تعیین بار کمانش پانلهای ساندویچی تحت تنشهای حرارتی به روش تحلیلی

عباسعلی ذاکری

دانشجوی دکتری دانشکده مهندسی عمران - دانشگاه صنعتی امیر کبیر

محمد مهدی علی نیا*

دانشیار دانشکده مهندسی عمران - دانشگاه صنعتی امیر کبیر

(تاریخ دریافت ۸۲/۱۰/۱۳، تاریخ دریافت روایت اصلاح شده ۸۴/۱۲/۳، تاریخ تصویب ۸۵/۲/۲۳)

چکیده

در این مقاله معادلات حاکم بر کمانش پانل‌های ساندویچی تحت تنش‌های حرارتی با استفاده از روش انرژی و اصل حساب تغییرات و با در نظر گرفتن تئوری تغییر شکل‌های بزرگ تعیین و با حدس سری توابع نامحدود مثلثاتی ارضا کننده شرایط مرزی تحلیل می‌شود.

در این بررسی، پانل‌های مستطیل شکل با شرایط مرزی ساده و ترکیبی از لایه‌های کامپوزیتی که به صورت متقارن نسبت به خط مرکزی قرار گرفته‌اند مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفته و مقدار بار کمانش در مدهای مختلف برآورد می‌گردد. یک مطالعه عددی نیز برای مقایسه روش‌ها مورد تحقیق قرار گرفته است.

واژه های کلیدی: پانل ساندویچی – کامپوزیت - کمانش حرارتی - تغییر شکل بزرگ

مقدمه

پانل‌های ساندویچی بخاطر سبکی وزن، سختی خمشی بالا و خواص مقاوم در برابر خستگی، بیش از ۴۰ سال در صنعت هوا و فضا کاربری داشته و از چندی پیش بعنوان سازه‌های مقاوم در ساختمان‌ها بکار گرفته شده‌اند. با این حال، از آنجا که این سازه‌ها از پوسته‌های نازک تشکیل شده‌اند، در مقابل تنش‌های فشاری به صورت موضعی یا کلی دچار کمانش گشته و یا از هسته جدا می‌شوند. این عمل ممکن است ناشی از انحنایی باشد که در اثر ضربه یا در حین عملیات ساخت ایجاد می‌گردد. این پدیده عملکرد سازه را به صورت قابل توجه‌ای تحت تأثیر قرار می‌دهد[۱].

مطالعات زیادی بر روی کمانش پانل‌های ساندویچی تحت بارهای فشاری صورت گرفته است. بیشتر ساندویچ‌ها به صورت سه لایه تعریف شده‌اند: دو لایه بیرونی نازک و سخت و از مصالح با مقاومت بالا بوده، در حالی که لایه وسط ضخیم و از مصالح با دانستیه کم ساخته می‌شود.

در آنالیزهای اولیه، پانل‌های ساندویچی به صورت ترکیبی از دو عضو غشایی نازک که تحمل کننده نیروهای خمشی بوده و یک هسته ضخیم که برای برش در نظر گرفته می‌شد بررسی می‌گردید. در مدل‌های امروزی سازه به صورت سه بعدی و با کاهش فرضیات محدود کننده، به صورت کامل و جامعتر تحلیل می‌گردد. آنالیزهای اولیه برای ساندویچ‌های فلزی توسط Plantema ارائه گردید[۲]. ناپایداری کلی و چروکیدگی[1] وجوه ساندویچ توسط Benson & Mayers بررسی شد[۳]، یکی از ویژگی‌های کار ایشان تعریف یک شرایط پایدار بین چروکیدگی وجوه و ناپایداری کلی بود. محققان همچنین آنالیز سازه‌های ساندویچی را با تاکید بر وجوه کامپوزیتی و هسته‌های فوم بررسی نموده‌اند. یک فرمولاسیون اجزاء محدود برای پانل‌های ساندویچی توسط Ha بررسی گردید که بر مبنای تغییر مکانی و فرمولاسیون هیبریدی با مدل‌های مختلف سینماتیک در طول ضخامت در نظر گرفته شد[۴،۵].
Frostig کمانش سازه‌های ساندویچی را با کاربرد تئوری مرتبه بالا که شرایط مرزی متفاوتی را برای وجه بالا و پایین متصور است بررسی نمود. وی از یک حل بسته استفاده نمود و تأثیر شرایط مختلف مرزی ونسبت‌های جانبی[2] متنوع را درکمانش ساندویچ‌ها اعم ازهسته نرم و یا سخت مطالعه کرد[۶].

Tessler و همکاران یک تئوری مرتبه ۱ و ۲ که در برگیرنده اثرتغییرشکلهای برشی و تنش‌ها و کرنش‌های

* **Email:** m.alinia@aut.ac.ir
Tel: 66400243

نرمال می‌باشد را ارائه نمودند[۷]. آنها تحلیل‌های تنش خطی را برای صفحات ساندویچی تحت بارهای حرارتی و در شرایط تکیه‌گاهی ساده با وجوه کامپوزیتی بررسی نموده و برای آن یک حل بسته ارائه کردند. Vonach و Ramerstorfer کاربرد روش ریلی ریتز را برای چروکیدگی پانل‌های ساندویچی نامتقارن و وجوه ارتوتروپ ارائه نمودند[۸]. ایشان برای تائید روش خود نتایج را با روش اجزا محدود مقایسه نمودند.

Bert تئوری‌های مختلف برای سازه‌های ساندویچی با وجوه کامپوزیتی که در برگیرنده هر دو اثر برشی و نرمال باشد را خلاصه بندی و جمع آوری نمود[۹]. Noor و همکاران مرجع جامعی از لیست مراحل محاسباتی و تحلیلی (بیش از ۱۳۰۰ مورد) برای سازه‌های ساندویچی ارائه کردند[۱۰]. Librescu و Hause تحقیق بیشتری ارائه نمودند و فرمولاسیون را به گونه‌ای بسط دادند که پدیده کمانش و پس از کمانش سازه‌های ساندویچی تحت اثر بارهای مکانیکی و حرارتی در پانل‌های ساندویچی تخت و دارای انحنا مطالعه شود[۱۱]. روش ریلی ریتز برای تکیه‌گاه‌های ساده توسط Rao بکار گرفته شد به گونه ای که در آن از سختی خمشی وجوه صرفنظر می گردید[۱۲].

Kim و Hong درتوسعه کار Rao اثر سختی خمشی وجه را مد نظر قرار دادند [۱۳]. Hadi و Mathews روش ریلی ریتز را بر پایه تئوری Zigzag و با در نظر گرفتن تغییر شکل‌های برشی در وجوه ارائه کردند[۱۴]. Dawe وYuan یک روش نوار محدود با کاربرد توابع B-Spline برای سازه‌های ساندویچی با وجوه غیر ایزوتروپ ارائه نمودند[۱۵،۱۶]. با این حال هیچ مطالعه عددی قابل توجهی برای تخمین کمانش پانل‌های ساندویچی در مقاله خود ارائه نکردند. Rose و همکاران رفتار کمانش پایه و پاسخ ساندویچ تحت بارهای فشار محوری را بررسی نموده و بار کمانش را با روش اجزاء محدود تخمین زدند. ایشان برای تائید روش خود از نتایج روش‌های تحلیلی و تست‌های انجام شده در این محدوده استفاده نمودند[۱۷].

