_{1j}((k+j-1)T)=0$$

(۷)

$$I_{2j}((k+j-1)T)=0$$

(۸)

$$I_3(nT)=0$$

(۹)

پس از حل معادلات (۶) – (۴) با در نظر گرفتن شرایط مرزی (۹) – (۷) و استفاده از رابطه (۳)، مقدار موجودی در بخش های مختلف افق زمانی به شرح زیر تعیین می‌شود.

$$I_{1j}(t_{1j})=\frac{-(a+bt_{1j})}{\theta}+\frac{b}{\theta^2}$$
$$+\left[\frac{a+b(k+j-1)T}{\theta}-\frac{b}{\theta^2}\right]$$
$$e^{\theta\left[(k+j-1)T-t_{1j}\right]}$$

(۱۰)

$$I_{2j}(t_{2j})=\left[(k+j-1)T-t_{2j}\right]$$
$$\left[a+\frac{b\left[(k+j-1)\;T\;+t_{2j}\right]}{2}\right]$$

(۱۱)

$$I_3(t_3)=\frac{-(a+bt_3)}{\theta}+\frac{b}{\theta^2}$$
$$+\left[\frac{a+bnT}{\theta}-\frac{b}{\theta^2}\right]e^{\theta[nT-t_3]}$$

(۱۲)

ارزش فعلی هزینه‌های سیستم موجودی (TVC(n,k))

چهار نوع هزینه در سیستم موجودی در نظر گرفته می‌شود که عبارتند از: هزینه‌های سفارش (CR)، هزینه‌های خرید (CP)، هزینه‌های نگهداری (CH) و هزینه‌های کمبود (CS). این هزینه‌ها به ترتیب محاسبه خواهند شد.

هزینه‌های سفارش (CR)

نخستین سفارش در لحظه صفر صورت گرفته و هزینه آن برابر با S است. سفارشات بعدی در ابتدای هر یک از سیکل های موجودی واقع می‌شود. بنابراین هزینه‌های سفارش در سیکل های مختلف در طول افق زمانی از رابطه زیر محاسبه می‌گردد.

$$CR_j=S\,e^{-rjT}\,e^{(a_1+b_1jT)jT},$$
$$j=0,1,2,\ldots,n-1$$

(۱۳)

بنابراین مجموع ارزش فعلی هزینه‌های سفارش در دوره اول تورمی برابر است با:

$$CR=S\sum_{j=0}^{n-1}e^{-(r-a_1)jT}\,e^{b_1j^2T^2}$$

(۱۴)

هزینه‌های خرید (CP)

طی سیکل های سفارش دهی اول تا ما قبل آخر، خرید در ابتدای هر دوره به اندازه مجموع مقادیر زیر صورت می‌گیرد:

۱- مقدار مصرف و فساد کالا از ابتدای سیکل سفارش دهی تا لحظه وقوع کمبود (به عبارت دیگر حداکثر موجودی کالا در سیکل سفارش دهی).
۲- مقدار کمبودی که طی دوره سفارش دهی رخ می‌دهد. این کمبود از لحظه وقوع کمبود شروع شده و تا انتهای سیکل سفارش دهی ادامه می‌یابد (به عبارت دیگر حداکثر مقدار کمبود در انتهای سیکل سفارش دهی).

بنابراین ارزش فعلی هزینه‌های خرید مربوط بـه دوره jام سفارش دهی از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$CP_{j-1}=p\,e^{-(r-a_2-b_2(j-1)T)(j-1)T}\,I_{1j}((j-1)T)$$
$$+p\,e^{-(r-a_2-b_2jT)jT}\left[-I_{2j}(jT)\right],$$
$$j=1,2,\ldots,n-1$$

(۱۵)

خرید در سیکل آخر به اندازه مصرف و فساد کالا در این سیکل است و مقدار آن از رابطه زیر محاسبه می‌شود.

$$CP_{n-1} = p\,e^{-(r-a_2-b_2(n-1)T)(n-1)T} .I_3((n-1)T)$$

(۱۶)

مجموع ارزش فعلی هزینه‌های خرید در طول افق زمانی با استفاده از روابط فوق بدست آمده و مقدار آن برابر است با:

$$CP = \sum_{j=1}^{n-1} CP_{j-1} + CP_{n-1}$$

(۱۷)

