روش بردارهاي ريتز نوين براي تحليل ديناميكي سازه‌ها در حوزة فركانس

سيد اصغر ارجمندي*[1] و وحيد لطفي[2]

[1]دانش آموخته كارشناسی ارشد دانشكده مهندسي عمران و محيط زيست - دانشگاه صنعتي اميركبير

[2]استاد دانشكده مهندسي عمران و محيط زيست - دانشگاه صنعتي اميركبير

(تاريخ دريافت ۸۴/۴/۱۱ ، تاريخ دريافت روايت اصلاح شده ۸۵/۷/۸ ، تاريخ تصويب ۸۵/۷/۲۹)

چكيده

روش ريتز يكي از روش‌هاي كاهش درجات آزادي مي‌باشد. كارآيي روش ريتز بستگي به بردارهاي استفاده شده دارد. مزيتي كه روش ريتز بر روش مدي دارد اين است كه بردارهاي ريتز با توجه به بار وارد بر سازه محاسبه مي‌شوند. به همين دليل بهتر مي‌توانند تغيير شكل سازه تحت بار مورد نظر را تقريب بزنند. بر خلاف شكل مدها كه مستقل از بار وارده مي‌باشند. بردارهاي ريتزي كه بر اساس توزيع مكاني بار وارد بر سازه محاسبه مي‌شوند بردارهاي وابسته به بار نام دارند. هيومار و همكارش نوع ديگري از بردارهاي ريتز كه علاوه بر توزيع مكاني بار به محتواي فركانسي بار نيز بستگي داشت معرفي كردند و آنها را بردارهاي ريتز وابسته به فركانس ناميدند. در اين مقاله بردارهاي ريتز جديدي معرفي شده‌اند. اين بردارها در تحليل يك سازه مي‌توانند جايگزين هر دو نوع بردارهاي ذكر شده شوند. ثابت شده است اين بردارها مستقل خطي هستند. با حل مثالهاي مختلفي در حالت‌هاي دوبعدي و سه‌بعدي مشاهده شد كه روش ريتز با استفاده از اين بردارها موثر و بسيار كارآمد مي‌باشد.

واژه هاي كليدي : روش ريتز - تحليل ديناميكي سازه‌ها - بردارهاي ريتز وابسته به بار - بردارهاي ريتز وابسته به فركانس - همگرايي روش ريتز

مقدمه

يكي از روش‌هاي كاهش درجات آزادي در تحليل سازه‌ها روش ريتز مي‌باشد. اين روش براي اولين بار در دهه ۸۰ در یک كار تحقيقاتي زير نظر پروفسور ويلسون در دانشگاه بركلي بررسي شد [۲،۱]. كه طي آن روشي براي استفاده از مفهوم ريتز در برنامه‌هاي اجزاي محدود پيشنهاد گرديد. پس از آن ويلسون و همكارانش سعي در رفع عيوب و افزايش كارآيي آن كردند. مانند رفع ناپايداري عددي موجود در آن، تعريف معيارهاي پذيرش بردارها، اصلاح خود بردارها و غيره [۳-۵]. مقالات متعددي ارائه شده است كه كاربردهاي اين روش را در زمينه‌هاي مختلف تحليل سازه‌ها، مانند تحليل ديناميكي سازه‌هاي بزرگ [۶]، انتشار امواج [۷] و روش زيرسازه [۸] نشان مي‌دهد.

خط مشي كلي اين روش بر اين قرار است كه ابتدا چند بردار، كه بردارهاي ريتز ناميده مي‌شوند، محاسبه مي‌گردند (به روشي كه بعداً توضيح داده خواهد شد). سپس پاسخ سيستم تركيب خطي از اين بردارها فرض مي‌گردد، و معادلاتي به دست مي‌آيد كه ابعاد آن برابر تعداد بردارهاي انتخاب شده است كه معادلات كاهش يافته ناميده مي‌شود. با حل اين معادلات پاسخ سيستم به دست مي‌آيد. انتخاب مناسب بردارهاي ريتز مرحله بسيار مهم اين روش مي‌باشد، كه تاثير مستقيم در كارآمد بودن آن دارد. بردارهايي كه توسط ويلسون و همكارانش معرفي شده‌اند (و در همة مراجع [۱-۸] از اين بردارها استفاده شده است) بر اساس توزيع مكاني بار بر روي سازه محاسبه مي‌گردند و به همين دليل بردارهاي وابسته به بار ناميده مي‌شوند. هيومار و همكارش نشان دادند كه براي تحليل سازه تحت باري كه فركانسش در مقايسه با چند فركانس طبيعي اول سازه بزرگ باشد، ديگر بردارهاي ويلسون به تنهايي كارا نيستند و بايد از يك سري بردارهاي ريتز ديگر همراه آنها استفاده كرد [۹]. او اين بردارها را بردارهاي ريتز وابسته به فركانس ناميد. در اين مقاله بردارهاي جديدي ارائه شده است، و همگرايي روش با اين بردارها مورد بررسي قرار گرفته است. اين بردارها كه براي اولين بار معرفي مي‌گردند، كار هر دو نوع بردارهاي وابسته به بار و فركانس را انجام مي‌دهند. چنانچه تحليل در حوزه فركانس مد نظر باشد، بردارهاي ريتز نوين (بردارهايي كه در اين مقاله معرفي مي‌شوند) مي‌توانند مختلط باشند كه اين مطلب نيز به كارآيي اين بردارها مي‌افزايد. در ادامه ابتدا طرز محاسبه بردارهاي ريتز معمول

* نويسنده مسئول : تلفن : ۰۲۱-۲۲۲۹۳۰۰۶ ، فاكس : ۰۲۱ – ۶۶۴۱۴۲۱۳ ، Email: as_arjmandi@yahoo.com

ارائه مي‌گردد و سپس بردارهاي ريتز نوين مورد بحث قرار مي‌گيرند.

بردارهاي ريتز معمول

در اين بخش بردارهايي كه در تحليل به روش ريتز معمول مورد استفاده قرار مي‌گيرند، ارائه مي‌گردد. در اكثر تحقيقات بردارهايي شبيه آنچه در زير توضيح داده مي‌شود، استفاده شده است [۱-۸] ، ولي ممكن است در بين آنها اندكي اختلاف وجود داشته باشد.

