بهينه‌سازي توپولوژي سازه‌هاي صفحه‌اي به كمک روش SIMP و حذف مناطق شطرنجي توسط هموارسازي تنش و كرنش

كاظم غبـرايي[۱] و سهيل محمدي[۲*]

[۱]دانشجوي دكتري دانشكده مهندسي عمران- دانشگاه آدلايد استراليا

[۲]دانشيار دانشكده مهندسي عمران- پرديس دانشكده های فني- دانشگاه تهران

(تاريخ دريافت ۸۴/۶/۲۶ ، تاريخ دريافت روايت اصلاح شده ۸۵/۵/۱۴ ، تاريخ تصويب ۸۵/۸/۲۰)

چكيده

در روش SIMP كه يكي از متداول‌ترين روش‌هاي بهينه‌سازي توپولوژي سازه‌هاست، براي بيان توپولوژي، چگالي نسبي به عنوان تابعي از مختصات مسأله تعريف مي‌شود و در نقاط مختلف محدوده‌ي طراحي بين صفر و يك تغيير مي‌كند. چگالي نسبي يك و صفر به ترتيب به معناي وجود و نبود ماده تفسير مي‌شوند. در اين روش براي تحليل مسأله معمولاً از روش اجزاي محدود استفاده مي‌شود و چگالي نسبي در هر المان ثابت فرض مي‌شود. به اين ترتيب چگالي نسبي المان‌ها متغيرهاي طراحي خواهند بود و نيازي به تغيير در شبكه‌ي المان‌ها نيست. گاهي در نتايج به دست آمده توسط اين روش مناطقي تشكيل مي‌شوند كه الگويي شبيه به صفحه‌ي شطرنج دارند. تشكيل اين مناطق كه به مناطق شطرنجي موسومند يک ناپايداري عددي در اين روش به شمار مي‌رود. در اين مقاله الگوريتم جديدي براي غلبه بر اين ناپايداري ارائه مي‌گردد كه با استفاده از هموارسازي تنش‌ها و كرنش‌ها، مشكل مناطق شطرنجي را مرتفع خواهد كرد. به منظور صحت سنجي و ارزيابي كارايي الگوريتم پيشنهادي حذف مناطق شطرنجي، مسائل پايه و كاربردي مختلفي مدلسازي شده، نتايج آن با مراجع موجود مقايسه گرديده‌اند.

واژه‌هاي كليدي: بهينه‌سازي سازه‌ها - بهينه‌سازي توپولوژيک - روش SIMP - ناپايداري‌هاي عددي - مناطق شطرنجي - هموارسازي تنش و كرنش

مقدمه

روش‌هاي بهينه‌سازي در شاخه‌هاي مختلف مهندسي كاربردهاي زيادي دارند و استفاده از آن‌ها در مسائلي نظير طراحي هواپيماها، سيستم‌هاي آب‌رساني، سدها، پمپ‌ها و توربين‌ها، موتورهاي الكتريكي، سيستمهاي كنترلي، انتخاب محل مناسب براي ساخت يک كارخانه و ... مشهود است.

نخستين بررسي‌ها براي حل مسائل بهينه‌سازي به قرنهاي گذشته برمي‌گردد؛ لاگرانژ مسائل بهينه‌سازي مقيد را مورد بررسي قرار داد و كوشي به مسائل حداقل سازي نامقيد پرداخت[۱]. در اين ميان گاليله، لاگرانژ، كلاوسن و دوسن‌ونان براي نخستين بار به بهينه‌سازي سازه‌ها پرداختند [۲]. اما پس از اين فعاليتهاي اوليه، مدتي در مسائل بهينه‌سازي پيشرفت چنداني صورت نگرفت تا آنكه در ميانه‌ي قرن بيستم، به كارگيري كامپيوترهاي پر سرعت موجب رشد دوباره‌ي تحقيقات و معرفي روش‌هاي جديدي در مسائل بهينه‌سازي گرديد [۱].

بهينه‌سازي سازه‌ها را به طور عمده مي‌توان به سه بخش تقسيم كرد: الف) بهينه‌سازي اندازه‌ها[۱]، كه در آن شكل سازه ثابت فرض مي‌شود و ابعاد بهينه محاسبه مي‌گردند؛ ب) بهينه‌سازي شكل[۲]، كه در آن توپولوژي سازه ثابت است و شكل سازه تغيير داده مي‌شود تا بهترين شكل براي هدف مورد نظر به دست آيد و ج) بهينه‌سازي توپولوژيک[۳]، كه در آن توپولوژي سازه تغيير داده مي‌شود.

در بهينه‌سازي تكميلي سازه‌ها[٤] ابتدا محدوده‌ي طراحي، بارگذاري‌ها و ساير شرايط مشخص مي‌شود و سپس با كمك بهينه‌سازي توپولوژي، بهترين توپولوژي ممكن براي سازه‌ي مورد نظر تعيين مي‌گردد. اين توپولوژي به عنوان حدس اوليه در قسمت بهينه‌سازي شكل استفاده شده و شكل بهينه براي مرزهاي سازه مشخص مي‌شود. در نهايت با استفاده از بهينه‌سازي اندازه‌ها، بهترين ابعاد براي شكل حاصل محاسبه خواهد شد.

* نويسنده مسئول : تلفن : ۶۱۱۱۲۲۵۸ – ۰۲۱ ، فاكس : ۶۶۴۰۳۸۰۸ – ۰۲۱ ، Email: smoham@ut.ac.ir

بهينه‌سازي توپولوژيک سازه‌ها را مي‌توان به طور عمده به دو بخش تقسيم‌کرد: دسته نخست‌بهينه‌سازي توپولوژيک سازه‌هاي خرپايي است كه ماهيت ناپيوسته دارند و حجم ماده‌ي مصرف شده نسبت به كل حجم سازه در آن‌ها بسيار كم است (مسائل با نسبت حجمي پايين) . دسته دوم بهينه‌سازي توپولوژيک سازه‌هاي پيوسته است که ماهيت پيوسته و نسبت حجمي بالا دارند. مسائلي كه با سازه‌هاي خرپايي سر و كار دارند، به دليل طبيعت ناپيوسته‌ي مسئله، ساده‌تر از مسائل دسته‌ي دوم هستند و به همين دليل تحقيقات انجام شده در اين زمينه بسيار قديمي‌تر هستند. در مقابل تحقيقات انجام گرفته در زمينه‌ي بهينه‌سازي توپولوژيک سازه‌هاي پيوسته، به دليل پيچيدگي نسبي اينگونه مسائل، عمري کم‌تر از ۳۰ سال دارند.