هزینه‌های نگهداری (CH)

طی سیکل های سفارش دهی اول تا ما قبل آخر، کالا از لحظه شروع سیکل تا لحظه وقوع کمبود در انبار نگهداری می‌شود. هزینه‌های نگهداری کالا در هر سیکل از رابطه زیر قابل محاسبه است.

$$CH_{jm} = c_{1m}\int_{(j-1)T}^{(j-1+k)T} I_{1j}(t_{1j}). \cdot e^{-rt_{1j}} \cdot e^{(a_m+b_m t_{1j})t_{1j}}\, dt_{1j}, \quad j=1,2,\ldots,n-1, m=1,2$$

(۱۸)

هزینه‌های نگهداری در سیکل آخر سفارش دهی برابر است با:

$$CH_{nm} = c_{1m}\int_{(n-1)T}^{nT} I_3(t_3)\, e^{-rt_3}\, e^{(a_m+b_m t_3)t_3}\, dt_3, \quad m=1,2$$

(۱۹)

بنابراین مجموع ارزش فعلی هزینـه‌هـای نگهـداری در طول افق زمانی به شرح زیر به دست می‌آید:

$$CH = \sum_{m=1}^{2}\left[\sum_{j=1}^{n-1} CH_{jm} + CH_{nm}\right]$$

(۲۰)

هزینه‌های کمبود (CS)

هزینه‌های کمبود تنها برای سیکل های اول تا ما قبل آخر مطرح است. این هزینه‌ها در هر دوره سفارش دهی از لحظه وقوع کمبود تا پایان سیکل سفارش دهی رخ داده و مقدار آن برابر است با:

$$CS_{jm} = c_{2m}\int_{(j-1+k)T}^{jT}\left[-I_{2j}(t_{2j})\right]e^{-rt_{2j}} .e^{(a_m+b_m t_{2j})t_{2j}}\, dt_{2j}, \quad j=1,2,\ldots,n-1, m=1,2$$

(۲۱)

مجموع هزینه‌های کمبود در طـول افـق زمـانی برابـر است با:

$$CS = \sum_{m=1}^{2}\sum_{j=1}^{n-1} CS_{jm}$$

(۲۲)

بنابراین مجموع ارزش فعلی کل هزینه‌های سیستم موجودی در طول افق زمانی با استفاده از روابط (۱۴)، (۱۷)، (۲۰) و (۲۲) به شرح زیر به دست می‌آید:

$$TVC(n,k) = CR + CP + CH + CS$$

(۲۳)

روش حل

هدف محاسبه مقدار می‌نیمم رابطه (۲۳) بر حسب متغیر گسسته n و متغیر پیوسته k است. برای حل این مسأله، از یک روش تکراری (که در بیش از ۹۰ درصد مقالات پیشین به کار گرفته شده است) استفاده می‌شود. نخست n=1 در نظر گرفته شده و مقدار بهینه لحظه برخورد با کمبود (k) با استفاده از شرائط کهن- تاکر محاسبه می‌شود. سپس مقدار n افزایش می‌یابد و در هر مرحله k و TVC(n,k) محاسبه می‌شود. مقادیری از (n,k) که کمترین هزینه را داشته باشد، به عنوان جواب بهینه انتخاب خواهد شد. به ازاء یک مقدار مشخص از n، شرط لازم برای بهینگی k عبارت است از:

$$\frac{dTVC(n,k)}{dk} = \frac{dCP}{dk} + \frac{dCH}{dk} + \frac{dCS}{dk} + \frac{dCR}{dk} = 0$$

(۲۴)