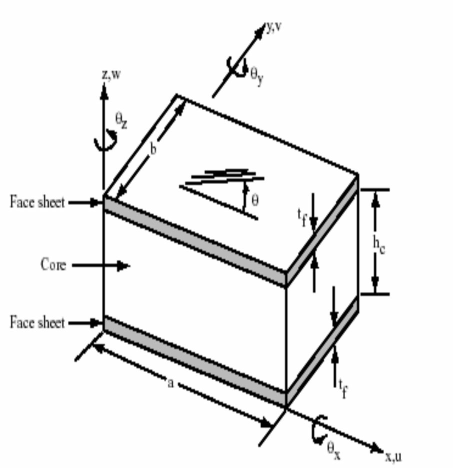
مقاله حاضر با استفاده از یک روش تحلیلی به حل معادلات حاکم بر کمانش پانل ساندویچی مستطیل شکل با ملحوظ داشتن اثر تغییرشکل‌های بزرگ وتحت تنش‌های حرارتی می‌پردازد. در این بررسی معادلات انرژی یک صفحه کامپوزیت چند لایه (که در برگیرنده حالت پانل ساندویچی نیز می‌باشد) با تئوری‌های مختلف برشی بررسی شده و با کمینه کردن انرژی پتانسیل کل، معادلات حاکم استنتاج شده است و در نهایت با فرض سری توابع ارضا کننده شرایط تغییرمکانی در مرزها که بوسیله تکیه‌گاه‌های ساده نگهداری می‌شوند بار کمانش حرارتی تعیین می‌گردد. بار کمانش برای یک پانل ساندویچی در تئوری‌های مذکور با یک مثال عددی با هم مقایسه گردیده و اختلاف آن با روش اجزاء محدود در یک جدول ارائه شده است.

فرضیات و تئوری حاکم

صفحه کامپوزیت (پانل ساندویچی) مورد تحقیق به صورت متقارن نسبت به خط گذرنده از مرکز لایه وسط، (و در نتیجه حذف اثر کوپل خمش- غشایی) لایه‌گذاری شده است. همچنین پانل که به شکل مستطیل می‌باشد توسط تکیه‌گاه ساده در چهار طرف نگاه‌داشته شده و تحت بار حرارتی یکنواخت در تمام ابعاد صفحه قرار داده می‌شود.

برای تعیین معادلات حاکم ابتدا از روابط گرین- لاگرانژ برای تعیین ارتباط کرنش‌ها با تغییر شکل‌ها استفاده شده و پس از تعیین معادلات حاکم ، اثرات غیر خطی حذف می‌گردند. در این بررسی تئوری‌های مختلف برشی اعم از تئوری کلاسیک و تئوری مرتبه اول برشی مدنظر قرار گرفته و همچنین در پانل ساندویچی، اثر هسته ضعیف و قوی جداگانه مطالعه می‌گردد.

در مطالعه حاضراز اثر تراکم پذیری صفحات به خصوص هسته ضخیم صرفنظر می‌گردد.



شکل ۱ : حالت عمومی یک پانل ساندویچی.

مدل کاربردی

پانل ساندویچ مورد بحث متشکل از یک هسته ارتوتروپ ضخیم در دو حالت متفاوت با دانسیته کم که بتوان از مقاومت خمشی آن صرفنظر نمود (هسته ضعیف) ویا دارای مقاومت خمشی بالا (هسته قوی) و دو پوسته که خود مرکب از لایه‌های کامپوزیتی با جهات متنوع الیاف می‌باشد، در نظر گرفته شده است.

روابط رفتاری

روابط رفتاری حاکم بر ساندویچ به صورت زیر بیان می‌گردد:

$$\varepsilon_{xx}=\frac{\partial u_0}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+z(\frac{\partial \alpha}{\partial x})$$
$$\varepsilon_{yy}=\frac{\partial v_0}{\partial y}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2+z(\frac{\partial \beta}{\partial y})$$
$$\varepsilon_{zz}=0$$
$$\varepsilon_{yz}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_0}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)$$
$$\varepsilon_{xz}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_0}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)$$
$$\varepsilon_{xy}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_0}{\partial y}+\frac{\partial v_0}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}+z(\frac{\partial \alpha}{\partial x}+\frac{\partial \beta}{\partial y})\right)$$

(۱)

در روابط بالا:

$$u(x,y)=u_0(x,y)+z\alpha(x,y)$$
$$v(x,y)=v_0(x,y)+z\beta(x,y)$$
$$w(x,y)=w(x,y)$$

(۲)

در تئوری کلاسیک :

$$\varepsilon_{yz}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)=0 \Rightarrow \beta(x,y)=-\frac{\partial w}{\partial y}$$
$$\varepsilon_{xz}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)=0 \Rightarrow \alpha(x,y)=-\frac{\partial w}{\partial x}$$

(۳)

روابط تنش-کرنش

در مطالعه حاضراز تنش‌های کوشی در تعیین معادلات حاکم استفاده می‌گردد:

$$\begin{bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \sigma_{yz}\\ \sigma_{xz}\\ \sigma_{xy}\end{bmatrix}=\left[\overline{Q}\right]_k\begin{bmatrix}\varepsilon_x-\alpha_x\Delta T\\ \varepsilon_y-\alpha_y\Delta T\\ 2\varepsilon_{yz}\\ 2\varepsilon_{xz}\\ 2\varepsilon_{xy}-\alpha_{xy}\Delta T\end{bmatrix}$$

(۴)

که در آن Q_{ij} معرف مشخصات مکانیکی و α_x ، α_y و α_{xy} ضرایب انبساط حرارتی هر یک از لایه‌ها بوده و در پیوست معرفی می‌گردد.

معادله انرژی کرنشی در حالت کلی

$$V=\int_{\Omega}(1/2\sigma_{ij}\varepsilon_{ij})d\Omega=$$
$$\frac{1}{2}\int_{\Omega}(\sigma_x\varepsilon_x+\sigma_y\varepsilon_y+\sigma_z\varepsilon_z+2\sigma_{xy}\varepsilon_{xy}+2\sigma_{xz}\varepsilon_{xz}$$
$$+2\sigma_{yz}\varepsilon_{yz})d\Omega$$

(۵)

$$V=\frac{1}{2}\int_{\Omega}(\overline{Q}_{11}\varepsilon_x^2+\overline{Q}_{22}\varepsilon_y^2+4\overline{Q}_{66}\varepsilon_{xy}^2+$$
$$4\overline{Q}_{44}\varepsilon_{yz}^2+4\overline{Q}_{55}\varepsilon_{xz}^2+8\overline{Q}_{45}\varepsilon_{yz}\varepsilon_{xz}+$$
$$2\overline{Q}_{12}\varepsilon_x\varepsilon_y+4\overline{Q}_{16}\varepsilon_x\varepsilon_{xy}+4\overline{Q}_{26}\varepsilon_y\varepsilon_{xy})d\Omega$$

(۶)

استنتاج معادلات حاکم

با جای‌گذاری روابط رفتاری در معادله انرژی و استفاده از اصل حساب تغییرات جهت کمینه کردن مقدار انرژی سیستم، معادلات حاکم به صورت زیر تعیین می‌شود.