معادله تعادل ديناميكي يک سيستم سازه‌اي كه بر حسب تغيير مكانهاي گرهي نوشته شده باشد، به شكل زير است:

$$\mathbf{M}\,\ddot{\mathbf{r}} + \mathbf{C}\,\dot{\mathbf{r}} + \mathbf{K}\,\mathbf{r} = \mathbf{p}(s,t)$$

(۱)

كه $\mathbf{M}$، $\mathbf{C}$ و $\mathbf{K}$ به ترتيب ماتريسهاي جرم، ميرايي و سختي هستند و بردار وابسته به زمان $\mathbf{r}$ شامل تغيير مكانهاي نسبي گرهي مي‌باشد. براي اغلب بارگذاري‌ها بار متغير با زمان را مي‌توان به صورت مجموع حاصلضرب توزيع‌هاي مكاني بار و توابع زمان به شكل زير نوشت:

$$\mathbf{p}(s,t) = \sum_{j} \mathbf{f}_j(s)\,g_j(t) = \mathbf{f}(s)\,\mathbf{g}(t)$$

(۲)

كه در مورد بارگذاري زلزله در يک جهت مشخص فقط يک بردار لازم است، زيرا $\mathbf{f}_1$ شامل مولفه‌هاي جرم در راستاي مورد نظر و $g_1(t)$ قرينة شتاب زلزله وارده مي‌باشد.

بردارهاي مورد بحث به شكلي كه در ذيل توضيح داده مي‌شود، محاسبه مي‌شوند. اولين بردار از حل معادله زير به دست مي‌آيد:

$$\mathbf{K}\,\mathbf{x}_1^* = \mathbf{f}_1$$

(۳)

و بردارهاي بعدي نيز با معادله بازگشتي زير محاسبه مي‌گردند:

$$\mathbf{K}\,\mathbf{x}_i^* = \mathbf{M}\,\mathbf{x}_{i-1} \qquad i = 2,\ldots,n$$

(۴)

در هر مرحله طبق روند زير اين بردارها نسبت به ماتريس جرم متعامد مي‌شوند:

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_i^* - \sum_{j=1}^{i-1} c_j \mathbf{x}_j$$

(۵ – الف)

$$c_j = \mathbf{x}_j^T \mathbf{M}\,\mathbf{x}_i^*$$

(۵- ب)

و بعد از اينكه هر بردار محاسبه شد، طبق رابطه زير نرمال مي‌گردد:

$$\mathbf{x}_j^T \mathbf{M}\,\mathbf{x}_j = 1$$

(۶)

اين مراحل زماني پايان مي‌يابد كه بردار بعدي محاسبه شده، بر همه بردارهاي قبلي عمود باشد [۱]. در بعضي مقالات، مانند مرجع [۱]، پس از انجام مراحل فوق براي اينكه بردارهاي به دست آمده نسبت به ماتريس سختي نيز تعامد داشته باشند، از حل يك مسالة مقدار ويژه، شكل مدهاي سيستم كاهش يافته به دست آمده و به كمک آنها، بردارهاي ريتز كه هم نسبت به ماتريس جرم و هم ماتريس سختي متعامد مي‌باشند، محاسبه مي‌شوند. بردارهاي ريتز كه طبق روند فوق محاسبه مي‌شوند داراي يك تعبير فيزيكي نيز هستند [۱] كه براي دوري از اطالة كلام از ذكر آن خودداري مي‌كنيم.

بردارهاي وابسته به فركانس كه در مرجع [۹] معرفي شده‌اند طبق روندي مشابه روند فوق محاسبه مي‌شوند. با اين تفاوت كه به جاي استفاده از ماتريس سختي $\mathbf{K}$ از ماتريس سختي انتقال داده شده $\mathbf{K} - \mu\,\mathbf{M}$ استفاده مي‌شود. كه μ مجذور فركانس غالب بارگذاري است.

بردارهاي ريتز نوين

در اين بخش بردارهاي ريتز مورد استفاده در اين مقاله معرفي مي‌گردند. با توجه به توضيحات قسمت قبل، معادلات تعادل ديناميكي يك سيستم سازه‌اي كه تحت تاثير بار زلزله است، بر حسب درجات آزادي گرهي به شكل زير نوشته مي‌شود:

$$\mathbf{M}\,\ddot{\mathbf{r}} + \mathbf{C}\,\dot{\mathbf{r}} + \mathbf{K}\,\mathbf{r} = g_1(t)\,\mathbf{f}_1(s)$$

(۷)

بردارهايي كه در اين مقاله معرفي مي‌گردند، به صورتي كاملاً متفاوت از بردارهاي معمول محاسبه مي‌شوند. معادله (۷) را مي‌توان در حوزه فركانس به صورت زير نوشت:

$$\left[-\omega^2\,\mathbf{M} + \mathbf{K}\,(1 + 2\,\beta\,i)\right]\mathbf{r}(\omega) = G_1(\omega)\,\mathbf{f}_1(s)$$

(۸)

كه $\mathbf{r}(\omega)$ طبق رابطه زير تعريف مي‌شود:

$$\mathbf{r}(\omega) = \mathbf{r}(t)\, e^{-i\omega t}$$

(۹)

و $G_1(\omega)$ تبديل فورية تابع $g_1(t)$ مي‌باشد، همچنين فرض شده است كه ميرايي سازه از نوع هيسترتيك باشد. به اين معني كه:

$$\mathbf{C} = \frac{2\beta}{\omega}\mathbf{K}$$

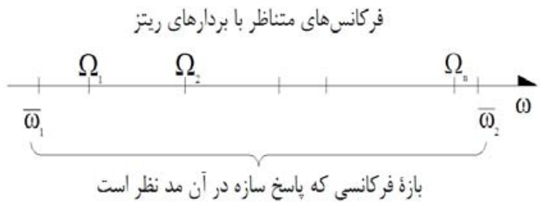
(۱۰)

كه β ضريب ميرايي هيسترتيك مي‌باشد. چنانچه پاسخ سيستم در حوزه فركانس مد نظر باشد، معادلة (۸) به ازاي فركانس‌هاي مختلفي كه از بازه فركانس مورد نظر انتخاب مي‌شوند، حل شده و پاسخ سيستم در آن بازه به دست مي‌آيد. شبيه اين معادله در محاسبه بردارهاي ريتز نوين نيز مورد استفاده قرار مي‌گيرد. اين بردارها، پاسخ‌هاي معادلة (۸) به ازاي فركانس‌هاي مختلف تحريك با دامنة واحد $(G_1(\omega)=1)$ است:

$$\left[-\Omega_i^2\ \mathbf{M} + \mathbf{K}\,(1+2\beta i)\right]\mathbf{X}_i^R = \mathbf{f}_1(s)$$

(۱۱)

در معادله فوق $\mathbf{X}_i^R$ بردار ريتز i ام، و Ω_i فركانس متناظر با آن مي‌باشد. مقادير اين فركانس‌ها در بازه فركانسي كه پاسخ سيستم در آن مد نظر است، به طور دلخواه انتخاب مي‌شوند.



شكل ۱ : Ω_i ها براي محاسبه بردارهاي ريتز.