اصول اوليه بهينه‌سازي توپولوژيک سازه‌هاي خرپايي، در حدود يک قرن پيش (۱۹۰۴) توسط ميشل بيان شد [۳]. اما نخستين کارهاي عددي در اين زمينه توسط دورن، گوموري و گرينبرگ در سال ۱۹۶۴ ميلادي انجام گرفت [۴]. آنها نشان دادند که مسئله‌ي يافتن سبک‌ترين خرپا تحت اثر يک بار تنها را در حالت‌هاي خاصي مي‌توان با برنامه‌ريزي خطي حل کرد. پس از آن رزواني کارهاي ميشل را توسعه داد (۱۹۷۲) [۵] و در سال ۱۹۷۷، رزواني و پراگر اصول اوليه نظريه‌ي ساختار بهينه را ارائه کردند [۶] و در دهه‌هاي ۸۰ و ۹۰ کارشان را توسعه دادند [۹-۷].

در زمينه‌ي بهينه‌سازي توپولوژيک سازه‌هاي پيوسته، به عنوان نخستين کار تحقيقاتي، مي‌توان به مقاله‌ي چنگ و اولهف در سال۱۹۸۱[۱۰] اشاره کرد که به بهينه‌سازي ورق‌هاي الاستيک اختصاص داشت. براي يافتن طرح بهينه‌ي ورق‌هاي سوراخ‌دار در حالت تنش صفحه‌اي، برخي از رياضي‌دانان ريزسازه‌هاي بهينه را مورد بررسي قرار دادند [۱۳-۱۱]. اولين حل دقيق تحليلي براي ورق‌هاي سوراخ-دار، و همچنين بيان صحيح تانسور سختي در ريزسازه‌هاي بهينه، توسط رزواني و همکارانش[۷] و اونگ و همکارانش ارائه شد [۱۴].

اما نخستين حل عددي براي مسائل بهينه‌سازي توپولوژيک سازه‌هاي پيوسته، که در آن از روش اجزاي محدود کمک گرفته شده بود، در اواخر دهه‌ي ۸۰ توسط بندسو و کيکوچي منتشر گرديد[۱۵]. در اين مقاله از روش همگن‌سازي[5] براي حل مسئله‌ي بهينه‌سازي توپولوژيک سازه‌ها استفاده شده بود. اين روش موجب رشد چشم‌گيري در اين زمينه از تحقيقات شد و تحقيقات زيادي بر پايه‌ي آن انجام گرفت [۱۹،۲-۱۶].

روش‌هاي زيادي براي بهينه كردن توپولوژي سازه‌ها وجود دارند. در اين بين دسته‌اي از روش‌ها موسوم به روش‌هاي پخش مواد[6] به دليل سادگي و توانايي بالا، از محبوبيت بيشتري برخوردارند. در اين روش‌ها توپولوژي سازه به كمك وجود/نبود ماده تعريف مي‌شود. به اين ترتيب براي ايجاد تغيير در توپولوژي سازه نيازي به بازآرايي شبكه‌ي المان‌ها[7] نيست[۱۹،۲۰]. در اين روش‌ها توپولوژي معمولاً به صورت يك تصوير با طيف خاكستري[8] نمايش داده مي‌شود كه در آن نقاط سياه و سفيد به ترتيب بيانگر وجود و نبود ماده هستند. نقاط خاكستري را مي‌توان به عنوان مواد متخلخل در نظر گرفت. در ميان روش‌هاي پخش مواد، روش SIMP[9] يكي از پركاربردترين آن‌هاست. در اين روش ماده‌ي مورد استفاده همسان[10] فرض مي‌شود. همچنين چگالي نسبي به عنوان تابعي از مختصات مسأله تعريف مي‌شود و مقداري بين صفر تا يک دارد. چگالي نسبي صفر به معناي نبود ماده و چگالي نسبي يک به معناي وجود ماده تفسير مي‌شوند. به اين ترتيب اگر از روش اجزاي محدود براي تحليل مسأله استفاده شود، مي‌توان چگالي نسبي را در داخل هر المان ثابت فرض كرد. در اين صورت چگالي‌هاي نسبي المان‌ها متغيرهاي طراحي مسأله هستند و به تعداد المان‌هاي مورد استفاده، متغير طراحي وجود دارد[۱۹،۲۱]. يكي از مشكلاتي كه بعضاً در نتايج روش SIMP مشاهده مي‌شود تشكيل مناطقي است كه در آن‌ها، چگالي المان‌ها به صورت يک در ميان صفر و يک است به طوري كه در تصوير با طيف خاكستري طرحي شبيه به طرح صفحه‌ي شطرنج به وجود مي‌آيد. ريشه‌ي اين مشكل كه يک ناپايداري عددي به شمار مي‌آيد به تقريب اجزاي محدود باز مي‌گردد[۲۲،۲۳]. هدف از اين مقاله ارائه روشي نوين براي حل اين مشكل ناپايداري مي-باشد. در اين نوشتار ابتدا يک مدل رياضي براي مسأله‌ي بهينه‌سازي توپولوژيک سازه‌ها به كمك پخش مواد ارائه خواهد شد؛ سپس روش SIMP را براي استفاده از آن فرمول‌بندي مي‌كنيم. در ادامه علل پيدايش مناطق شطرنجي و روش‌هاي موجود براي رفع اين مشكل را مرور خواهيم كرد و روش جديدي پيشنهاد مي‌شود كه به كمك هموارسازي تنش‌ها و كرنش‌ها اين ناپايداري را رفع

مي‌کند. براي همـوارسـازي تـنش، گـام‌هـايي بـه انتهـاي الگوريتم روش اجـزاي محـدود اضـافه مـي‌شـود. الگـوريتم اصلاح‌شـده در قالـب يـک برنامـه‌ي کـامپيوتري بـه زبـان Matlab نوشته شده است. براي بررسي صحت عملکرد ايـن روش مثال‌هايي با کمک برنامه‌ي نوشته اجرا شده‌اند که در پايان اين مقاله گزارش خواهند شد.