در این معادلات:

nl : تعداد کل لایه‌ها

h_k :فاصله لایه kاُم از خط مرکزی و شماره گذاری لایه‌ها از پایین صورت پذیرفته است.

$$A_{ij}=\sum_{k=1}^{nl}\overline{Q}_{ij_k}(h_k-h_{k-1})$$
$$B_{ij}=1/2\sum_{k=1}^{nl}\overline{Q}_{ij_k}(h^2{}_k-h^2{}_{k-1})$$
$$D_{ij}=1/3\sum_{k=1}^{nl}\overline{Q}_{ij_k}(h^3{}_k-h^3{}_{k-1})$$

(۷)

به علت تقارن در چیدمان لایه‌ها B_{ij} صفر بوده و لذا در معادلات وارد نگردیده است.

همچنین بایستی مطابق با اصل حساب تغییرات ضرایب مقادیر جزئی صفر گردد که در این صورت معادلات حاکم به شکل زیر خواهند شد:

$$\delta V=0$$
$$\iint_A\{[(A_{44}(\beta+\frac{\partial w}{\partial y})+A_{45}(\alpha+\frac{\partial w}{\partial x})]\delta\frac{\partial w}{\partial y}+$$
$$[(A_{45}(\beta+\frac{\partial w}{\partial y})+A_{55}(\alpha+\frac{\partial w}{\partial x})]\delta\frac{\partial w}{\partial x}\}dA+$$

$$\iiint_{\Omega}\sum_{k=1}^{nl}[((\overline{Q}_{11}\alpha_x+\overline{Q}_{12}\alpha_y+\overline{Q}_{16}\alpha_{xy})\frac{\partial w}{\partial x}+ (\overline{Q}_{16}\alpha_x+\overline{Q}_{26}\alpha_y+\overline{Q}_{66}\alpha_{xy})\frac{\partial w}{\partial y})\delta\frac{\partial w}{\partial x}+ ((\overline{Q}_{16}\alpha_x+\overline{Q}_{26}\alpha_y+\overline{Q}_{66}\alpha_{xy})\frac{\partial w}{\partial x}+ (\overline{Q}_{12}\alpha_x+\overline{Q}_{22}\alpha_y+\overline{Q}_{26}\alpha_{xy})\frac{\partial w}{\partial y})\delta\frac{\partial w}{\partial y}]_k\Delta T d\Omega=0$$

$$\iint_{A}[(A_{45}(\frac{\partial w}{\partial y}+\beta)+A_{55}(\frac{\partial w}{\partial x}+\alpha))\delta\alpha+ (D_{11}\frac{\partial\alpha}{\partial x}+D_{12}\frac{\partial\beta}{\partial y}+D_{16}(\frac{\partial\alpha}{\partial y}+\frac{\partial\beta}{\partial x}))\delta\frac{\partial\alpha}{\partial x} +(D_{16}\frac{\partial\alpha}{\partial x}+D_{26}\frac{\partial\beta}{\partial y}+D_{66} (\frac{\partial\alpha}{\partial y}+\frac{\partial\beta}{\partial x}))\delta\frac{\partial\alpha}{\partial y}]dA=0$$

$$\iint_{A}[(A_{44}(\frac{\partial w}{\partial y}+\beta)+A_{45}(\frac{\partial w}{\partial x}+\alpha))\delta\beta +(D_{16}\frac{\partial\alpha}{\partial x}+D_{26}\frac{\partial\beta}{\partial y}+D_{66}(\frac{\partial\alpha}{\partial y}+\frac{\partial\beta}{\partial x}))\delta\frac{\partial\beta}{\partial x} +(D_{12}\frac{\partial\alpha}{\partial x}+D_{22}\frac{\partial\beta}{\partial y}+D_{26}(\frac{\partial\alpha}{\partial y}+\frac{\partial\beta}{\partial x}))\delta\frac{\partial\beta}{\partial y}]dA=0$$

(۸)

توابع u وv مستقل از سایر پارامترهای تغییرمکانی خواهند بود.

به جهت سادگی کار :

$$QA_{11}=\sum_{k=1}^{nl}\overline{Q}_{11_k}\alpha_{x_k}(h_k-h_{k-1})$$

$$QA_{22}=\sum_{k=1}^{nl}\overline{Q}_{22_k}\alpha_{y_k}(h_k-h_{k-1})$$

$$QA_{66}=\sum_{k=1}^{nl}\overline{Q}_{66_k}\alpha_{xy_k}(h_k-h_{k-1})$$

$$QX_{12}=\sum_{k=1}^{nl}\overline{Q}_{12_k}\alpha_{x_k}(h_k-h_{k-1})$$

$$QY_{12}=\sum_{k=1}^{nl}\overline{Q}_{12_k}\alpha_{y_k}(h_k-h_{k-1})$$

$$QX_{16}=\sum_{k=1}^{nl}\overline{Q}_{16_k}\alpha_{x_k}(h_k-h_{k-1})$$

$$QY_{16}=\sum_{k=1}^{nl}\overline{Q}_{16_k}\alpha_{xy_k}(h_k-h_{k-1})$$

$$QX_{26}=\sum_{k=1}^{nl}\overline{Q}_{26_k}\alpha_{xy_k}(h_k-h_{k-1})$$

$$QY_{26}=\sum_{k=1}^{nl}\overline{Q}_{26_k}\alpha_{y_k}(h_k-h_{k-1})$$

(۹)

حل معادلات

با در نظر گرفتن توابعی مثلثاتی که ارضا کننده شرایط تغییر مکانی در تکیه‌گاه‌های ساده می‌باشد, معادلات حاکم تحلیل می‌گردند.