بردارهاي به دست آمده به شكل زير در ماتريس مربوطه ذخيره مي‌گردند:

$$\mathbf{X}^R = \left[\,\mathbf{X}_1^R \quad \mathbf{X}_2^R \quad \cdots \quad \mathbf{X}_n^R\,\right]$$

(۱۲)

كه n تعداد بردارهاي به كار رفته در تحليل است. اكنون پاسخ سيستم تركيبي از بردارهاي محاسبه شده فرض مي‌شود:

$$\mathbf{r} = \mathbf{X}^R\mathbf{Y}^R$$

(۱۳)

كه بردار $\mathbf{Y}^R$ شامل ضرايب مشاركت بردارهاي ريتز در پاسخ سيستم مي‌باشد. جايگذاري رابطه (۱۳) در معادله (۸) و پيش ضرب كردن آن در ماتريس $\left(\mathbf{X}^R\right)^T$ رابطه زير را نتيجه مي‌دهد:

$$\mathbf{K}_d\mathbf{Y}^R = \mathbf{F}^R$$

(۱۴)

ماتريس $\mathbf{K}_d$ و بردار $\mathbf{F}^R$ به صورت زير تعريف مي‌شوند:

$$\mathbf{K}_d = \left(\mathbf{X}^R\right)^T\left[-\omega^2\ \mathbf{M} + \mathbf{K}\,(1+2\beta i)\right]\left(\mathbf{X}^R\right)$$

$$\mathbf{F}^R = \left(\mathbf{X}^R\right)^T G_1(\omega)\mathbf{f}_1(s)$$

(۱۵- الف و ب)

با حل دستگاه معادلات كاهش يافتة (۱۴) به ازاي فركانس‌هاي مختلف ω، مي‌توان پاسخ سازه را در حوزة فركانس تحت بار $G_1(\omega)$ به دست آورد. در ادامه همگرايي اين نوع بردارهاي ريتز بررسي مي‌شود.

همگرايي بردارهاي ريتز نوين

سئوالي كه در مورد اين بردارها مطرح مي‌شود، اين است كه آيا بردارهاي محاسبه شده داراي استقلال خطي هستند؟ چون در غير اينصورت ماتريس $\mathbf{K}_d$ داراي دترمينان صفر، و حل معادله ماتريسي (۱۴) غيرممكن خواهد بود. از سوي ديگر مي‌دانيم كه استفاده از N بردار در صورتي كه مستقل باشند پاسخ دقيق سيستم را به دست مي‌دهد. كه N تعداد درجات آزادي مساله است. در زير نشان داده مي‌شود كه بردارهاي نوين مستقل هستند، حتي اگر در فركانس‌هاي دلخواهي محاسبه شده باشند.

قبل از اثبات استقلال خطي، نكتة ديگري كه در مورد همگرايي اين بردارها وجود دارد اين است كه، از آنجا كه اين بردارها پاسخ سيستم در چند فركانس مختلف هستند، پاسخ معادلات كاهش يافته (معادله (۱۴))، در فركانس‌هايي كه بردارهاي ريتز در آن محاسبه شده‌اند، (Ω_i ها)، برابر پاسخ دقيق سيستم (پاسخ معادلات كاهش نيافته، معادله (۸)) خواهد بود. اين نكته در مثال‌هاي حل شده به وضوح ديده خواهد شد.

اثبات استقلال خطي بردارهاي نوين

شكل مدهاي سيستم داراي ميرايي از مسالة مقدار ويژه زير به دست مي‌آيند:

$$\left[-\omega_i^2\ \mathbf{M}+\mathbf{K}\,(1+2\,\beta\,\mathrm{i})\right]\mathbf{X}_i=\mathbf{0}$$

(۱۶)

كه $\mathbf{X}_i$ شكل مد i ام و ω_i فركانس طبيعي متناظر با آن مي‌باشد. فركانس‌هاي طبيعي داراي مقدار مختلط و شكل مدها داراي مقادير حقيقي هستند. شكل مدها و فركانس‌هاي طبيعي به دست آمده، به شكل زير در ماتريس‌هاي مربوطه قرار داده مي‌شوند:

$$\mathbf{X}=\left[\,\mathbf{X}_1\quad \mathbf{X}_2\quad \cdots\quad \mathbf{X}_N\,\right]$$

(۱۷- الف)

$$\mathbf{\Lambda}=\mathrm{Diag}\left[\,\omega_1^2\quad \omega_2^2\quad \cdots\quad \omega_N^2\,\right]$$

(۱۷- ب)

كه N بعد ماتريس‌هاي معادله (۱۶) مي‌باشد (همة شكل مدها، مورد استفاده قرار مي‌گيرند). معادلة (۱۶) يك مسالة مقدار ويژه خطي است. بنابراين، چنانچه شكل مدها نسبت به ماتريس جرم نرمال شده باشند، روابط تعامد بين مدها به شكل زير برقرار است:

$$\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}\,\mathbf{X}=\mathbf{I}$$

(۱۸- الف)

$$\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}\,\mathbf{X}\,(1+2\,\beta\,\mathrm{i})=\mathbf{\Lambda}$$

(۱۸- ب)

همان طور كه ذكر شد، بردارهاي نوين پاسخ‌هاي معادلة (۸) به ازاي فركانس‌هاي مختلف تحريك با دامنة واحد $\left(G_1(\omega)=1\right)$ است:

$$\left[-\omega^2\ \mathbf{M}+\mathbf{K}\,(1+2\,\beta\,\mathrm{i})\right]\mathbf{r}'=\mathbf{f}_1(s)$$

(۱۹)

سعي مي‌كنيم ابتدا معادلة فوق را به مختصات مدي انتقال دهيم و سپس بردارهاي ريتز را محاسبه كنيم. با فرض $\mathbf{r}'$ در معادله فوق به صورت تركيب خطي از شكل مدهاي محاسبه شده و پيش ضرب كردن آن معادله با $\mathbf{X}^{\mathrm{T}}$ و استفاده از روابط تعامد (۱۸)، معادله زير در مختصات مدي به دست مي‌آيد:

$$\left[-\omega^2\ \mathbf{I}+\mathbf{\Lambda}\right][\mathbf{Y}]=\mathbf{F}$$

(۲۰)

كه $\mathbf{Y}$ شامل ضرايب مشاركت مدها مي‌باشد و $\mathbf{F}$ به صورت زير تعريف مي‌شود:

$$\mathbf{F}=\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{f}_1(s)$$

(۲۱)

اكنون، براي محاسبه بردار ريتز i ام $\mathbf{X}_i^R$ ، در فركانس Ω_i ، مي‌توان معادله زير را حل كرد:

$$\left[-\Omega_i^2\ \mathbf{I}+\mathbf{\Lambda}\right][\mathbf{Y}_i]=\mathbf{F}$$

(۲۲)

معادله ماتريسي (۲۲) در حقيقت چند معادله يك مجهولي مستقل مي‌باشد، كه جوابهاي آن به اين شكل است:

$$Y_{ji}=\frac{F_j}{-\Omega_i^2+\omega_j^2}$$

(۲۳)