و یا:

$$\frac{dTVC(n,k)}{dk} = p\sum_{j=1}^{n-1}\left[e^{-(r-a_2-b_2(j-1)T)(j-1)T}\left[\frac{e^{-\theta(j-1)T}\left(bT+\left(\frac{aT+b(k+j-1)T^2}{\theta}-\frac{bT}{\theta^2}\right)\right)}{\theta\, e^{-\theta(k+j-1)T}}\right]\right]$$
$$-p\sum_{j=1}^{n-1}\left[\left(b(k+j-1)T^2+aT\right)e^{-(r-a_2-b_2jT)jT}\right]+\sum_{m=1}^{2}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{d\left[\int_{(j-1)T}^{(j-1+k)T} I_{1j}(t_{1j})\,e^{-rt_{1j}}\,e^{(a_m+b_mt_{1j})t_{1j}}\,dt_{1j}\right]}{dk}$$
$$+\sum_{m=1}^{2}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{d\left[\int_{(j-1+k)T}^{jT}\left[-I_{2j}(t_{2j})\right]e^{-rt_{2j}}\,e^{(a_m+b_mt_{2j})t_{2j}}\,dt_{2j}\right]}{dk}=0$$

(۲۵)

مقدار بهینه k با استفاده از روشهای عددی قابل محاسبه است. شرط می‌نیمم بودن هزینه‌ها محدب بودن تابع (TVC(n,k)) است که برای این منظور تابع زیر می‌بایست غیر منفی باشد:

$$\frac{d^2TVC(n,k)}{dk^2} = p\sum_{j=1}^{n-1}\left[e^{-(r-a_2-b_2(j-1)T)(j-1)T}\left[\frac{e^{-\theta(j-1)T}\left(2bT^2+\left(a\theta T^2+b(k+j-1)\theta T^3-bT^2\right)\right)}{e^{-\theta(k+j-1)T}}\right]\right]$$
$$-p\sum_{j=1}^{n-1}\left[bT^2\,e^{-(r-a_2-b_2jT)jT}\right]+\sum_{m=1}^{2}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{d^2\left[\int_{(j-1)T}^{(j-1+k)T} I_{1j}(t_{1j})\,e^{-rt_{1j}}\,e^{(a_m+b_mt_{1j})t_{1j}}\,dt_{1j}\right]}{dk^2}$$
$$+\sum_{m=1}^{2}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{d^2\left[\int_{(j-1+k)T}^{jT}\left[-I_{2j}(t_{2j})\right]e^{-rt_{2j}}\,e^{(a_m+b_mt_{2j})t_{2j}}\,dt_{2j}\right]}{dk^2}>0$$

(۲۶)

مثال عددی

فرض کنید نرخ‌های تورم داخلی و خارجی تابعی از متغیر زمان به شرح زیر باشند:

$$i_1 = 0.1 + 0.005t$$
$$i_2 = 0.12 + 0.006t$$

نرخ بهره سازمان ۲۰ درصد در سال، افق زمانی ۱۰ سال و ضریب فساد کالا نیز برابر با ۰/۰۱ است.

r = 0.2 ; H=10years ; $\theta = 0.01$

نرخ تقاضای سالیانه به صورت تابعی از نرخ‌های تورم به شرح زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$D(i_1,i_2) = 2000 - 1000i_1 - 2000i_2$$

هزینه‌های سیستم موجودی برحسب واحد پول برابر است با:

$c_{11}=0.2$; $c_{12}=0.4$; $c_{21}=0.8$; $c_{22}=0.6$; p=5 ; S=100

مسأله با استفاده از روشهای عددی حل شده و نتایج در جدول (۱) آمده است (برای خلاصه سازی، از ارائه برخی از مقادیر n در جدول صرف نظر شده است):

حداقل ارزش فعلی هزینه‌ها در طول افق زمانی برای n*=21 و k*=0.606786، برابر ۶۷۷۵۰/۳۲ واحد پولی است. به عبارت دیگر در طول افق زمانی ده ساله، ۲۱ بار سفارش داده شده و فاصله بهینه بین دو سفارش متوالی برابر H / n*=0.476 سال و یا ۱۷۴ روز است. در هر سیکل سفارش دهی (به جز سیکل آخر) پس از سپری شدن حدود ۶۱ درصد از زمان سیکل (و یا ۱۰۵ روز پس از شروع سیکل) سطح موجودی به صفر رسیده وکمبود رخ می‌دهد. مشتق دوم تابع هدف در تمام حالات جدول فوق مثبت بوده است (در حالت بهینه برابر ۱۱۴۲۶/۲۴ است).