معادلات به دو شکل بررسی شده‌اند، در گام اول فقط اثر یک ترم از توابع مفروض در نظر گرفته می‌شود و در شکل دوم ترم‌های بیشتری از تغییر مکان‌ها در حل معادله تأثیر داده می‌شود. در اینجا روابط حاصل برای حالات مختلف ارائه می‌گردد:

بار کمانش کامپوزیت متقارن (تئوری کلاسیک)

با توجه به این نکته که در تئوری کلاسیک توابع αوβ تابعی از w می‌باشند، معادلات حاکم نیز فقط تابع w بوده و با روابط زیر بیان می‌گردد:

$$\int_0^a\int_0^b\{(D_{11}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+D_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+2D_{16}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}) \delta\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+(D_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+D_{22}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+ 2D_{26}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y})\delta\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+(D_{16}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} +D_{26}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+2D_{66}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y})(2\delta\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y})- [[(QA_{11}+QY_{12}+QY_{16})\frac{\partial w}{\partial x}+ (QX_{16}+QY_{26}+QA_{66})\frac{\partial w}{\partial y}]\delta\frac{\partial w}{\partial x}+ [(\overline{Q}X_{16}+QY_{26}+QA_{66})\frac{\partial w}{\partial x}+(QX_{12} +QA_{22}+QX_{26})\frac{\partial w}{\partial y}]\delta\frac{\partial w}{\partial y}]\Delta T\}dy.dx=0$$

(۱۰)

در رابطه بالا a و b ابعاد صفحه می‌باشند.

الف- اثر یک مد

$$W(x,y)=w_0\sin(\frac{m\pi x}{a})\sin(\frac{n\pi y}{b})$$

(۱۱)

پس از جایگذاری:

$$\Delta T=(D_{11}\frac{m^4}{a^4}+D_{22}\frac{n^4}{b^4}+2(D_{12}+2D_{66})) \frac{m^2n^2}{a^2b^2}\pi^2/(QA_{11}\frac{m^2}{a^2}+QA_{22}\frac{n^2}{b^2}+ QY_{16}\frac{m^2}{a^2}+QX_{12}\frac{n^2}{b^2}+QY_{12}\frac{m^2}{a^2}+QX_{26}\frac{n^2}{b^2})$$

(۱۲)

ب- اثر ترکیب مدها

$$W(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}W_{mn}\sin(\frac{m\pi x}{a})\sin(\frac{n\pi y}{b})$$

(۱۳-الف)

$$\delta W(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\delta W_{ij}\sin(\frac{i\pi x}{a})\sin(\frac{j\pi y}{b})$$

(۱۳-ب)

$$\begin{aligned}
&\int_0^a\int_0^b\sum_{m=1}^{m1}\sum_{n=1}^{n1}W_{mn}\{\pi^4[((D_{11}\frac{m^2}{a^2}+D_{12}\frac{n^2}{b^2})\frac{i^2}{a^2}+\\
&(D_{12}\frac{m^2}{a^2}+D_{22}\frac{n^2}{b^2})\frac{j^2}{b^2}+\\
&4D_{66}\frac{mnij}{a^2b^2})\sin(\frac{m\pi x}{a})\sin(\frac{i\pi x}{a})\sin(\frac{n\pi y}{b})\sin(\frac{j\pi y}{b})-\\
&2(D_{16}\frac{mni^2}{a^3b}+D_{26}\frac{mnj^2}{ab^3})\cos(\frac{m\pi x}{a})\\
&\sin(\frac{i\pi x}{a})\cos(\frac{n\pi x}{b})\sin(\frac{j\pi y}{b})-\\
&2(D_{16}\frac{ijm^2}{a^3b}+D_{26}\frac{ijn^2}{ab^3})\cos(\frac{i\pi x}{a})\\
&\sin(\frac{m\pi x}{a})\cos(\frac{j\pi x}{b})\sin(\frac{n\pi y}{b})]-\\
&\pi^2[[(QA_{11}+QY_{12}+QY_{16})\frac{m}{a}\cos(\frac{m\pi x}{a})\sin(\frac{n\pi y}{b})\\
&+(QX_{16}+QY_{26}+QA_{66})\frac{n}{b}\sin(\frac{m\pi x}{a})\\
&\cos(\frac{n\pi y}{b})]\frac{i}{a}\cos(\frac{i\pi x}{a})\sin(\frac{j\pi y}{b})+[(QA_{22}\\
&+QX_{12}+QX_{26})\frac{n}{b}\sin(\frac{m\pi x}{a})\cos(\frac{n\pi y}{b})+(QX_{16}+\\
&QY_{26}+QA_{66})\frac{m}{a}\cos(\frac{m\pi x}{a})\sin(\frac{n\pi y}{b})]\frac{j}{b}\\
&\sin(\frac{i\pi x}{a})\cos(\frac{j\pi y}{b})]]\Delta T\}\delta w_{ij}\,dy.dx=0
\end{aligned}$$

(۱۴)

در حل رابطه فوق بایستی ضرایب δw_{ij} برابر صفر گردند.

بار کمانش کامپوزیت متقارن (تئوری مرتبه اول برشی)

$$\begin{aligned}
&\{[(A_{44}(\Gamma_{mn}+\frac{n\pi}{b}w_{mn})f_{mia}f_{njb}\\
&+A_{45}(\Lambda_{mn}+\frac{m\pi}{a}w_{mn})g_{ima}g_{njb}]\frac{j\pi}{b}\\
&+[(A_{45}(\Gamma_{mn}+\frac{n\pi}{b}w_{mn})g_{mia}g_{jnb}\\
&+A_{55}(\Lambda_{mn}+\frac{m\pi}{a}w_{mn})f_{mia}f_{njb}]\frac{i\pi}{a}-\\
&\pi^2[[(QA_{11}+QY_{12}+QY_{16})\frac{m}{a}f_{mia}f_{njb}\\
&+(QX_{16}+QY_{26}+QA_{66})\frac{n}{b}g_{mia}g_{jnb})]\frac{i}{a}\\
&+[(QA_{22}+QX_{12}+QX_{26})\frac{n}{b}f_{mia}f_{njb}\\
&+(QX_{16}+QY_{26}+QA_{66})\frac{m}{a}g_{ima}g_{njb}]\frac{j}{b}]\Delta T\}\delta w_{ij}=0
\end{aligned}$$

(۱۵-الف)

$$\begin{aligned}
&\{[(A_{44}(\Gamma_{mn}+\frac{n\pi}{b}w_{mn})f_{mia}f_{njb}\\
&+A_{45}(\Lambda_{mn}+\frac{m\pi}{a}w_{mn})g_{ima}g_{njb}]\frac{j\pi}{b}\\
&+[(D_{22}\frac{n}{b}\Gamma_{mn}+D_{12}\frac{m}{a}\Lambda_{mn})f_{mia}f_{njb}\\
&-D_{26}(\frac{n}{b}\Lambda_{mn}+\frac{m}{a}\Gamma_{mn})g_{ima}g_{jnb}]\frac{j\pi^2}{b}\\
&-[(D_{26}\frac{n}{b}\Gamma_{mn}+D_{16}\frac{m}{a}\Lambda_{mn})g_{mia}g_{njb}\\
&-D_{66}(\frac{n}{b}\Lambda_{mn}+\frac{m}{a}\Gamma_{mn})f_{ima}f_{jnb}]\frac{i\pi^2}{a}\}\delta\Gamma_{ij}
\end{aligned}$$