مسأله‌ي بهينه‌سازي توپولوژيک سازه‌ها بـه کمک پخش مواد

در حالت عادي اگر بخواهيم توپولوژي يک سازه‌ي مدلسازي‌شده را تغيير دهيم ناگزيريم شبکه‌ي المان‌ها را تغيير دهيم. در بهينه‌سازي توپولوژيک سازه‌ها که مرتباً توپولوژي سازه تغيير داده مي‌شود، اين کار مسلماً هزينه و حجم محاسبات را افزايش خواهد داد. در صورتي که اگر توپولوژي به کمک وجود/نبود مواد بيان شود، براي ايجاد تغيير در توپولوژي، نيازي به بازآرايي شبکه‌ي المان‌ها نخواهد بود. در صورت استفاده از اين راه‌کار، مسأله‌ي بهينه‌سازي توپولوژيک يک سازه در فضاي دوبعدي $\mathbf{w}=(w_1,w_2)$ در عمومي‌ترين حالت به شکل زير بيان مي‌شود[۲۴]:

$$\begin{aligned} &\min_{x(\mathbf{w}),u(\mathbf{w})} && f(x,u) && \\ &\text{s.t.} && a_x(u,v)=l(u), && \forall v\in U \\ &&& g_i(x)\le 0, && i=1,\dots,m \\ &&& x(\mathbf{w})\in\{0,1\}, && \forall \mathbf{w}\in\Omega^{\mathrm{d}} \end{aligned} \tag{1}$$

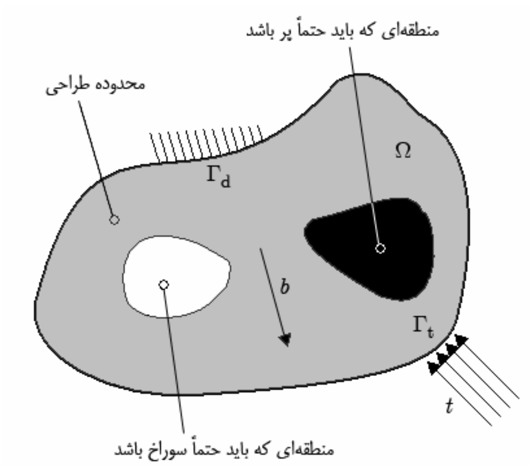
که در آن $x(\mathbf{w})$ و $u(\mathbf{w})$ به ترتيب ميدان متغيرهاي طراحي و ميدان تغييرمکان را مشخص مي‌کنند و U مجموعه‌ي تغييرمکان‌هاي مجاز سينماتيکي است؛ تابع f تابع هدف مسأله است و توابع g_i قيود مسأله هستند. همچنين Ω^{d} معرف محدوده‌ي طراحي[11] است.
$l(u)$ و $a_x(u,v)$ به ترتيب فرم خطي بار[12] و فرم دوخطـي انرژي[13] هستند که به صورت زير تعريف مي‌شوند[۱۹،۲۴]:

$$l(u)=\int_\Omega bu\ \mathrm{d}\Omega+\int_{\Gamma_\mathrm{t}} tu\ \mathrm{ds}, \tag{2}$$

$$a_x(u,v)=\int_\Omega E_{ijkl}(x)\varepsilon_{ij}(u)\varepsilon_{kl}(v)\mathrm{d}\Omega. \tag{3}$$

در اين روابط t و b به ترتيب بارهاي سطحي و بارهاي حجمي هستند؛ E_{ijkl} تانسور سختي است و ε_{ij} تانسور کرنش خطي است. سطح جسم با Ω نشان داده شده و فرض شده که Ω مرزي به نام $\Gamma\equiv\partial\Omega$ دارد به طوري که Γ به اندازه‌ي کافي هموار است و شامل دو زيرمجموعه‌ي Γ_t و Γ_d مي‌باشد به طوري که بارهاي سطحي بر محدوده‌ي Γ_t اعمال مي‌شوند و تغييرمکان‌ها در محدوده‌ي Γ_d از پيش تعيين شده‌اند و مقداري برابر $u_\mathrm{d}(\mathbf{w})$ دارند.

شکل (۱) يک جسم ارتجاعي را در حالت کلي و در فضاي دوبعدي نشان مي‌دهد. در اين شکل محدوده‌ي $\Omega^\mathrm{d}\subset\Omega$ با رنگ خاکستري نشان داده شده است.



شکل ۱: شکل اوليه‌ي يک جسم ارتجاعي در فضاي دوبعدي براي مسأله‌ي بهينه‌سازي توپولوژيک در حالت کلي.

با توجه به روابط (۲) و (۳) ديده مي‌شود که شرط اساسي $a_x(u,v)=l(v),\ \forall v\in U$ قابل تبديل به فرم ضعيف[14] کار مجازي مي‌باشد و تضمين مي‌کند ميدان تغييرمکان u شرايط تعادل را ارضا کند.

زيرنويس x در $a_x(u,v)$ نشان‌گر آن است که اين فرم دوخطي به متغيرهاي طراحي وابسته است. به عبارت دقيق‌تر سختي مواد به صورت تابعي از متغيرهاي طراحي بيان مي‌شود. رابطه‌ي سختي مواد با متغيرهاي طراحي که به مدل مواد[15] موسوم است براي مسأله‌ي (۱) مطابق رابطه‌ي زير تعريف مي‌شود[۱۹،۲۴]:

$$E_{ijkl}(x)=x(\mathbf{w})E^0_{ijkl} \tag{4}$$

که در آن E^0 تانسور سختي يک ماده‌ي همسان است. به

اين ترتيب x=1 نتيجه مي‌دهد E=E^0 كه معادل وجود ماده است و x=0 نتيجه مي‌دهد E=0 كه معادل نبود ماده است.

توجه شود كه هر قيد مساوي به صورت h=0 را مي‌توان با دو قيد نامساوي $h\leq 0$ و $-h\leq 0$ جايگزين كرد[۲۰]. همچنين قابل توجه است كه در مسأله‌ي (۱) x و u هردو متغيرند و در واقع رابطه‌ي تعادل يک قيد براي متغير u محسوب مي‌شود. با اين توضيحات، اين مسأله يک مسأله‌ي بهينه‌سازي مخلوط[۱۶] است.