كه Y_{ji} درايه j ام بردار $\mathbf{Y}_i$ و F_j درايه j ام بردار $\mathbf{F}$ مي‌باشند. بنابراين، بردار $\mathbf{X}_i^R$ به شكل زير به دست مي‌آيد:

$$\mathbf{X}_i^R=\frac{F_1}{-\Omega_i^2+\omega_1^2}\mathbf{X}_1+\frac{F_2}{-\Omega_i^2+\omega_2^2}\mathbf{X}_2+\cdots+\frac{F_N}{-\Omega_i^2+\omega_N^2}\mathbf{X}_N$$

(۲۴)

بردارهاي $\mathbf{X}_i^R$ در N فركانس مختلف Ω_i ، محاسبه شده و طبق رابطه (۱۲) در ماتريس $\mathbf{X}^R$ ذخيره مي‌گردند. اكنون با توجه به رابطه (۲۴) واضح است كه رابطه زير بين $\mathbf{X}^R$ و $\mathbf{X}$ برقرار است:

$$\mathbf{X}^R=\mathbf{X}\,\mathbf{Z}$$

(۲۵)

كه ماتريس $\mathbf{Z}$ به شكل زير تعريف مي‌شود:

$$\mathbf{Z}=\begin{bmatrix}\frac{F_1}{-\Omega_1^2+\omega_1^2} & \frac{F_1}{-\Omega_2^2+\omega_1^2} & \cdots & \frac{F_1}{-\Omega_N^2+\omega_1^2}\\ \frac{F_2}{-\Omega_1^2+\omega_2^2} & \frac{F_2}{-\Omega_2^2+\omega_2^2} & \cdots & \frac{F_2}{-\Omega_N^2+\omega_2^2}\\ & \vdots & \vdots & \\ \frac{F_N}{-\Omega_1^2+\omega_N^2} & \frac{F_N}{-\Omega_2^2+\omega_N^2} & \cdots & \frac{F_N}{-\Omega_N^2+\omega_N^2}\end{bmatrix}$$

(۲۶)

ضمناً مي‌دانيم كه شكل مدهاي $\mathbf{X}_i$ مستقل هستند، بنابراين وابسته بودن بردارهاي $\mathbf{X}_i^R$ معادل صفر بودن دترمينان ماتريس $\mathbf{Z}$ است، و برعكس. با فاكتورگيري F_i ها از اين دترمينان، به يك دترمينان ساده مي‌رسيم:

$$|\mathbf{Z}|=F_1\,F_2\cdots F_N\times\begin{vmatrix}\frac{1}{-\Omega_1^2+\omega_1^2} & \frac{1}{-\Omega_2^2+\omega_1^2} & \cdots & \frac{1}{-\Omega_N^2+\omega_1^2}\\ \frac{1}{-\Omega_1^2+\omega_2^2} & \frac{1}{-\Omega_2^2+\omega_2^2} & \cdots & \frac{1}{-\Omega_N^2+\omega_2^2}\\ & \vdots & \vdots & \\ \frac{1}{-\Omega_1^2+\omega_N^2} & \frac{1}{-\Omega_2^2+\omega_N^2} & \cdots & \frac{1}{-\Omega_N^2+\omega_N^2}\end{vmatrix}$$

(۲۷)

مي‌توان نشان داد، كه دترمينان فوق برابر عبارت زير است:

$$\underbrace{F_1\,F_2\cdots F_N}_{I}\times\underbrace{\frac{\prod\limits_{i,j=1\;i<j}^{N}\left(-\Omega_i^2+\Omega_j^2\right)\left(\omega_i^2-\omega_j^2\right)}{\prod\limits_{i,j=1}^{N}\left(-\Omega_j^2+\omega_i^2\right)}}_{II}$$

(۲۸)

عبارت فوق از دو بخش تشكيل شده است (بخش I و II)، كه براي استقلال بردارهاي ريتز لازم است هر دو بخش مخالف صفر باشند. بخش دوم زماني صفر است كه دو Ω_i و يا دو ω_i برابر باشند. برابر بودن دو Ω_i امكانپذير نيست، زيرا كه بردارها در فركانس‌هاي مختلف محاسبه مي‌شوند. ولي دو ω_i زماني برابر هستند كه سيستم دو فركانس طبيعي برابر داشته باشد. در صورتي كه اين امر نيز تحقق نيابد (كه در مورد اكثر سازه‌ها صادق است)، بخش دوم عبارت فوق همواره مخالف صفر خواهد بود. اما بخش اول زماني صفر است كه $\mathbf{f}_1$ به يك يا چند عدد از شكل مدهاي سيستم عمود باشد (يعني با توجه به رابطه (۲۱)، $\mathbf{X}_i^T\mathbf{f}_1(s)=0$ باشد)، كه باعث مي‌شود، اين مدها تحت بارگذاري $\mathbf{f}_1$ تحريك نشوند. در حقيقت در اين حالت مدهاي مذكور در پاسخ سيستم تحت اين بارگذاري هيچ نقشي نخواهند داشت. بنابراين هنگامي كه معادلات سيستم را به مختصات مدي انتقال مي‌دهيم، مدهاي مذكور را از ماتريس $\mathbf{X}$ حذف مي‌كنيم (بدون اينكه پاسخ سيستم تغيير كند). به اين ترتيب جملات مربوط به اين مدها در بخش I نيز حذف و آن بخش غير صفر خواهد شد. در اين صورت، به دليل كاهش ابعاد معادله (۲۵)، ديگر تعداد بردارهاي مستقل N نخواهد بود، بلكه به تعداد مدهاي حذف شده از تعداد اين بردارها كم مي‌شود. به اين ترتيب، تعداد بردارهاي مستقل هميشه برابر تعداد مدهاي تحريك شده تحت بار $\mathbf{f}_1$ خواهد بود. با توجه به اين مطلب واضح است كه چنانچه همة بردارهاي مستقل در تحليل به اين روش مورد استفاده قرار گيرند پاسخ دقيق سيستم حاصل خواهد شد.

روش‌هاي تركيب بردارهاي ريتز نوين

چنانچه پاسخ سيستم در بازة فركانس $[\overline{\omega}_1,\overline{\omega}_2]$ مد نظر باشد، همانطور كه مشاهده گرديد، بايد n فركانس مختلف Ω_i ، در اين بازه انتخاب شود و در هر فركانس يك بردار محاسبه گردد. پس از اين مرحله دو روش در پيش رو وجود دارد:

۱- پاسخ سيستم تركيبي از همه n بردار محاسبه شده فرض مي‌گردد و يك دستگاه معادلات n مجهولي به دست مي‌آيد كه بايد به ازاي فركانس‌هاي مختلف تحريك در بازة $[\overline{\omega}_1,\overline{\omega}_2]$ حل گردد تا پاسخ سيستم در آن بازه به دست آيد.