(۱۵-ب)

$$\begin{aligned}
&\{[(A_{45}(\Gamma_{mn}+\frac{n\pi}{b}w_{mn})g_{mia}g_{njb}\\
&+A_{55}(\Lambda_{mn}+\frac{m\pi}{a}w_{mn})f_{ima}f_{njb}]\frac{i\pi}{a}\\
&+[(D_{12}\frac{n}{b}\Gamma_{mn}+D_{11}\frac{m}{a}\Lambda_{mn})f_{mia}f_{njb}\\
&-D_{16}(\frac{n}{b}\Lambda_{mn}+\frac{m}{a}\Gamma_{mn})g_{ima}g_{jnb}]\frac{i\pi^2}{a}\\
&-[(D_{26}\frac{n}{b}\Gamma_{mn}+D_{16}\frac{m}{a}\Lambda_{mn})g_{mia}g_{njb}\\
&-D_{66}(\frac{n}{b}\Lambda_{mn}+\frac{m}{a}\Gamma_{mn})f_{ima}f_{jnb}]\frac{j\pi^2}{b}\}\delta\Lambda_{ij}
\end{aligned}$$

(۱۵-ج)

در روابط بالا

$$g_{prl}=\int_0^l\sin(\frac{p\pi x}{l})\cos(\frac{r\pi x}{l})dx=\begin{cases}0\xrightarrow{if}p=r\\ \dfrac{-lp((-1)^{(p+r)}-1)}{\pi(p^2-r^2)}\xrightarrow{if}p\neq r\end{cases}$$

$$f_{prl}=\int_0^l\sin(\frac{p\pi x}{l})\sin(\frac{r\pi x}{l})dx=\begin{cases}0\xrightarrow{if}p\neq r\\ \dfrac{l}{2}\xrightarrow{if}p=r\end{cases}$$

(۱۶)

الف- اثر یک مد

جهت حل معادلات با جای‌گذاری روابط (۱۷) در معادلات (۸)، معادلات ایجاد شده بر حسب پارامترهای تغییرمکانی Λ_0 وΓ_0 و w_0 مرتب می‌گردند، دترمینان ماتریس ضرائب برابر صفر قرار داده می‌شود و کمترین ریشه دترمینان (که تابعی از تغییر درجه حرارت می‌باشد) به عنوان بار کمانش مطرح می‌شود.

$$W(x,y)=w_0\sin(\frac{m\pi x}{a})\sin(\frac{n\pi y}{b})$$

$$\alpha(x,y)=\Lambda_0\sin(\frac{m\pi x}{a}).\cos(\frac{n\pi y}{b})$$

$$\beta(x,y) = \Gamma_0 \cos(\frac{m\pi x}{a}).\sin(\frac{n\pi y}{b})$$

(۱۷)

ب- اثر ترکیب مدها

درتحلیل معادلات حاکم در این حالت توابع زیر مورد استفاده قرار گرفته و همانند حالت قبل عمل می‌شود. به جهت محدود بودن ظرفیت ماشین حسابگر فقط تعداد محدودی از مدها در نظر گرفته می‌شود.

$$W(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} \sin(\frac{m\pi x}{a})\sin(\frac{n\pi y}{b})$$
$$\alpha(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \Lambda_{mn} \sin(\frac{m\pi x}{a}).\cos(\frac{n\pi y}{b})$$
$$\beta(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \Gamma_{mn} \cos(\frac{m\pi x}{a}).\sin(\frac{n\pi y}{b})$$

(۱۸)

بار کمانش ساندویچ متقارن با هسته ضعیف

در بررسی معادلات حاکم بر ساندویچ‌های با هستهٔ ضعیف، بایستی اثر مقاومت خمشی هسته شامل E_{11} , E_{22} حذف گردند. در این صورت محاسبه مقادیر سختی خمشی و غشایی A_{11} , A_{22} , D_{11} , D_{22} بدون اثر هسته صورت می‌گیرد.

بررسی عددی

جهت مقایسه روش‌های به کار گرفته شده و بررسی دقت آنها, یک پانل ساندویچ با مشخصات زیر به روش تحلیلی و عددی تحلیل شده‌است. برای آنالیز عددی از نرم افزار ANSYS استفاده گردید.

مشخصات پانل:

پوسته:

کامپوزیت از جنس graphite/epoxy .

مشخصات مکانیکی لایه:

E_{11}=144Gpa, E_{22}=9.65Gpa,
E_{33}=9.65Gpa, G_{12}= G_{13}=5.16Gpa,
G_{23}=3.45Gpa, ν_{12}= ν_{13}=.3, ν_{23}=.45,
$\alpha_2 = 16\times10^{-6}/^\circ c$ $\alpha_1 = -.2\times10^{-6}/^\circ c$

پوسته‌ها از یک جنس و ترکیب لایه‌گذاری انتخاب و به صورت متقارن نسبت به خط مرکزی قرار داده می‌شود.

هسته : جنس: Foam و ضخامت: ۳۰میلیمتر

مشخصات مکانیکی:

G_{12}= .265,G_{13}=82.7,G_{23}=49.6MPa,
ν_{12}=.3, ν_{13}=ν_{23}=.01,
$\alpha_1 = \alpha_2 = 16\times10^{-6}/^\circ c$

در این قسمت کاربرد تئوری‌های مختلف برشی و تأثیر آن درتعیین بارکمانش حرارتی یک پانل ساندویچی مستطیل شکل با توجه به مشخصات پانل, از جمله چیدمان لایه‌ها، نسبت ضخامت به پوسته و جنس مصالح مطالعه می‌گردد. در این روند، اثر تعداد ترم‌های سری بکار رفته درتعیین بارکمانش حرارتی نیز مطالعه میگردد.

جدول (۱) بار کمانش حرارتی برای یک صفحه کامپوزیتی که از ۸ لایه به صورت ارتوتروپ ویژه، با زوایای $(0/90/90/0)_s$ تشکیل شده را در بر می‌گیرد. همان‌گونه که در جدول مشاهده می‌گردد، تعداد ترم‌های سری بکار برده شده اثری در تعیین بار کمانش این حالت ندارد، با این وجود، می‌توان تأثیر تئوری برشی بکار رفته را در مقدار تنش حرارتی به خوبی ملاحظه نمود. نتایج نشان می‌دهد که هنگامی که نسبت بعد صفحه از "یک" بیشتر شود, اختلاف قابل توجهی در تعیین بار کمانش در تئوری‌های مختلف برشی مشاهده می‌گردد. در حالتی که لایه‌ها از جنس برم اپوکسی انتخاب گردند نیز وضعیت مشابهی دیده می‌شود ولی اختلاف بار کمانشی در تئوری برشی و کلاسیک کمتر می‌باشد (جدول ۳). در وضعیت مذکور (حالتی که لایه گذاری به صورت ارتوترپ ویژه باشد،) مقدار بار کمانش محاسبه شده از روش اجزا محدود (ANSYS) بیش از مقادیری است که از روش‌های تحلیلی برآورد شده است.