فرمول‌بندي مسأله‌ي بهينه‌سازي توپولوژي به كمک روش SIMP

الف) مدل مواد

متغيرهاي طراحي در مسأله‌ي (۱) به صورت ناپيوسته تغيير مي‌كنند كه اين امر برنامه‌نويسي براي حل اين مسأله را با مشكلاتي مواجه مي‌كند. مهم‌تر از آن، اين مسأله اصولاً جواب ندارد[۲۴،۲۵]. دليل اين امر آن است كه عموماً ايجاد سوراخ‌هاي بيشتر بدون تغيير در حجم سازه باعث افزايش انعطاف پذيري مدل مي‌گردد. به عبارت ديگر فضاي مجاز در مسأله‌ي (۱) به اندازه‌ي كافي بسته[۱۷] نيست[۲۵]. غالباً در مسائل بهينه‌سازي نقص در بسته بودن فضاي مجاز و همچنين نقص در پيوستگي[۱۸] تابع هدف باعث مي‌شود مسأله جواب كلي[۱۹] نداشته باشد[۲۶].

براي برطرف كردن اين مشكلات معمولاً فرم رهاشده‌ي[۲۰] مسأله مورد استفاده قرار مي‌گيرد به اين ترتيب كه قيد ناپيوسته $x\in\{0,1\}$ با قيد پيوسته $x\in[0,1]$ جايگزين مي‌گردد[۲۵]. اين تغيير باعث مي‌شود مسأله جواب داشته باشد و در ضمن به يک مسأله‌ي محدب تبديل شود[۲۵]. معمولاً اين فرم رهاشده به نام *مسأله‌ي صفحه با ضخامت متغير* شناخته مي‌شود[۱۹،۲۴،۲۵]. با اين وجود در جواب‌هايي كه از حل اين مسأله به دست مي‌آيند، متغيرهاي طراحي در مناطق بسياري مقادير مياني (بزرگ‌تر از صفر و كوچک‌تر از يک) خواهند داشت. وجود متغيرهاي مياني باعث بروز مشكلاتي در ساخت و اجراي سازه‌هاي به دست آمده مي‌شود. همچنين ميزان نسبتاً زياد اين متغيرها موجب مي‌شود توپولوژي نهايي واضح نباشد و در نتيجه نتوان از آن به عنوان يک حدس اوليه در روش‌هاي بهينه‌سازي شكل استفاده كرد.

در مدل مواد SIMP براي حل اين مشكل مقادير مياني متغيرها جريمه مي‌شوند. براي جريمه كردن مقادير مياني رابطه‌ي (۴) با رابطه‌ي

$$E_{ijkl}(x)=x^p E^0_{ijkl} \tag{۵}$$

جايگزين مي‌شود [۲۴] كه در آن p توان جريمه است و مقداري بزرگ‌تر از يک دارد. براي آن كه اين مدل از لحاظ فيزيكي معنا داشته باشد در مسائل دوبعدي بايد p بزرگ‌تر از سه انتخاب شود[۲۷]. در اين حالت معمولاً از متغيرهاي طراحي به عنوان چگالي‌هاي نسبي ياد مي‌شود[۱۹،۲۴].

قابل توجه است كه اگر از رابطه‌ي (۵) در مدل مواد استفاده شود مسأله‌ي بهينه‌سازي به وجود آمده باز هم جواب نخواهد داشت و محدب نيز نخواهد بود[۲۵]. با اين وجود معمولاً از تمهيدات خاصي استفاده مي‌شود تا مشكلات ياد شده رفع شوند.

ب) حداقل‌سازي نرمي متوسط

در مسأله‌ي (۱) مي‌توان توابع هدف و قيدهاي متفاوتي را انتخاب كرد ولي در ميان اين توابع مختلف انتخاب نرمي متوسط[۲۱] به عنوان تابع هدف و محدود كردن حجم (يا وزن) به عنوان قيد، مزايايي دارد [۱۹] كه باعث شده اين انتخاب بسيار مورد استفاده قرار گيرد.

نرمي متوسط در واقع معياري از سختي سازه است كه با رابطه‌ي (۲) تعريف مي‌شود. به اين ترتيب اگر حجم مواد را محدود كنيم فرم گسسته‌شده‌ي مسأله‌ي (۱) با استفاده از مدل مواد SIMP به شكل زير بيان مي‌شود:

$$\begin{aligned}
\min_{\mathbf{x},\mathbf{u}} \quad & l(\mathbf{u})=\mathbf{bu}+\mathbf{tu},\\
\text{s.t.} \quad & \mathbf{K}(\mathbf{x})\mathbf{u}=\mathbf{f},\\
& V(\mathbf{x})=\sum_{e=1}^{n} x_e v_e \leq V_0,\\
& 0\leq x_e \leq 1, \qquad e=1,\dots,n
\end{aligned} \tag{۶}$$

كه در آن $\mathbf{x}$ بردار متغيرهاي طراحي است و $\mathbf{u}$ و $\mathbf{f}$ به ترتيب بردار تغييرمكان‌ها و نيروهاي گره‌اي هستند. ماتريس $\mathbf{K}$ ماتريس سختي كل سازه است كه تابعي از متغيرهاي طراحي است؛ v_e حجم المان e-ام است و V_0 يک حد بالايي از پيش تعيين شده براي حجم سازه است. همچنين n تعداد المان‌هاي مورد استفاده را نشان مي‌دهد.

شرايط $0 \le x \le 1$ را گاهي شرايط جعبه‌اي[۲۲] مي‌نامند[۱۹]. براي آن که از تکينگي[۲۳] ماتريس سختي المان‌ها جلوگيري شود معمولاً اين شرايط را با شرايط زير جايگزين مي‌کنند[۱۹،۲۱]:

$$0 < \underline{x} \le x \le 1$$

(۷)

که در آن $\underline{x}$ يک حد پاييني براي متغيرهاي طراحي است. همچنين به دليل آن که بارهاي حجمي معمولاً به مقدار مواد بستگي دارند و نتيجتاً در مسأله‌ي (۶) به متغيرهاي طراحي وابسته هستند، براي سادگي از اين بارها صرف نظر مي‌شود. به اين ترتيب مسأله‌ي (۶) به شکل متداول‌تر زير بازنويسي مي‌شود[۱۹]:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x},\mathbf{u}} \quad & l(\mathbf{u}) = \mathbf{tu}, \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{K}(\mathbf{x})\mathbf{u} = \mathbf{f}, \\ & V(\mathbf{x}) = \sum_{e=1}^{n} x_e v_e \le V_0, \\ & 0 < \underline{x} \le x_e \le 1, \;\; e = 1,\dots,n \end{aligned}$$

(۸)

در اين مقاله، از اين مسأله به عنوان مسأله‌ي بهينه‌سازي توپولوژيک سازه‌ها استفاده خواهد شد.