۲- در محاسبه پاسخ سيستم در فركانس ω ، واضح است كه سهم بردارهايي كه داراي فركانس Ω_i نزديك‌تري به ω هستند، نسبت به بردارهايي كه داراي فركانس دورتري هستند، بيشتر است. با توجه به اين حقيقت در روش دوم، بازة فركانس $[\overline{\omega}_1,\overline{\omega}_2]$ به چند زير بازه تقسيم مي‌شود و براي محاسبه پاسخ سيستم در هر زير بازه فقط نزديكترين m بردار اطراف آن زير بازه مورد استفاده قرار مي‌گيرند. به اين ترتيب ابعاد دستگاه معادله‌اي كه بايد براي هر فركانس حل گردد، ديگر n نيست، بلكه برابر m، تعداد بردارهاي استفاده شده در هر زير بازه است، كه مي‌تواند بسيار كمتر از n باشد. اين روش فقط براي بردارهاي نوين قابل استفاده است.

نتايج حاصل از هر دو روش فوق در بخش‌هاي بعدي ارائه خواهد شد.

مدل‌هاي تحليل شده و پارامترهاي اصلي

يك برنامه كامپيوتري بر اساس تئوري ارائه شده در بالا و به زبان برنامه نويسي دلفي (Delphi) نوشته شد. مدل‌هاي مختلفي با استفاده از اين برنامه تحليل شده و نتايج زير به دست آمد.

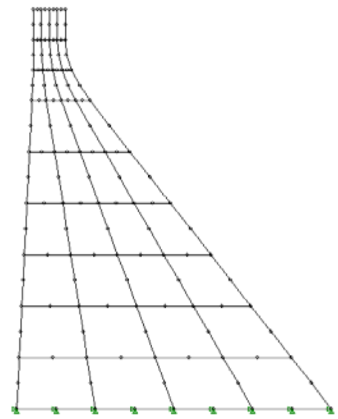
مدل‌هاي تحليل شده

به عنوان مثالهاي كنترلي يك سازة كه در حالت دوبعدي تحليل مي‌شود و يك سازة ديگر كه لازم است به صورت سه بعدي تحليل گردد، انتخاب گرديدند. مثال اول سد وزني معروف Pine Flat مي‌باشد، كه يك مقطع قائم از آن در حالت كرنش مسطح مورد تحليل قرار گرفته است. اين مقطع با تعداد ۳۶ المان ايزوپارامتريك ۸ گرهي مسطح مش‌بندي شده است (شكل (۲)). براي ساده‌سازي مخزن سد خالي و پي آن نيز صلب فرض گرديده است. در ادامه با عنوان مدل A به اين مدل اشاره خواهد شد.

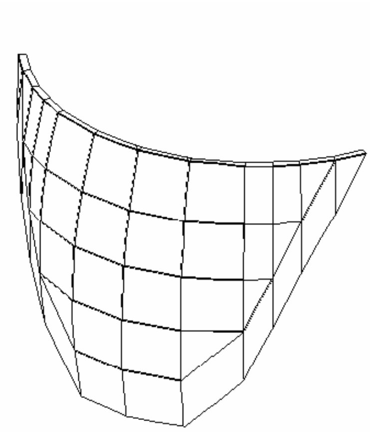
مثال دوم، مدلي متقارن شده از سد قوسي Morrow Point مي‌باشد. اين سد با المان‌هاي ايزوپارامتريك ۲۰ گرهي گسسته سازي گرديده است (شكل(۳)). مانند مدل بالا در

این حالت نیز مخزن سد خالي و پي، صلب فرض شده است. این مدل نیز مدل B نامگذاري مي‌شود.

در هر دو حالت فوق براي سازه ميرايي هيسترتيك در نظر گرفته شده است. بارگذاري به صورت تحريك تكيه‌گاهي در جهت افقي انجام شده است. فركانس بارگذاري نيز از فركانس صفر تا پنج برابر اولين فركانس طبيعي سازه انتخاب شده است.



شکل ۲: مدل دو بعدي سد Pine Flat (مدل A).



شکل ۳ : مدل سه بعدي سد Morrow Point (مدل B).

پارامترهاي اصلي

بتن بدنه سد به صورت يكنواخت، ايزوتروپ، با خاصيت ويسكو الاستيك خطي و با پارامترهاي زير فرض شده است:

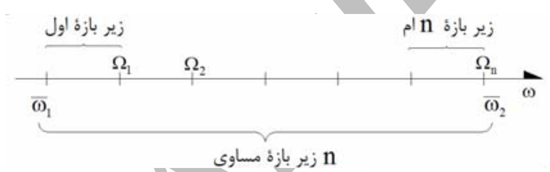
مدول الاستيسيته E و وزن مخصوص	اختياري
نسبت پواسون	۰/۲
ضريب ميرايي هيسترتيك β	۰/۰۵

در نمودارهاي رسم شده محور قائم يا پاسخ سازه، نسبت شتاب افقي در تاج سد (در مورد مدل A گره بالادست تاج سد و در مورد مدل B گره مياني خط تقارن تاج سد) به شتاب وارده در پي مي‌باشد و محور افقي، فركانس تحريك مي‌باشد كه نسبت به اولين فركانس طبيعي سازه نرمال شده است. از آنجا كه هر دو كميت فوق بي بعد هستند، اين نمودارها فقط به پارامترهاي بي بعد مي‌تواند وابسته باشد. به همين دليل مستقل از مقادير مدول الاستيسيته و وزن مخصوص مي‌باشند.

نتايج

همانطور كه در بخش‌هاي پيشين اشاره شد، بردارهاي ريتز نوين نوع متفاوتي از بردارهاي ريتز هستند. اين بردارها پاسخ سيستم به تحريك هارمونيك با چند فركانس دلخواه مي‌باشند و در حالت كلي از اعداد مختلط تشكيل شده‌اند. در قسمت‌هاي قبل نشان داده شد كه اين بردارها مستقل خطي هستند.

چنانچه تحليل در حوزهٔ فركانس مد نظر باشد، فركانس‌هاي متناظر با بردارهاي ريتز نوين (Ω_i ها) مي‌توانند در بازه فركانس تحليل (بازهٔ فركانسي كه پاسخ سازه در آن مد نظر است)، انتخاب گردند. در مثالهاي حل شده اين فركانس‌ها به اين شكل انتخاب شده‌اند كه بازهٔ فركانس تحليل به n زير بازه مساوي تقسيم شده و در فركانس انتهاي هر زير بازه يک بردار محاسبه گرديده است (شكل ۴). n، تعداد بردارهاي خواسته شده است.



شکل ۴ : فركانس‌هاي نظير بردارهاي ريتز، Ω_i ها.