جدول (۲) و (۴) بار کمانش حرارتی یک صفحه کامپوزیت متشکل از ۸ لایه کربن اپوکسی (برم اپوکسی) با چیدمان متقارن و زوایای ۴۵ درجه و ضخامت هر لایه به ترتیب ۲و۳ میلی‌متر را نشان می‌دهد. در این جدول تنش حرارتی کمانشی برای تئوری‌های مختلف برشی و تعداد ترم‌های در نظر گرفته شده برای سری توابع ارضاء کننده شرایط مرزی، مقایسه شده است. همانگونه که در جداول نیز مشخص شده است, در صورت انتخاب ترم‌های بیشتر برای سری تابع ارضا کننده شرایط مرزی، پانل در حرارت به مراتب کمتری کمانش می‌نماید. این اختلاف بستگی به جنس مصالح و نسبت بعد پانل متفاوت می‌باشد. استفاده از تئوری برشی مرتبه اول نیز بار کمانش حرارتی کمتری

در هر دو حالت استفاده از یک ترم وچند ترم توابع ارضاکننده، نسبت به تئوری کلاسیک نشان می‌دهد. مقادیر بدست آمده در حالت استفاده ازیک ترم بسته به نسبت جانبی صفحه بیش از مقادیر تعیین شده در حالت استفاده از چند ترم می‌باشد. این میزان در صفحات طویل کمترین مقدار اختلاف (حدود ۲ درصد) و در صفحه مربع شکل بیشترین اختلاف (حدود ۳۰ درصد) را دارا می‌باشد. مقادیر بار کمانش حرارتی تعیین شده برای صفحات کامپوزیتی با استفاده از روش اجزاء محدود از بار کمانش حالت کلاسیک کمتر بوده ولی بیش از مقادیر تعیین شده با استفاده از تئوری برشی مرتبه اول می‌باشد.

اگر چه اختلاف مقادیر ارزیابی شده برای تنشهای کمانش حرارتی در بررسی پارامترهای گوناگون مشهود است؛ ولی مقادیر آنها قابل توجه نمی باشد. علت پایین بودن این اختلاف را می توان در عواملی همچون انتخاب تابع ارضا کننده شرایط مرزی، ضخامت لایه ها و ابعاد پانل ، کوچک بودن نسبی ترمهای Q_{44}و Q_{55} در مقایسه با ترم E_{11} (از مشخصات پانل) و متقارن بودن لایه ها (ودر نتیجه حذف بعضی از ترمهای مؤثر در معادله) جستجو نمود. به منظور بررسی این عوامل، مطالعات بیشتری صورت گرفته است (بعضی از نتایج در جداول (۵) و (۶) گنجانده شده است)، اما جهت اختصار از بیان نمونه های بیشتر صرف نظر میگردد.

لازم به ذکر است در هنگام استفاده از برنامه اجزاء محدود از المانهای پوسته لایه‌ای که در آنها اثر تغییر شکل برشی ملحوظ نگردیده (تئوری کلاسیک) استفاده شده است.

در جداول (۷) و (۸) مقادیر تنش کمانش حرارتی برای دو روش تحلیلی (تئوری کلاسیک و برشی مرتبه اول) و روش عددی با توجه به تغییرات نسبت ضخامت هسته به پوسته مطالعه گردیده است. در این بررسی، ساندویچ مستطیل شکل با پوسته ۴ لایه و چیدمان‌های مختلف (ارتوتروپ ویژه ویا متقارن دلخواه) تحت تنش حرارتی قرار گرفته و مقادیر تنش کمانش مشخص شده است. در این مطالعه، مقادیر تنش برای هسته ضعیف (با فرض تحمل خمش به‌وسیله پوسته و برش توسط هسته) و هسته قوی، جداگانه محاسبه و مقایسه شده است.

کاهش قابل ملاحظه تنش کمانش حرارتی با افزایش تعداد ترم‌های سری و همخوانی نتایج برای هسته قوی و ضعیف به خوبی در جداول نمایان است.

جدول ۱: مقایسهٔ بار کمانش حرارتی صفحه کامپوزیت با چیدمان لایه ها به صورت ارتوتروپ ویژه (۸ لایه از جنس کربن اپوکسی با ضخامت هر لایه ۲ میلیمتر، $(0/90/90/0)_s$) .

a/b		1	2	3	5	10
Classic Theory	One term	60.5	51.6	53.2	54	55.6
	Multiple term	=	=	=	=	=
First order shear deformation	One term	60.3	40.2	39.6	40.0	40.4
	Multiple term	=	=	=	=	=
F.E.M		65.77	64	63.99	64	64

جدول ۲: مقایسهٔ بار کمانش حرارتی صفحه کامپوزیت با چیدمان لایه ها به صورت غیر ارتوتروپ ویژه (۸ لایه از جنس کربن اپوکسی با ضخامت هر لایه ۲ میلیمتر و با زاویه 45°).

a/b		1	2	3	5	10
Classic Theory	One term	40.2	21.74	16.99	14.25	13.01
	Multiple term	27.9	16.32	14.06	13.06	12.7
First order shear deformation	One term	39.99	21.68	16.95	14.22	12.99
	Multiple term	27.3	15.38	13.87	12.93	11.0
F.E.M		43.51	14.0	9.16	7.4	6.87

جدول ۳: مقایسهٔ بار کمانش حرارتی صفحه کامپوزیت با چیدمان لایه ها به صورت ارتوتروپ ویژه
(۸ لایه از جنس برم اپوکسی با ضخامت هر لایه ۲ میلیمتر $(0/90/90/0)_s$).

b/a		1	2	3	5	10
Classic Theory	One term	73.7	64.4	63.8	63.7	64.4
	Multiple term	=	=	=	=	=
First order shear deformation	One term	73.3	64.1	63.5	63.4	64.1
	Multiple term	=	=	=	=	=
F.E.M		83.9	80.8	80.6	80.5	80.5

جدول ۴: مقایسهٔ بار کمانش حرارتی صفحه کامپوزیت با چیدمان لایه ها به صورت غیر ارتوتروپ ویژه
(۸ لایه از جنس برم اپوکسی با ضخامت هر لایه ۳ میلیمتر و با زاویه °۴۵).

a/b		1	2	3	5	10
Classic Theory	One term	251	135.9	106	89.1	81.4
	Multiple term	174	102	87.9	81.6	79.3
First order shear deformation	One term	243	133	104	88.1	80.6
	Multiple term	165	99.6	84.3	71.13	64.3
F.E.M		231	101	68.	58.95	54.8

جدول ۵: مقایسهٔ بار کمانش حرارتی صفحه کامپوزیت با چیدمان لایه ها
(۴ لایه از جنس کربن اپوکسی با ضخامت هر لایه ۶ میلیمتر و با زاویه °۰).