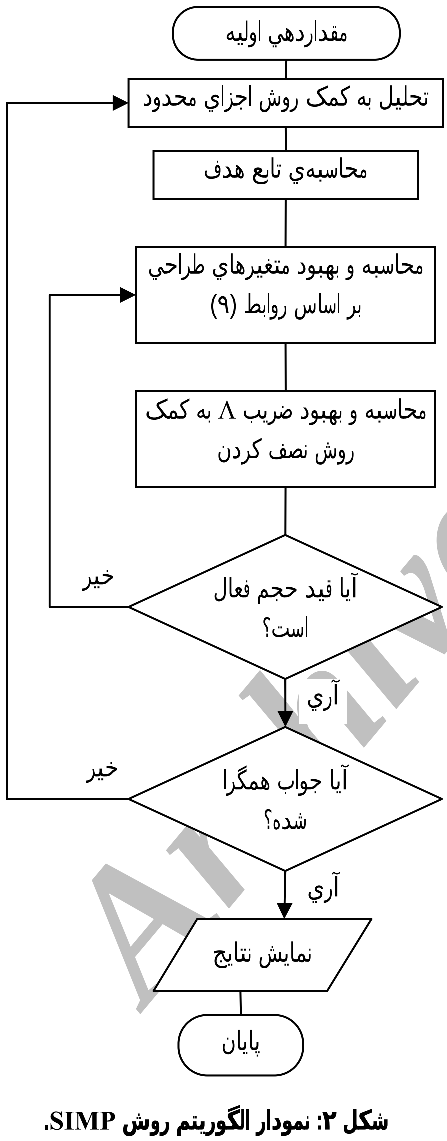
ج) بهينه‌سازي

براي يافتن جواب بهينه مي‌توان از الگوريتم‌هاي بهينه‌سازي متفاوتي استفاده کرد. در ميان اين الگوريتم‌ها، روش مجانب‌هاي متحرك[۲۴] (MMA) و روش معيار بهينگي[۲۵] (OC) از محبوبيت بيشتري برخوردارند[۱۹]. در اين مقاله از روش معيار بهينگي استفاده خواهد شد. در اين روش فرايند بهينه‌سازي تابع هدف به صورت غير مستقيم انجام مي‌شود؛ به اين صورت که مجموعه‌اي از معيارهاي وابسته به رفتار سازه به عنوان معيار بهينگي انتخاب مي‌شوند و تلاش مي‌شود در هر مرحله اين معيارها ارضا شوند. به اين ترتيب انتظار مي‌رود سيستم در هر مرحله به نقطه‌ي بهينه نزديك‌تر شود. معيارهاي انتخابي در روش‌هاي معيار بهينگي عموماً بر پايه‌ي شرايط کان-تاکر[۲۶] [۱۹،۲۰] استوارند.

بر اساس روش‌هاي معيار بهينگي با شرايط کان-تاکر، براي مسأله‌ي (۸) طرح بهبود تدريجي زير پيشنهاد شده است[۱۹،۲۱]:

$$x_e^{k+1} = \begin{cases} \max\{(1-\zeta)x_e^k, \underline{x}\} & \text{if} \quad x_e^k (B_e^k)^\eta \le \max\{(1-\zeta)x_e^k, \underline{x}\} \\ \min\{(1+\zeta)x_e^k, 1\} & \text{if} \quad \min\{(1+\zeta)x_e^k, 1\} \le x_e^k (B_e^k)^\eta \\ x_e^k (B_e^k)^\eta & \text{otherwise} \end{cases}$$

(۹)



شکل ۲: نمودار الگوريتم روش SIMP.

که در آن ζ پارامتري است که ميزان تغييرات متغيرهاي طراحي در هر تکرار را مشخص مي‌کند و η يك عامل کاهش‌دهنده[۲۷] است که براي دست‌يابي به يك الگوريتم يکنوا بايد متناسب با ζ انتخاب گردد[۱۹،۲۰]. همچنين در اين رابطه k نشان‌گر شماره‌ي تکرار است و

B_e^k از رابطه‌ي زير به دست مي‌آيد[۱،۳]:

$$B_e^k = -\left(\frac{\partial l}{\partial x_e}\right)^k \Big/ \Lambda^k v_e, \quad e=1,\dots,n$$

(۱۰)

كه در آن Λ ضريب لاگرانژ براي قيد حجمي است. براي محاسبه‌ي حساسيت‌ها مي‌توان از روش الحاقي استفاده نمود كه به اين روابط منجر مي‌شود[۱۹]:

$$\frac{\partial l}{\partial x_e} = -p x_e^{p-1} \mathbf{u}_e^T \mathbf{K}_e \mathbf{u}_e, \quad e=1,\dots,n$$

(۱۱)

براي محاسبه‌ي ضريب Λ با توجه به اين نكته كه Λ با V نسبت معكوس دارد مي‌توان به راحتي از روش نصف كردن استفاده نمود و Λ را طوري تعيين كرد كه قيد حجم فعال باشد؛ يعني $V=V_0$ [۲۱-۱۹].

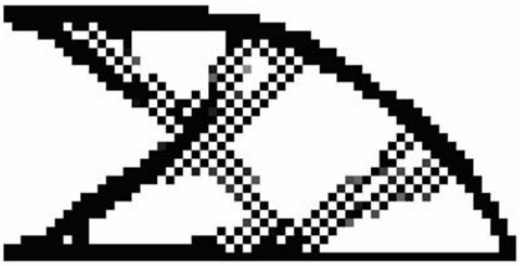
با توجه به اين توضيحات نمودار الگوريتم روش SIMP مطابق شكل (۲) خواهد بود.

ناپايداري‌هاي عددي در روش SIMP

همان‌طور كه گفته شد مسأله‌ي بهينه‌سازي توپولوژيک در صورت استفاده از مدل مواد SIMP جواب ندارد و در ضمن محدب نيست. عدم وجود جواب باعث مي‌شود كه جواب‌ها فرم گسسته‌شده‌ي مسأله به تعداد المان‌هاي به كار رفته براي گسسته‌سازي وابسته باشد. به عبارت ديگر جواب‌هاي مسأله‌ي (۸) به شبكه‌ي المان‌ها وابسته است[۲۵].

همچنين محدب نبودن مسأله‌ي (۸) موجب خواهد شد كه الگوريتم ارائه شده نتواند جواب‌هاي كلي را بيابد و به نزديک‌ترين نقطه‌ي حداقل يا حداكثر همگرا شود. به اين ترتيب با استفاده از پارامترهاي مختلف جواب‌هاي متفاوتي به دست خواهد آمد[۲۵].