همانطور كه قبلاً ذكر شد، به دليل اينكه بردارهاي ريتز پاسخ دقيق سيستم در فركانس‌هاي Ω_i مي‌باشند، پاسخ روش ريتز در اين فركانس‌ها برابر پاسخ دقيق خواهد بود. اين مطلب در شكل (۵) ديده مي‌شود. در قسمت الف اين شكل پاسخ مدل A كه با استفاده از ۳ بردار ريتز محاسبه گشته، رسم شده است. اين پاسخ با استفاده از روش تركيب ۱ به دست آمده كه با عنوان Method I در شكل مشخص گرديده است. پاسخ دقيق نيز به منظور مقايسه در اين شكل آمده است. پاسخ دقيق با استفاده از روش مستقيم يعني حل

معادلهٔ (۸) محاسبه شده است. محل فركانس‌هاي متناظر با بردارهاي ريتز با خطوط عمودي مشخص گرديده است. مشاهده مي‌شود در محل بردارهاي ريتز پاسخ روش ريتز منطبق بر پاسخ دقيق مي‌باشد. همچنين پاسخ مدل B كه با استفاده از ۷ بردار ريتز محاسبه گرديده، در قسمت ب نشان داده شده است. در اين شكل نيز ملاحظه مي‌شود در محل بردارهاي ريتز دو پاسخ بر هم منطبق هستند.

با افزايش تعداد بردارهاي ريتز، پاسخ اين روش به پاسخ دقيق نزديكتر مي‌گردد. در شكل (۶- الف) پاسخ مدل A با ۵ بردار ريتز ديده مي‌شود كه كاملاً منطبق بر پاسخ دقيق است. پاسخ اين مدل به روش ريتز معمول (بردارهاي ريتز وابسته به بار) با استفاده از ۵ بردار ريتز در شكل (۶- ب) ارائه شده است. از مقايسهٔ دو شكل (۶- الف) و (۶- ب) مشاهده مي‌گردد كه روش ريتز نوين با تعداد بردار برابر جواب بسيار دقيقتري به دست داده است. براي محاسبهٔ پاسخي با دقت قابل مقايسه با روش ريتز نوين تعداد ۷ بردار ريتز معمول لازم مي‌باشد. در شكل (۸- الف) نيز پاسخ اين مدل به روش مدي با استفاده از ۸ شكل مد نشان داده شده است. حداقل تعداد مدهاي لازم در اين حالت ۸ شكل مد مي‌باشد تا دقتي در حد قابل مقايسه با روش ريتز به دست آيد.

هر چند در روش مدي دستگاه معادلاتي كه بايد حل شود داراي ماتريس ضرايب قطري است، و اين امر باعث كاهش حجم محاسبات در اين مرحله از اين روش مي‌شود، لكن از سوي ديگر محاسبهٔ شكل مدها عمليات رياضي زيادتري نسبت به محاسبهٔ بردارهاي ريتز مي‌طلبد.

پاسخ مدل B با استفاده از ۱۳ بردار به دو روش ريتز نوين و ريتز معمول در شكل (۷) ارائه شده است. ملاحظه مي‌گردد كه در اين حالت نيز پاسخ روش ريتز نوين با تعداد بردارهاي برابر دقيق‌تر مي‌باشد. پاسخ اين مدل به روش مدي با استفاده از ۲۶ شكل مد را مي‌توان در شكل (۸- ب) مشاهده كرد. پاسخ مدل B به تحريك افقي و قائم در مرجع [۱۰] وجود دارد.

لازم به ذكر است كه روش ريتز نوين بدون تغيير در مورد تحليل سيستم‌هايي كه معادلات حاكم بر آنها شامل ماتريس تابع فركانس مي‌باشد، مانند سيستم‌هاي اندركنش خاك- سازه و اندركنش آب- سازه، قابل اعمال است. همچنين اين بردارها مي‌توانند با كمي تغيير در حوزهٔ زمان نيز مورد استفاده قرار گيرند.

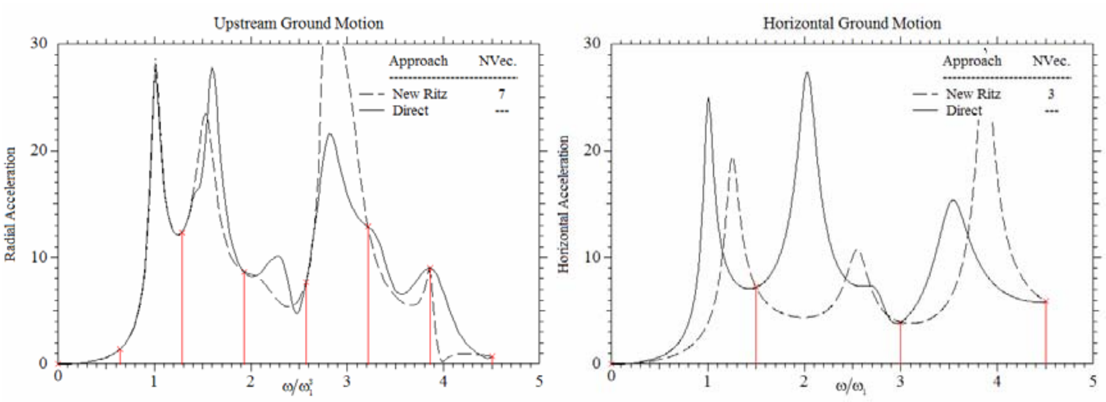
در بخش‌هاي قبل به دو روش تركيب بردارهاي نوين اشاره شد. نتايج و نمودارهايي كه تا اين مرحله ارائه شد با استفاده از روش اول به دست آمده بود. در روش دوم تركيب بردارها همانطور كه قبلاً توضيح داده شد، به جاي استفادهٔ همزمان از همهٔ n بردار محاسبه شده، در يك زمان تنها از m بردار استفاده مي‌شود. به اين ترتيب كه براي محاسبهٔ پاسخ سازه در يك زيربازه از نزديك‌ترين m بردار اطراف آن زيربازه استفاده مي‌شود. در شكل (۹)، m بردار مورد استفاده براي تحليل سازه در يك زيربازه نمونه با شماره‌گذاري مشخص شده است.

در شكل (۱۰) پاسخ مدل B به روش ريتز و با هر دو روش تركيب بردارها آمده است. مشاهده مي‌گردد كه روش دوم تركيب بردارها نيز به جواب‌هاي بسيار دقيقي مي‌رسد. در اين شكل كلمهٔ Method II به روش دوم تركيب بردارها اشاره دارد و تعداد بردارها نيز با دو عدد مشخص گرديده كه عدد اول n و عدد دوم m مي‌باشد. به عنوان مثال براي محاسبه پاسخ شكل (۱۰- الف) در مجموع ۱۸ بردار محاسبه شده كه در هر زير بازه فقط از ۶ عدد آنها استفاده شده است.