جدول ۱: نتایج حاصل از حل مثال عددی.

n	k	TVC (n,k)	n	k	TVC (n,k)
۵	۰/۵۷۵۹۸۷	۷۱۵۵۶/۸۰	۲۵	۰/۶۰۸۲۷۹	۶۷۸۰۷/۳۱
۱۰	۰/۵۹۶۴۰۸	۶۸۵۹۰/۷۷	۳۰	۰/۶۰۹۵۸۲	۶۷۹۶۶/۹۴
۱۵	۰/۶۰۳۰۳۶	۶۷۹۰۳/۴۷	۳۵	۰/۶۱۰۵۱۰	۶۸۱۸۵/۰۸
۲۰	۰/۶۰۶۳۱۹	۶۷۷۵۰/۹۰	۴۰	۰/۶۱۱۲۰۶	۶۸۴۳۹/۶۰
۲۱×	**۰/۶۰۶۷۸۶***	**۶۷۷۵۰/۳۲***	۵۰	۰/۶۱۲۱۷۸	۶۹۰۱۳/۸۱
۲۲	۰/۶۰۷۲۱۱	۶۷۷۵۶/۵۰	۷۰	۰/۶۱۳۲۸۷	۷۰۲۹۱/۹۲
۲۴	۰/۶۰۷۹۵۳	۶۷۷۸۵/۶۸	۱۰۰	۰/۶۱۴۱۱۷	۷۲۳۳۸/۱۱

بررسی حالات ویژه

در این بخش شش حالت خاص از مدل اصلی مورد بحث قرار می‌گیرد.

حالت اول: نرخ‌های تورم در طول افق زمـانی ثابـت و یکنواخت هستند

به عبارت دیگر:

$$b_m = 0, \qquad \text{for m} = 1, 2.$$

(۲۷)

در این حالت با توجه به رابطه (۳)، مقدار تقاضا در طول افق زمانی ثابت بوده و برابر است با:

$$D(i_1, i_2) = a_0 + b_0 a_1 + c_0 a_2$$

(۲۸)

با قرار دادن رابطه (۲۷) در مدل اصـلی، مثـال عـددی حـل شده و جواب به شرح زیر به دست می‌آید:

n*=22,k*=0.470016,TVC(n,k)=59871.78 and T*=0.454year.

در مقایسه با جوابهای به دست آمده از مدل اصلی تعداد دوره‌های سفارش دهی تنها یک دوره افزایش یافته است، اما لحظه برخورد با کمبود (k)کاهش چشمگیری داشته است. در شرائطی که مقدار k کاهش می‌یابد، کمبود زودتر رخ می‌دهد. هزینه‌های سیستم موجودی نیز به طرز قابل ملاحظه ای کاهش یافته است. این امر بدیهی است، چرا که در این حالت در مقایسه با مدل اصلی نرخ تورم در طول افق زمانی افزایش نیافته و هزینه‌ها نیز به تبع آن افزایش کمتری داشته‌اند.

حالت دوم: نرخ‌های تورم داخلی و خارجی یکسان

در این حالت هزینه‌ها دیگر به دو دسته داخلی و خارجی تقسیم بندی نمی‌شوند. به عبارت دیگر کلیه هزینه‌ها با یک نرخ تورم افزایش می‌یابند. تابع هدف TVC(n,k) را می‌توان از فرمول (۲۳) با تغییرات زیر به دست آورد:

$$c_{hm} = c_h, a_m = A, b_m = B, R_m = R,$$
$$\text{for h} = 1,2 \text{ and m} = 1, 2.$$

(۲۹)

ضمن آنکه عبـارت $\sum_{m=1}^{2}$ حـذف مـی‌شـود. حـال در مثـال مطرح شده فرض کنید:

$$i = 0.11 + 0.0055t$$

پس از محاسبه c_m و R_m از (۲۹)، جواب بهینه برابر است با:

n*=20,k*=0.577967,TVC(n,k)=64474.57 and T*= 0.5year.

در مقایسه با مدل اصلی، تعداد دوره‌های سفارش دهی (n)، لحظه برخورد با کمبود (k) و هزینه‌های سیسـتم موجـودی کاهش یافته‌اند.