ناپايداري نخست را به نام وابستگي به شبكه‌ي المان‌ها و ناپايداري دوم را به نام مشكل حداقل‌هاي محلي مي‌شناسيم[۲۵]. روش‌هاي مختلفي براي حل اين ناپايداري‌ها وجود دارند كه موضوع بحث اين مقاله نيستند (براي مثال نگاه كنيد به [۱۹،۲۵]). ناپايداري ديگري كه در جواب‌هاي اين مسأله مشاهده مي‌شود و در اين مقاله به آن مي‌پردازيم، مشكل مناطق شطرنجي نام دارد. مناطق شطرنجي مناطقي هستند كه در آن‌ها، چگالي المان‌ها به صورت يک در ميان صفر و يک است به طوري كه در تصوير با طيف خاكستري طرحي شبيه به طرح صفحه‌ي شطرنج به وجود مي‌آيد [۲۵] (شكل۳). ريشه‌ي اين ناپايداري به عدم همگرايي اجزاي محدود باز مي‌گردد [۲۵-۲۲].



شكل ۳: مناطق شطرنجي.

تا كنون روش‌هاي مختلفي براي بر طرف كردن اين ناپايداري و يا محدود كردن آن پيشنهاد شده است. استفاده از المان‌هاي مرتبه بالا و المان‌هاي ناسازگار خاصي مي‌تواند در حل اين مشكل مفيد واقع شود[۲۸]. همچنين با محدود كردن محيط و يا گراديان متغيرهاي طراحي به عنوان يک قيد اضافي مي‌توان اين مشكل را برطرف نمود[۱۹،۲۵،۲۹]. راه حل ديگري كه معمولاً استفاده مي‌شود اصلاح مقادير حساسيت‌ها و يا مقادير متغيرهاي طراحي است [۲۱،۳۰-۳۲]. علاوه بر اين روش‌ها، تعريف متغيرهاي طراحي به صورت گره‌اي نيز مي‌تواند اين ناپايداري را رفع نمايد[۱۹،۳۳-۳۴].

هركدام از روش‌هاي يادشده مزايا و معايبي دارند. به عنوان مثال استفاده از المان‌هاي مرتبه بالا هزينه‌ي محاسباتي را به نحو چشمگيري افزايش مي‌دهد و علاوه بر آن ممكن است اين ناپايداري را به طور كامل حل نكند[۲۵]. محدودسازي گراديان متغيرهاي طراحي نيز به تعداد زيادي قيدهاي اضافي احتياج دارد[۱۹،۲۵،۲۹]. در محدودسازي محيط با اين كه تنها يک قيد به مسأله اضافه مي‌شود، تعيين يک حد بالايي مناسب براي محيط با مشكلاتي همراه است[۱۹]. روش اصلاح حساسيت‌ها حجم محاسباتي را چندان اضافه نمي‌كند ولي باعث مي‌شود در جواب نهايي تعداد متغيرهاي مياني زياد شود[۱۹،۲۵].

در اين مقاله روش جديدي براي غلبه بر مشكل مناطق شطرنجي پيشنهاد مي‌شود كه هزينه‌ي محاسبات را چندان افزايش نمي‌دهد و به جواب‌هاي قابل قبولي منجر مي‌شود. در اين روش تنش‌ها و كرنش‌هاي به دست آمده از تحليل اجزاي محدود در هر مرحله اصلاح مي‌شوند و بقيه‌ي

محاسبات به کمک مقادير اصلاح‌شده انجام مي‌شود. اين روش در بخش بعد به طور مفصل تشريح خواهد شد.

حل مشکل مناطق شطرنجي در روش SIMP به کمک هموارسازي توزيع تنش و کرنش

در بررسي‌هاي انجام‌شده توسط نگارنده به کمک مثال‌هاي متعدد، چنين نتيجه‌گيري شد که هموارسازي تنش‌هاي محاسبه‌شده در المان‌هاي ۴-گره‌اي سازگار، قبل از بهبود متغيرهاي طراحي مشکل مناطق شطرنجي را در مدل مواد SIMP رفع مي‌کند. در مدل مواد SIMP تنش‌ها از روابط زير به دست مي‌آيند:

$$\sigma_e = \mathbf{D}_e \varepsilon_e , \quad \mathbf{D}_e = x_e^p \mathbf{D}^0$$

(۱)

که در آن $\mathbf{D}^0$ ماتريس رفتاري يک المان پر از ماده (x=1) است و σ_e و ε_e به ترتيب بردارهاي تنش و کرنش المان e هستند. نرمي متوسط بر حسب تنش و کرنش، به صورت گسسته، به فرم زير بيان خواهد شد:

$$l(\mathbf{u}, \mathbf{x}) = \sum_{e=1}^{n} \int_{\Omega_e} \varepsilon_e^T \sigma_e (x_e) \, \mathrm{d}\Omega$$

(۱۳)

که در آن Ω_e حجم المان e است. دو پارامتر l_e و σ_e^0 را به ترتيب زير تعريف مي‌کنيم:

$$\sigma_e^0 = \mathbf{D}^0 \varepsilon_e , \quad l_e = x_e^p \int_{\Omega_e} \varepsilon_e^T \sigma_e^0 \, \mathrm{d}\Omega$$

(۱۴)

به اين ترتيب با توجه به رابطه‌ي (۱۱) داريم:

$$\frac{\partial l}{\partial x_e} = \frac{\partial l_e}{\partial x_e} = -p x_e^{p-1} \int_{\Omega_e} \varepsilon_e^T \sigma_e^0 \, \mathrm{d}\Omega$$

(۱۵)

و از ترکيب روابط (۱۴) و (۱۵) به رابطه‌ي ساده‌تر زير مي‌رسيم:

$$\frac{\partial l}{\partial x_e} = -\frac{p \cdot l_e}{x_e}$$

(۱۶)

حال اگر به جاي مقادير تنش و کرنش مقادير هموارشده‌ي آن‌ها را به کار بريم خواهيم داشت:

$$\hat{l}_e = \int_{\Omega_e} \hat{\varepsilon}_e^T \hat{\sigma}_e \, \mathrm{d}\Omega$$

(۱۷)

که در آن $\hat{\sigma}_e$ و $\hat{\varepsilon}_e$ به ترتيب مقادير هموارشده‌ي تنش و کرنش هستند. با توجه به رابطه‌ي (۱۷)، حساسيت‌هاي جديد از رابطه‌ي زير به دست مي‌آيند:

$$\frac{\partial l}{\partial x_e} = -\frac{p \cdot \hat{l}_e}{x_e}$$

(۱۸)

در اين روش به جاي حساسيت‌هاي اوليه از حساسيت‌هاي به دست آمده از رابطه (۱۸) استفاده مي‌شود.