هر دو روش تركيب بردارها با افزايش بردارهاي مورد استفاده خيلي سريع به جواب دقيق همگرا مي‌شوند، و در نهايت جواب‌هاي بسيار دقيقي به دست مي‌دهند. البته روش دوم تركيب بردارها به دليل حجم عمليات رياضي كمتر، كارآمدتر از روش اول مي‌باشد، اختلاف اين دو روش چنانچه بازه فركانس تحليل وسيع‌تر باشد بيشتر است.

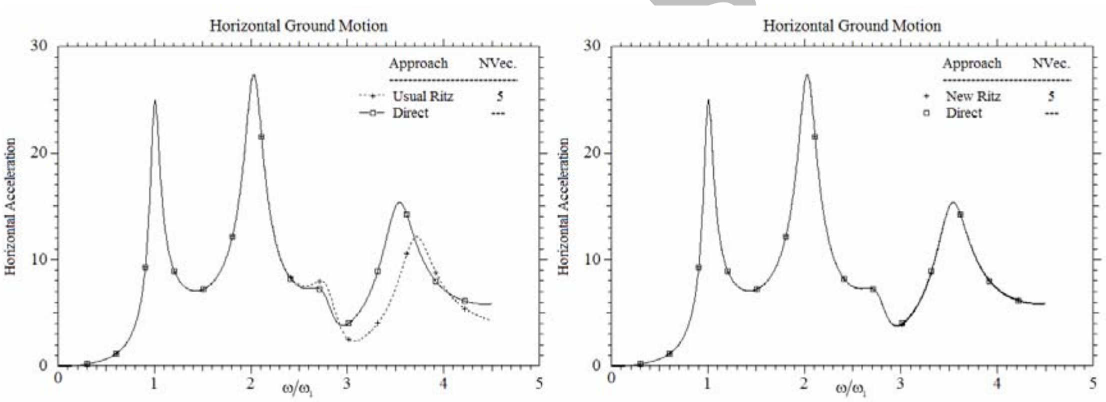
در شكل (۱۰- ب) پاسخ همان مدل با هر دو روش تركيب بردارها در يك بازه فركانس وسيع‌تر نشان داده شده است. مشاهده مي‌گردد كه تعداد بردارهاي مورد استفاده در هر زيربازه ثابت مانده است و فقط تعداد زيربازه‌ها زيادتر شده است. به همين دليل در بازهٔ وسيع‌تر روش دوم بسيار كارآمدتر از روش اول مي‌باشد. البته در بازه‌هاي محدودتر روش اول مطمئن‌تر و دقيق‌تر است.

لازم به ذكر است كه تحليل در بازهٔ فركانس وسيعتر مشابه حالتي است كه سازه فركانس‌هاي طبيعي نزديك به هم داشته باشد و در نتيجه در بازه فركانس تحليل تعداد زيادتري فركانس طبيعي قرار گرفته باشد.



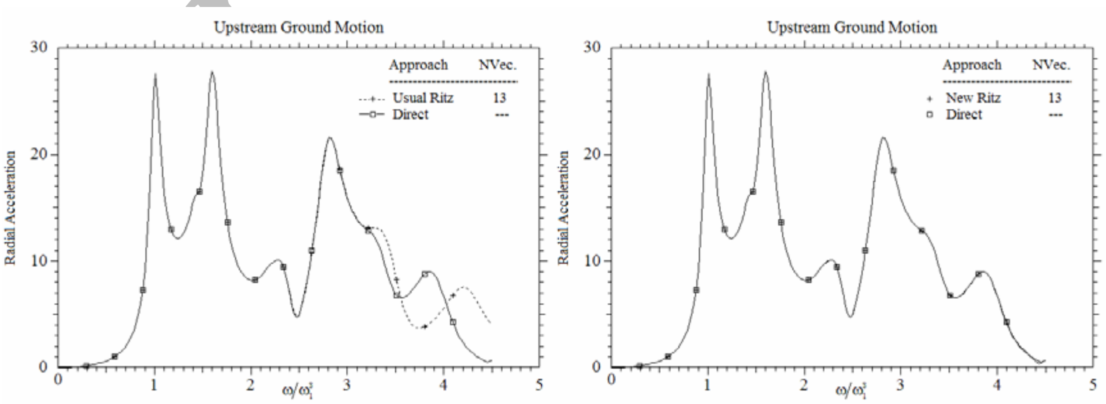
(ب) (الف)

شكل ۵ : پاسخ سازه به روش ريتز نوين؛ (الف)- مدل A (ب)- مدل B،
(خطوط عمودي فركانس‌هاي متناظر با بردارهاي ريتز را نشان مي‌دهند).



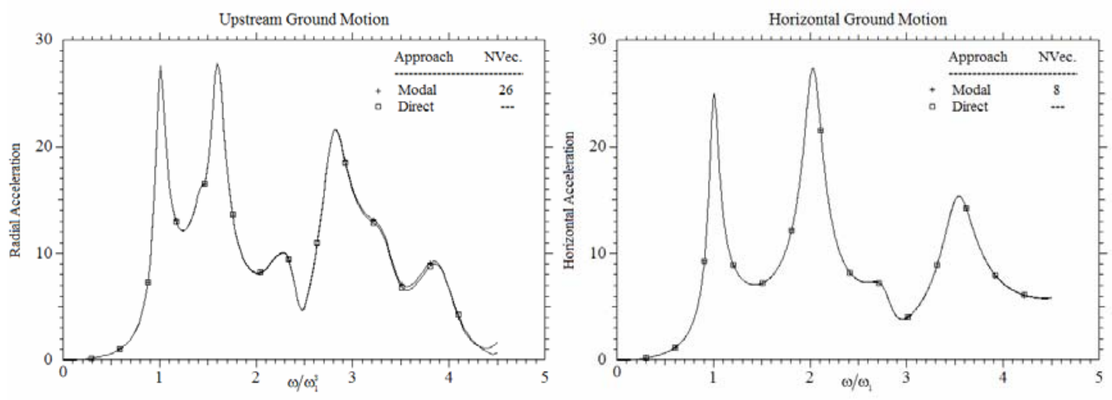
(ب) (الف)

شكل ۶ : پاسخ مدل A (الف)- روش ريتز نوين (ب)- روش ريتز معمول، تحريك افقي تكيه‌گاهي.