حالت سوم: کمبود مجاز نیست

اگر کمبود مجاز نباشد، برای محاسبه جواب بهینه کافی است در رابطه (۲۳) که تابع هدف مدل اصلی است، k=1 قرار داده شود. در این صورت هدف کمینه سازی تابع تک متغیره TVC(n) خواهد بود. برای این منظور مقدار n به نحوی محاسبه می‌شود که رابطه زیر را ارضاء نماید.

$$\Delta TVC(n) \le 0 \le \Delta TVC(n+1)$$

(۳۰)

که ΔTVC(n) = TVC(n) - TVC(n-1). در این حالت مقادیر بهینه عبارتند از:

n^*=26, TVC(n)=68543.95 and T^*=0.385year.

همان گونه که ملاحظه می‌شود، تعداد بهینه دوره‌های سفارش دهی افزایش یافته است. این امر در شرائط مجاز نبودن کمبود طبیعی به نظر می‌رسد. چرا که در حالتی که

کمبود مجاز است، بخشی از کالا به محض دریافت جهت جبران کمبود دوره قبل مصرف شده و بنابراین فاسد نخواهد شد. اما در شرائط مجاز نبودن کمبود چنین چیزی وجود ندارد و مدیر سیستم موجودی می‌بایست با افزایش تعداد دفعات سفارش، حجم کالای موجود در انبار را کاهش دهد تا میزان فساد کالا کاهش یابد.

حالت چهارم: کالای در دسترس فاسد نمی‌شود

در صورتی که کیفیت کالای موجود در انبار در طول زمان تغییر نکند (به عبارت دیگر $\theta=0$)، پس از بازنویسی فرمولهای مربوطه، مدل ریاضی مسأله به شرح زیر محاسبه می‌شود:

$$TVC(n,k,\theta=0)=S\sum_{j=0}^{n-1}e^{-(r-a_1)jT}e^{b_1 j^2T^2}$$
$$+p\left[e^{-(r-a_2-b_2(n-1)T)(n-1)T}I_3((n-1)T)+\sum_{j=1}^{n-1}\left[e^{-(r-a_2-b_2(j-1)T)(j-1)T}I_{1j}((j-1)T)+p\,e^{-(r-a_2-b_2jT)jT}\left[-I_{2j}(jT)\right]\right]\right]$$
$$+\sum_{m=1}^{2}\left[c_{1m}\left[\sum_{j=1}^{n-1}\int_{(j-1)T}^{(j-1+k)T}I_{1j}(t_{1j})e^{-rt_{1j}}e^{(a_m+b_mt_{1j})t_{1j}}dt_{1j}+\int_{(n-1)T}^{nT}I_3(t_3)e^{-rt_3}e^{(a_m+b_mt_3)t_3}dt_3\right]\right]$$
$$+\sum_{m=1}^{2}\sum_{j=1}^{n-1}c_{2m}\left[\int_{(j-1+k)T}^{jT}\left[-I_{2j}(t_{2j})\right]e^{-rt_{2j}}e^{(a_m+b_mt_{2j})t_{2j}}dt_{2j}\right]$$

(۳۱)

که در آن:

$$I_{1j}(t_{1j})=-at_{1j}-\frac{1}{2}bt_{1j}^{\ 2}+\frac{b(k+j-1)^2T^2}{2}+a(k+j-1)T$$

(۳۲)

$$I_{2j}(t_{2j})=\left[(k+j-1)T-t_{2j}\right]\left[a+\frac{b\left[(k+j-1)\ T\ \ +t_{2j}\ \right]}{2}\right]$$

(۳۳)

$$I_3(t_3)=-at_3-\frac{1}{2}bt_3^{\ 2}+anT+\frac{1}{2}bn^2T^2$$

(۳۴)

روش حل تابع دو متغیره فوق مشابه روش حل مدل اصلی است. در این شرائط مقادیر بهینه برابر است با:

n*=41, k*=0.667940, ETVC(n,k)=44513.44 and T*=0.244year.