به منظور هموارسازي تنش (کرنش)، مقدار تنش (کرنش) در هر گره با ميانگين‌گيري از مقادير مربوطه در المان‌هاي متصل به آن گره تعيين مي‌شود. به اين ترتيب اگر مقدار تنش (کرنش) را در گره‌ي i (i شماره‌ي محلي گره است) از المان e با s_i^e نشان دهيم، مقادير هموارشده به ترتيب زير محاسبه مي‌شوند:

$$\hat{s}_j = \frac{\sum_{k \in W_j} s_{LN(j,k)}^k}{\left\| W_j \right\|}$$

(۱۹)

که در آن $\hat{s}_j$ مقدار هموارشده‌ي تنش (کرنش) در گره‌ي j و $LN(j,k)$ نشان‌گر شماره‌ي محلي گره‌ي j در المان k است. همچنين در اين رابطه W_j معرف مجموعه‌ي شماره‌ي المان‌هايي است که به گره‌ي j متصل‌اند و $\left\| W_j \right\|$ تعداد اعضاي W_j را به دست مي‌دهد.

نتايج و مثال‌هاي عددي

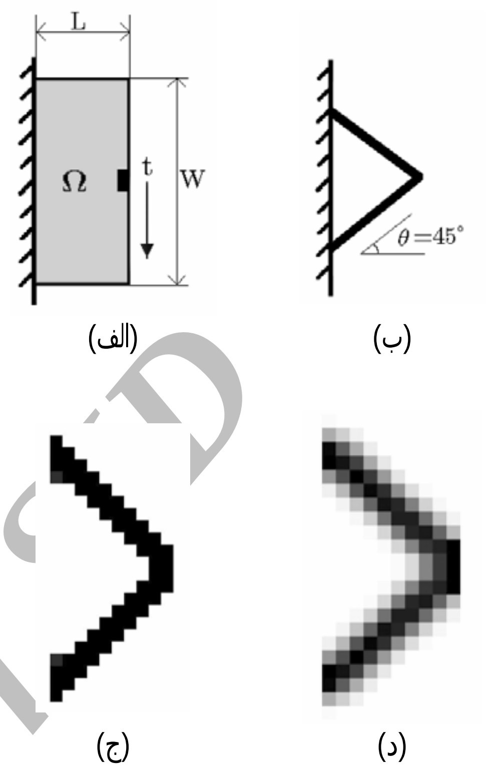
در اين بخش صحت عملکرد روش ارائه شده را با چند مثال عددي بررسي خواهيم کرد.

در تمامي مثال‌ها ضريب ارتجاعي E=1.0 و بار وارده t=1.0 فرض شده‌اند. نتايج نمايش داده شده مربوط به تکرار مرحله‌ي ۲۵۰ هستند.

الف) مسأله‌ي تير طره‌ي کوتاه

براي کنترل صحت عملکرد روش ارائه شده مساله‌ي تير طره‌ي عميق را که جواب تحليلي آن مشخص است حل مي‌کنيم. شرايط تکيه‌گاهي و بارگذاري اين مسئله در شکل ۴(الف) نشان داده شده است. شکل ۴(ب) جواب تحليلي را نشان مي‌دهد[۲۰] که از دو عضو مورب با زاويه ۴۵ درجه تشکيل شده است. عمق تير ۳ برابر ارتفاع آن

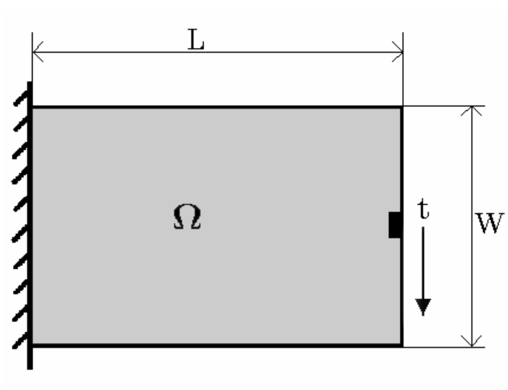
است. محدوده‌ي طراحي با رنگ خاكستري نمايش داده شده است و حداكثر حجم مواد مصرفي V_0=0.2LW در نظر گرفته شده است.



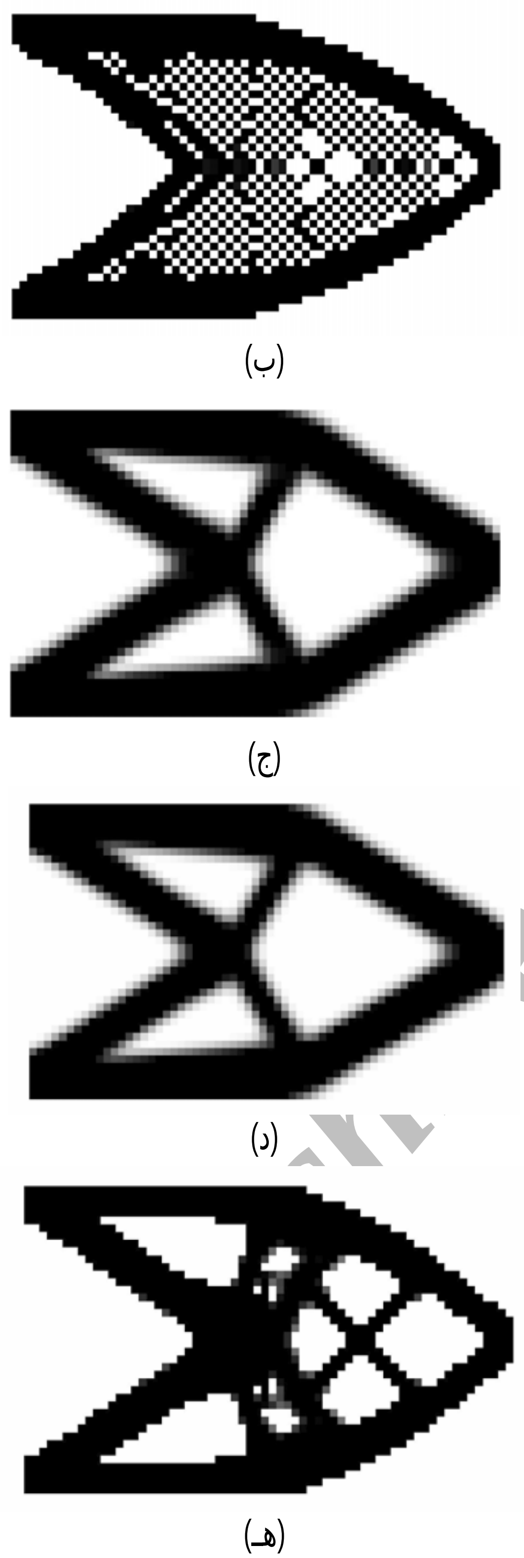
شكل ۴: شرايط مرزي و بارگذاري تير طره‌ي عميق (الف)؛ جواب تحليلي (ب) و نتايج حل اين مسئله به كمک روش SIMP (ج) و تكنيک هموارسازي تنش (د).