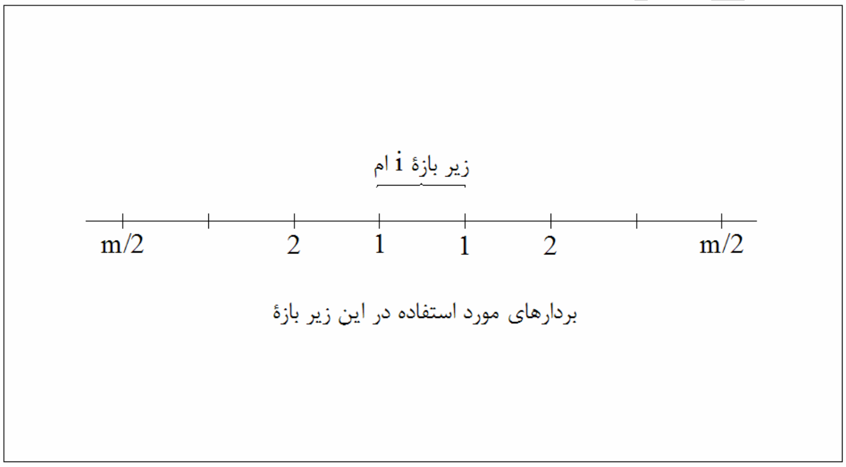
(ب) (الف)

شكل ۷ : پاسخ مدل B (الف)- روش ريتز نوين (ب)- روش ريتز معمول، تحريك افقي تكيه‌گاهي.

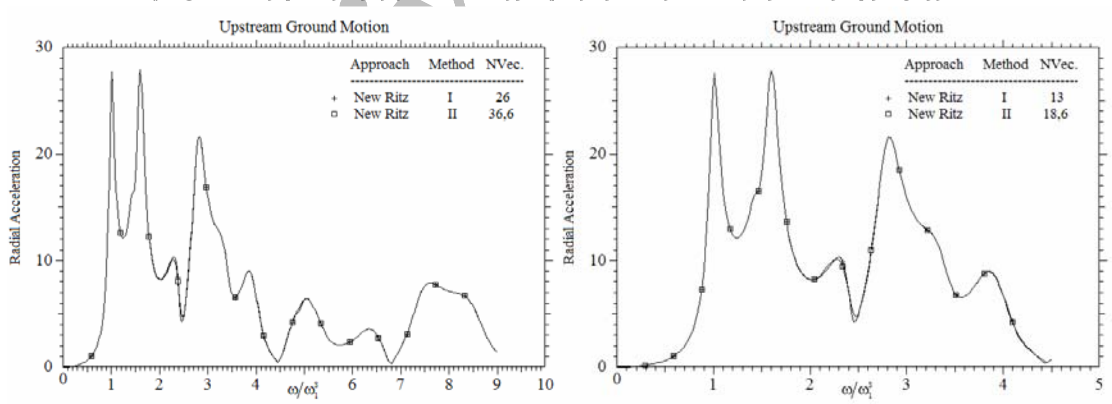


(ب) (الف)

شكل ۸ : پاسخ سازه به روش مدي (الف)- مدل A (ب)- مدل B، تحريك افقي تكيه‌گاهي.



شكل ۹: روش دوم تركيب بردارها (شماره‌ها، بردارهاي مورد استفاده در زير بازهٔ i ام را مشخص مي‌كنند).



(ب) (الف)

شكل ۱۰: پاسخ مدل B به دو روش تركيب بردارها در دو بازه فركانس مختلف.

نتيجه‌گيري

بردارهايي به عنوان بردارهاي ريتز نوين معرفي گرديد. پاسخ مدل‌هاي مختلف توسط اين روش محاسبه شده و نتايج زير از اين مطالعه اخذ گرديد:

- روش ريتز با به كاربردن بردارهاي نوين، كه در اين مقاله معرفي گرديد، پاسخ‌هاي دقيقي در تحليل سازه‌هاي مختلف به دست مي‌دهد.
- مشاهده شد پاسخ روش ريتز در فركانس‌هاي متناظر با بردارهاي محاسبه شده برابر پاسخ دقيق سيستم مي‌باشد.

• نشان داده شد بردارهاي ريتز كه در فركانس‌هاي دلخواه محاسبه مي‌شوند مستقل خطي هستند. تعداد بردارهاي مستقلي كه مي‌توان محاسبه كرد، برابر تعداد مدهايي است كه در پاسخ سيستم شركت دارند (تحت بار مورد نظر). اين تعداد ممكن است از تعداد درجات آزادي سيستم كمتر باشد ولي چنانچه اين تعداد بردار ريتز، برابر كل بردارهاي مستقل، مورد استفاده قرار گيرد، پاسخ روش ريتز همان پاسخ دقيق سيستم خواهد بود.

تقدير و تشكر

بر خود لازم مي‌دانم از ياري برادر بزرگوارم آقاي مهندس احمد آفتابي ثاني دانشجوي دورة دكتري دانشگاه صنعتي اميركبير در تهية اين مقاله كمال تقدير و تشكر را به عمل آورم.

مراجع

1 - Wilson, E. L., Yuan, M. W. and Dickens, J. M. (1982). "Dynamic analysis by direct superposition of Ritz vectors." *Earthquake Eng. Struct. Dyn.*, Vol. 10, PP.813-821.

2 - Leger, P., Wilson, E. L. and Clough, R. W. (1986). "The use of load dependent vectors for dynamic and earthquake analysis." *Report No. UCB/EERC 86-04, Earthquake Engineering Research Center,* University of California, Berkeley, CA.

3 - Joo, K. J., Wilson, E. L. and Leger, P. (1989). "Ritz vectors and generation criteria for mode superposition analysis." *Earthquake Eng. Struct. Dyn.*, Vol. 18, PP.149-167.

4 - Ibrahimbegovic, A. and Wilson, E. L. (1990). "Automated truncation of Ritz vectors basis in modal transformation." *J. Eng. Mech. ASCE 116*, PP.2506-2520.

5 - Joo, K. J. and Wilson, E. L. (1987). "Generation of Ritz vectors for adaptive finite element dynamic analysis." *Proc. U.S.-Korea Seminar Critical Eng. Sys*., Seoul, Korea 1.

6 - Arnold, R. R. and Citerley, R. L. (1985). "Application of Ritz vectors for dynamic analysis of large structures." *Comput. Struct.*, Vol. 21, PP.901-907.

7 - Bayo, E. P. and Wilson, E. L. (1984). "Use of Ritz vectors in wave propagation and foundation response." *Earthquake Eng. Struct. Dyn*., Vol. 12, PP.499-505.

8 - Wilson, E. L. and Bayo, E. P. (1986). "Use of special Ritz vectors in dynamic substructure analysis." *J. of Structural Engineering*, Vol. 112, PP.1944-1954.

9 - Xia, H. and Humar, J. L. (1992). "Frequency dependent Ritz vectors." *Earthquake Eng. Struct. Dyn*., Vol. 21, PP.215-231.

10 - Lotfi, V. (2004). "Direct frequency domain analysis of concrete arch dams based on FE-(FE-HE)-BE technique." *Journal of Computers and Concrete,* Vol. I, Issue 3.