مشاهده می‌شود که در مقایسه با حالت وجود فساد کالا، n و TVC کاهش یافته و k افزایش یافته است. این امر قابل انتظار است، زیرا در شرائطی که کالا فاسد نمی‌شود مدیر سیستم موجودی می‌تواند حجم سفارش را بالا ببرد (به عبارت دیگر n را کاهش دهد) و مقدار کمبود کالا را نیز کاهش دهد (k افزایش یابد).

حالت پنجم: نرخ‌های تورم داخلی و خارجی یکسان، کمبود مجاز نبوده و کالا فاسد نمی‌شود

سیاست سفارش اقتصادی در این حالت، با استفاده از معادله (۳۱) و با قرار دادن k=1 و در نظر گرفتن (۲۹) تعیین خواهد شد. جواب بهینه در این حالت عبارت است از:

n*=25, TVC(n,k)=65271.90 and T=0.4year.

تعداد دوره‌های سفارش دهی نسبت به مدل اصلی افزایش یافته و هزینه‌های سیستم موجودی کاهش یافته است.

حالت ششم: در طول افق زمانی نرخ‌های تورم داخلی و خارجی یکسان و ثابت، کمبود مجاز نبوده و کالا فاسد نمی‌شود

سیاست سفارش اقتصادی در این حالت، با استفاده از معادله (۳۱) و با قرار دادن k=1 و در نظر گرفتن روابط (۲۷) و (۲۹) تعیین خواهد شد. جواب بهینه در این حالت عبارت است از:

n*=30, TVC(n,k)=59001.70 and T=0.333 year.

تعداد دوره‌های سفارش دهی نسبت به مدل اصلی افزایش یافته است، اما هزینه‌ها کاهش یافته است.

نتیجه گیری

یکی از ویژگی های اساسی سیستم‌های کنترل موجودی و به تبع آن مدل های توسعه داده شده، فرضیات متنوع و گوناگونی است که در این زمینه وجود دارد. هر یک از پارامترهای مؤثر بر تصمیم گیری بسته به صنعت مورد مطالعه، شرائط موجود در زمان تصمیم گیری، جامعه مورد نظر و ... ممکن است حالات مختلفی داشته باشند. در دهه هفتاد قرن بیستم با توجه به تغییرات شرائط اقتصادی ، پدیده تورم به عنوان یک عامل تاثیر گذار در سیستمهای موجودی مد نظر قرار گرفت. نتایج تحقیقات مختلف نشان می‌دهد در صورتی که نرخ تورم کمتر از چهار درصد باشد، می‌توان از آن در مدل سازی صرف نظر نمود. اما در شرائطی که این نرخ از چهار درصد تجاوز نماید لازم است که آن را در تصمیم گیری وارد نموده که این امر منجر به افزایش مقدار خرید خواهد شد.

در این مقاله یک مدل موجودی تورمی با کمبود و فساد کالا ارائه می‌شود. هزینه‌های سیستم موجودی از لحاظ نرخ تورم مؤثر بر آنها به دو دسته متمایز تفکیک می‌شوند. دسته اول شامل هزینه‌هائی هستند که با «نرخ تورم داخلی» یا نرخ شایع در داخل شرکت افزایش یافته و دسته دوم به هزینه‌هائی اطلاق می‌شود که با نرخ تورم شایع شده درسطح جامعه و یا نرخ تورم شرکت عرضه کننده کالا افزایش می‌یابند که اصطلاحا به آن « نرخ تورم خارجی» گفته می‌شود. نرخ‌های تورم داخلی و خارجی تابعی خطی از زمان هستند. ضمن آنکه نرخ تقاضا نیز تابعی از نرخ‌های تورم فرض شده است.

مقدار موجودی کالا در ابتدا و انتهای افق زمانی برابر با صفر است. پس از دریافت کالا، فساد رخ می‌دهد. نحوه فساد کالا پیوسته و ثابت در طول زمان فرض شده است. جهت مدل‌سازی از روش ارزش فعلی (که نسبت به روش دیگر یعنی یکنواخت سالیانه دقیق تر عمل می کند) استفاده شده است. برای این منظور رفتار سیستم موجودی در طول افق زمانی تحلیل می‌شود. هدف تعیین فاصله بهینه بین دو سفارش متوالی و زمان بهینه وقوع کمبود است. مدل ریاضی ارائه شده برای این مسأله با استفاده از مثال عددی بررسی شده است.