a/b		1	2	3	5	10
Classic Theory	One term	136	32.8	21.4	17.3	16
	Multiple term	136	32.8	21.4	17.3	16
First order shear deformation	One term	134.6	32.7	21.4	17.3	16
	Multiple term	134.6	32.7	21.4	17.3	16
F.E.M		146.4	37	22	17.7	16.2

جدول ۶: مقایسهٔ بار کمانش حرارتی صفحه کامپوزیت با چیدمان لایه ها به صورت غیر ارتوتروپ ویژه
(۴ لایه از جنس کربن اپوکسی با ضخامت هر لایه ۶ میلیمتر و با زاویه °۳۰).

a/b		1	2	3	5	10
Classic Theory	One term	96.8	44.2	31.65	24.3	21
	Multiple term	96	44.15	31.6	24.2	21
First order shear deformation	One term	95	44	31.55	24.2	21
	Multiple term	94	39.9	31.45	24	21
F.E.M		136	59	45	38	32

جدول ۷: مقایسهٔ بار کمانش حرارتی صفحه ساندویچ با چیدمان لایه های وجوه به صورت ارتوتروپ ویژه
(هر وجه ۴ لایه از جنس کربن اپوکسی با ضخامت هر لایه۱ میلیمتر (0/90/90/0)و هسته از فوم) .

a/b		1				2		5		10	
t_f/t_c		.001	.01	.1	.3	.01	.1	.01	.1	.01	.1
Classic Theory	Weak core	1064	696	827	1285	514	624	515	643	520	651
	Strong core	120	314	727	1227	231	549	233	565	234	572
FSDT	Weak core	1053	687	810	1244	503	605	503	622	507	630
	Strong core	117	309	712	1188	226	532	226	547	228	554
ANSYS F.E.M.	Weak core	1379	811.5	912	1395	785	894	782	887	783	886
	Strong core	121	339.5	796	1324	337	768	330	764	330	765

جدول ۸: مقایسهٔ بار کمانش حرارتی صفحه ساندویچ با چیدمان لایه های وجوه به صورت متقارن دلخواه (هر وجه ۳ لایه از جنس کربن اپوکسی با ضخامت هر لایه ۱ میلیمتر در جهت °۴۵ و هسته از فوم).

a/b		1				2		5		10	
t_f/t_c		.001	.01	.1	.3	.01	.1	.01	.1	.01	.1
Classic Theory	Weak core	664	456	516	729	243	279	144	169	137	163
	Strong core	122	275	481	711	152	261	104	171	96	157
FSDT	Weak core	620	410	468	668	195	239	130	163	130	158
	Strong core	113	251	437	628	128	224	92	155	91	149
ANSYS F.E.M.	Weak core	1561	835	861	1197	208	215	90	101	78	92
	Strong core	113.4	292	725	1119	90	181	56	90	54	83

نتیجه گیری

در این مقاله پس از تعیین معادلات حاکم بر کمانش صفحات کامپیوزیتی و پانل‌های ساندویچی تحت تنش‌های حرارتی با استفاده از روش انرژی و با در نظر گرفتن تئوری تغییر شکل‌های بزرگ و قرار دادن سری توابع فوریه ارضا کننده شرایط مرزی تغییرمکانی در معادلات حاکم، بار کمانش تعیین شده است.

در بررسی حاضر پانل‌های مستطیل شکل با شرایط مرزی ساده و ترکیبی از لایه‌های کامپوزیتی که به صورت متقارن نسبت به خط مرکزی قرار گرفته، براساس تئوری‌های مختلف برشی اعم از کلاسیک و یا برشی مرتبه اول تحلیل شده‌اند.

در یک مطالعه عددی مقدار بار کمانش یک پانل، با توجه به کاربرد تئوری‌های مختلف برشی و همچنین چیدمان متنوع لایه‌ها تعیین شده است. نتایج، دقت تئوری به کار گرفته شده، اثر ترمهای سری و همچنین اثر قوی یا ضعیف بودن هسته را به خوبی نشان می‌دهد. بر این اساس می‌توان نتیجه گرفت:

۱- بسته به چیدمان لایه‌ها، اثر تعداد ترمهای سری استفاده شده متفاوت می باشد، به گونه‌ای که برای لایه‌گذاری به صورت ارتوتروپ ویژه, تعداد ترمهای سری بکار رفته اثر چندانی ندارد؛ درحالیکه برای چیدمان‌های دیگر، تغییر بار کمانش با افزایش تعداد ترمها کاملاً مشهود است و بار کمانش حرارتی کمتری نسبت به حالت استفاده از یک ترم ارائه می‌دهد.

۲- اثر استفاده از تئوری‌های مختلف برشی در چیدمان‌هایی متفاوت از ارتوترپ ویژه بیشتر مشخص می‌گردد. در هنگام لایه‌گذاری به صورت ارتوترپ ویژه، تئوری برشی بکار رفته اثر چندانی نداشته, ولی در چیدمان‌های متفاوت از آن، در تئوری برشی مرتبه بالا، بار کمانش حرارتی کمتری تعیین می‌گردد. تحلیل‌های عددی انجام شده توسط روش اجزاء محدود نیز تنش حرارتی کمتری نسبت به تئوری کلاسیک ارائه می‌نماید. اما این تنش از حالت استفاده از تئوری برشی مرتبه اول بیشتر است. این قاعده تقریباً برای تمام نسبت‌های جانبی صفحه کامپوزیت صادق است. در صفحات ساندویچی تقریبا اثر مرتبه تئوری برشی به کار رفته در براورد بار کمانشی مشخص بوده و کاربرد تئوری مرتبه بالا مستقل از لایه گذاری پوسته، بار حرارتی کمتری در پی خواهد داشت.

۳- در هنگام استفاده از تئوری هسته ضعیف، بار کمانش حرارتی بسیار بیشتر از تنش حرارتی محاسبه شده در زمان استفاده از تئوری هسته قوی (نوشتن معادلات حاکم به صورت کامل) است. به نظر میرسد که تئوری هسته ضعیف در برقراری یک رابطه منطقی و مناسب بین تغییر نسبت ضخامت هسته به پوسته و تنش کمانش حرارتی محاسبه شده ناتوان بوده و در هنگام استفاده از تئوری هسته قوی روند منطقی‌تری برقرار می‌باشد. این نتیجه در تئوری‌های مختلف برشی و روش اجزاء محدود برای تمام نسبت‌های بعد صفحه مشاهده می‌گردد.

بر اساس مطالعات صورت گرفته در این تحقیق، استفاده از روشهای تحلیلی و کاربرد تئوری برشی مرتبه اول می تواند نتایج محافظه کارانه تری برای کمانش پانلهای ساندویچی روی تکیه گاههای ساده ارائه دهد. همچنین استفاده از تئوری هسته ضعیف برای ساندویچها، هر چند پارامترهای مؤثر و در نتیجه حجم محاسبات را کاهش می دهد، لیکن نمی تواند به عنوان گزینه جایگزین مطمئنی در حل این نوع مسائل در نظر گرفته شود.

مراجع

1 - Allen, H. G. (1989). "Sandwich construction today and tomorrow." *In Sandwich Construction* 1, Karl-Axel Olsson and Ronnal P. Reichard (editors), Proceedings of the First International Conference on Sandwich Constructions, Stockholm, Sweden, June 19-21, PP. 3-22.

2 - Plantema, F. J. (1966). *Sandwich Constructio*n, John Wiley, New York.

3 - Benson, A. S. and Mayers, J. (1967). "General instability and face wrinkling of sandwich plates – unified theory and applications." *AIAA Journa*l, Vol. 5, No. 4, PP. 729-739.

4 - Ha, K. H. (1989). "Finite element analysis of sandwich construction: A critical review." *In Sandwich Construction* 1, Karl-Axel Olsson and Ronnal P. Reichard (editors), Proceedings of the First International Conference on Sandwich Constructions, Stockholm, Sweden, June 19-21, PP. 69-85.

5 - Ha, K. H. (1990). "Finite element analysis of sandwich plates: an overview." *Computers and Structures,* Vol. 37, No. 4, PP. 397-403.

6 - Frostig, Y. (1998). "Buckling of sandwich panels with a flexible core – high-order theory." *International Journal of Solid and Structure*s, Vol. 35, No. 3-4, PP. 183-204.

7 - Tessler, A., Annett, M. S. and Gendron, G. (2001). "A {1,2}-order plate theory accounting for three-dimensional thermoelastic deformations in thick composites and sandwich laminates." *Composite Structures,* Vol. 52, PP. 67-84.

8 - Vonach, W. K. and Rammerstorfer, F. G. (2001). "A general approach to the wrinkling instability of sandwich plates." *Structural Engineering and Mechanics,* Vol. 12, No. 4, PP. 363-376.

9 - Bert, C. W. (1995). "Shear deformation and sandwich configuration." *In Buckling and Postbuckling of Composite Plate*s, G. J. Turvey and I. H. Marshall (editors), Chapman and Hall, PP. 157-189.

10 - Noor, A. K., Burton, W. S. and Bert, C. W. (1996). "Computational models for sandwich panels and shells." *Applied Mechanics Review*s, Vol. 49, No. 3, PP. 155-199.

11 - Librescu, L. and Hause, T. (2000). "Recent developments in the modeling and behavior of advanced sandwich constructions: a survey." *Composite Structure*s, Vol. 48, No. 1-3, PP. 1-17.

12 - Rao, K. M. (1985). "Buckling analysis of anisotropic sandwich plates faced with fiber-reinforced plastics." *AIAA Journa*l, Vol. 23, No. 8, PP. 1247-1253.

13 - Kim, C. G. and Hong, C. S. (1988). "Buckling of unbalanced anisotropic sandwich plates with finite bonding stiffness." *AIAA Journal,* Vol. 26, No. 8, PP. 982-988.

14 - Hadi, B. K. and Matthews, F. L. (1998). "Predicting the buckling load of anisotropic sandwich panels: an approach including shear deformation of the faces." *Composite Structures,* Vol. 42, No. 3, PP. 245-255.

15 - Dawe, D. J. and Yuan, W. X. (2001). "Overall and local buckling of sandwich plates with laminated faceplates, Part I: analysis." *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering,* Vol. 190, PPP. 5197-5213.

16 - Yuan, W. X. and Dawe, D. J. (2001). "Overall and local buckling of sandwich plates with laminated faceplates, Part II: applications." *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering,* Vol. 190, PP. 5215-5231.

17 - Rose, A. C., Moore, D. F., Knight, Jr. N. F. and Rankin, C. C. "Finite element modeling of the buckling response of sandwich panels." *AIAA -2002-1517,* PP. 1-19.

پیوست

در این مقاله ترم‌های زیر مورد استفاده قرار گرفته است :

$$[\overline{Q}]_k = \begin{bmatrix} \overline{Q}_{11} & \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{13} & 0 & 0 & \overline{Q}_{16} \\ \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{22} & \overline{Q}_{23} & 0 & 0 & \overline{Q}_{26} \\ \overline{Q}_{13} & \overline{Q}_{23} & \overline{Q}_{33} & 0 & 0 & \overline{Q}_{36} \\ 0 & 0 & 0 & \overline{Q}_{44} & \overline{Q}_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \overline{Q}_{45} & \overline{Q}_{55} & 0 \\ \overline{Q}_{16} & \overline{Q}_{26} & \overline{Q}_{36} & 0 & 0 & \overline{Q}_{66} \end{bmatrix}$$

این ماتریس برای کلیه مصالح ارتوتروپ تعریف شده وبعضی از ترم‌های ان بر اساس فرضیات ساده کننده‌ای صفر می‌شود، به عنوان مثال برای حالت ارتوتروپ ویژه Q16 ، Q26 و Q36 صفر می‌باشد. در حالت کلی:

$$\overline{Q}_{11} = Q_{11}m^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})m^2n^2 + Q_{22}n^4 \qquad \overline{Q}_{66} = (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12})m^2n^2 + Q_{66}(m^2 - n^2)^2$$

$$\overline{Q}_{12} = (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66})m^2n^2 + Q_{12}(m^4 + n^4) \quad \overline{Q}_{44} = Q_{44}m^2 + Q_{55}n^2, \overline{Q}_{45} = (Q_{55} - Q_{44})mn$$

$$\overline{Q}_{22} = Q_{11}n^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})m^2n^2 + Q_{22}m^4 \qquad \overline{Q}_{55} = Q_{44}n^2 + Q_{55}m^2$$

که در ان:

$$Q_{11} = E_{11}(1 - \upsilon_{23}\upsilon_{32})/\Delta \quad , \; Q_{66} = G_{12}$$

$$Q_{22} = E_{22}(1 - \upsilon_{13}\upsilon_{31})/\Delta , \; Q_{44} = G_{23}$$

$$Q_{11} = (\upsilon_{21} + \upsilon_{13}\upsilon_{31})E_{11}/\Delta , Q_{55} = G_{13}$$

$$\Delta = 1 - \upsilon_{12}\upsilon_{21} - \upsilon_{23}\upsilon_{32} - \upsilon_{13}\upsilon_{31} - 2\upsilon_{21}\upsilon_{32}\upsilon_{13}$$

ترمهای α ضریب انبساط حرارتی بوده وبه صورت زیر محاسبه می گردند:

$$\alpha_x = \alpha_1 m^2 + \alpha_2 n^2 \;\; , \alpha_y = \alpha_1 n^2 + \alpha_2 m^2$$

$$\alpha_{xy} = (\alpha_1 - \alpha_2)mn \; , m = \cos(\theta) \;\; , n = \sin(\theta)$$

θراستای قرار گیری الیاف نسبت به محورهای ارتوتروپ می باشد.