شش حالت ویژه از مدل اصلی منتج شده است. نتایج حاصل از مقایسه این حالات ویژه با مدل اصلی مسأله نشان می‌دهد در صورتی که تورم و تقاضا در طول افق زمانی تغییر ننمایند (مستقل از زمان باشند)، در مقایسه با جوابهای به دست آمده از مدل اصلی تعداد دوره‌های سفارش دهی تنها یک دوره افزایش یافته اما مقدار k کاهش چشمگیری می‌یابد. همچنین در شرائطی که کمبود مجاز نباشد، تعداد بهینه دوره‌های سفارش دهی و هزینه‌های سیستم موجودی افزایش می‌یابد. در صورتی که کالا فاسد نشود، در مقایسه با حالت وجود فساد کالا تعداد دوره‌های سفارش دهی و هزینه‌های سیستم موجودی کاهش یافته و لحظه برخورد با کمبود (k) افزایش می‌یابد.

علاقه مندان به تحقیق در این زمینه می‌توانند جهت مطالعات آینده مدل ارائه شده در این مقاله را به حالاتی نظیر: نرخ فساد کالا وابسته به زمان، وجود بیش از یک انبار جهت نگهداری کالا که هزینه‌های نگهداری و نرخ فساد کالا در انبارها با یکدیگر متفاوت است، تخفیف در بهای خرید با توجه به حجم سفارش و نرخ تقاضا تابعی از حجم موجودی در ابتدای سیکل سفارش دهی توسعه دهند.

مراجع

۱ - میرزازاده، ا.، فاطمی قمی، م. ت. و سید اصفهانی، م. "تعیین سیاست بهینه سفارش دهی اقلام فاسد شدنی با کمبود تحت شرائط غیر قطعی تورم." نشریه علمی و فناوری امیرکبیر، شماره ب ۶۲، بهار (۱۳۸۴).

2 - Hwang, H. and Sohn, K. (1983). “Management of deteriorating inventory under inflation.” *Engineering Econnomics,* Vol. 28, PP. 191-206.

3 - Su, C. T., Tong, L. I. and Liao, H. C. (1996). “An inventory model under inflation for stock dependent demand rate and exponential decay.” *Operations Research,* Vol. 33, PP. 71-82.

4 - Wee, H. M. and Law, S. T. (1999). “Economic production lot size for deteriorating items taking account of

the time value of money." *Computers and Operations Research,* Vol. 26, PP. 545-558.

5 - Sarker, B. R., Jamal, A. M. M. and Wang, S. (2000). "Supply chain models for perishable products under inflation and permissible delay in payments." *Computers and Operations Research,* Vol. 27, PP. 59-75.

6 - Chang, C. T. (2004). "An EOQ model with deteriorating items under inflation when supplier credits linked to order quantity." *International Journal of Production Economics,* Vol. 88, PP. 307-316.

7 - Yang, H. L. (2004). "Two-warehouse inventory models for deteriorating items with shortages under inflation." *European Journal of Operational Research,* Vol. 157, PP. 344-356.

8 - Balkhi, Z. T. (2004). "On the optimality of inventory models with deteriorating items for demand and on-hand inventory dependent production rate." *IMA Journal Management Mathematics,* Vol. 15, PP. 67-86.

9 - Balkhi, Z. T. (2004). "An optimal solution of a general lot size inventory model with deteriorated and imperfect products, taking into account inflation and time value of money." *International Journal of Systems Science,* Vol. 35, PP. 87-96.

10 - Hou, K. L. and Lin, L. C. (2004). "Optimal inventory model with stock-dependent selling rate under maximal total present value of profits." *Proc., 4th IASTED International Conference on Modeling, Simulation, and Optimization,* PP. 7-12.

11 - Moon, I., Giri, B. C. and Ko, B. (2005). "Economic order quantity models for ameliorating/deteriorating items under inflation and time discounting." *European Journal of Operational Research*, Vol. 162, PP. 773-785.

12 - Kanet, J. J. and Miles, J. A. (1985). "Economic order quantities and inflation." *International Journal of Production Research,* Vol. 23, PP. 597-608.