براي به دست آوردن شكل‌هاي (۴ - ج) و (۴ - د) از يک شبكه با ابعاد ۱۰*۳۰ استفاده شده است.

همانگونه كه ملاحظه مي‌گردد نتايج به دست آمده به جواب تحليلي نزديک هستند.



(الف)



شكل ۵: شرايط مرزي و بارگذاري تير طره‌ي كوتاه (الف) و نتايج حل اين مسأله به كمک روش SIMP (ب) و حذف مناطق شطرنجي با كمک هموارسازي تنش (ج)، اصلاح حساسيت‌ها (د) و استفاده از المان‌هاي ناسازگار (ه).

ب) مسألهي تير طرهي كوتاه

شرايط تكيهگاهي و بارگذاري اين مسأله در شكل ۵(الف) نشان داده شده است. طول تير ۱/۶ برابر ارتفاع آن است (L=1.6W). محدودهي طراحي با رنگ خاكستري نمايش داده شده است. حداكثر حجم مواد مصرفي در اين مثال V_0=0.5LW در نظر گرفته شده است.

به دليل تقارن نصف تير مدل شده و در مدلسازي آن از يک شبکه به ابعاد ۲۰×۶۴ المان و از المانهاي ۴-گرهاي سازگار استفاده شده است.

شكل (۵ - ب) جواب نهايي به دست آمده توسط روش SIMP را نشان ميدهد. همانگونه كه ملاحظه ميشود سطح زيادي از جواب نهايي از مناطق شطرنجي پوشيده شده است. براي به دست آوردن شكل (۵ - ج) از هموارسازي تنش استفاده كردهايم. در اين شكل مناطق شطرنجي به كلي حذف شدهاند.

براي مقايسهي نتايج روش ارائه شده با ديگر روشهاي حذف مناطق شطرنجي، مساله‌ي مورد بحث به كمک دو تكنيک ديگر نيز حل شده است و نتايج در شكلهاي ۵(د) و (۵ - ه) آورده شدهاند. شكل (۵ - د) به كمک روش اصلاح حساسيتها (با شعاع فيلتر ۲) [۲۱] به دست آمده است و براي بدست آوردن شكل (۵ - ه) از المانهاي ناسازگار [۲۸] استفاده شده است.

ملاحظه ميشود كه نتايج روش هموارسازي تنش و روش اصلاح حساسيتها در اين مسئله بسيار به هم نزديک هستند. كوچکترين مقدار تابع هدف براي اين دو مثال در جدول (۱) گزارش شده است.

جدول ۱: كوچکترين مقدار تابع هدف در مسالهي تير طرهي كوتاه.

روش استفاده شده	حداقل مقدار تابع هدف
SIMP	۷۵/۸۸۳۱
هموارسازي تنش	۷۸/۱۳۲۳
اصلاح حساسيتها	۷۹/۶۰۶۷
استفاده از المانهاي ناسازگار	۸۵/۴۵۰۸

مشاهده ميشود كه حداقل مقدار تابع هدف در حالتي كه از هموارسازي تنش استفاده شده اندكي (حدود ۳%) بزرگتر شده است. دليل اين امر آن است كه در تحليل اجزاي محدود سختي يک ناحيهي شطرنجي از تمامي الگوهاي هم حجم مقدار بزرگتري دارد[۲۲]. همچنين ملاحظه ميشود كه تكنيک ارائه شده نسبت به دو تكنيک ديگر به نتايج مناسبتري رسيده است.

ج) مسألهي MBB

اين تير يک تير ساده است كه طولش ۶ برابر ارتفاع آن است. شرايط تكيهگاهي و بارگذاري اين مسأله در شكل (۶ - الف) نشان داده شده است. محدودهي طراحي با رنگ خاكستري نمايش داده شده است. حداكثر حجم مواد مصرفي در اين مثال $V_0=3L^2$ در نظر گرفته شده است. در اينجا نيز به دليل تقارن نصف تير مدل شده و از المانهاي ۴-گرهاي سازگار استفاده شده است. ابعاد شبكهي المانها ۲۰×۶۰ ميباشد.

شكل (۶ - ب) جواب نهايي به دست آمده توسط روش SIMP را نشان ميدهد در حالي كه در شكل (۶ - ج) از هموارسازي تنش استفاده شده است. همانگونه كه از مقايسهي اين دو شكل بر ميآيد، در اين مسأله نيز استفاده از هموارسازي تنش در رفع مشكل مناطق شطرنجي مؤثر بوده است.

حداقل مقدار تابع هدف براي اين دو مثال مطابق جدول (۲) است.

جدول ۲: كوچکترين مقدار تابع هدف در مسالهي MMB.

روش استفاده شده	حداقل مقدار تابع هدف
SIMP	۱۹۱/۷۳۱۸
هموارسازي تنش	۲۰۲/۴۲۹۲

در اين مسأله نيز حداقل مقدار تابع هدف در حالتي كه از هموارسازي تنش استفاده شده اندكي بزرگتر شده است هرچند اين اختلاف چندان زياد نيست (حدود ۵/۶% اختلاف وجود دارد).

نتيجه گيري

در اين نوشتار مسألهي بهينهسازي توپولوژيک سازههاي دوبعدي به كمک روشهاي پخش مواد مورد بررسي قرار گرفت و روش SIMP براي حل اين مسأله معرفي گرديد.

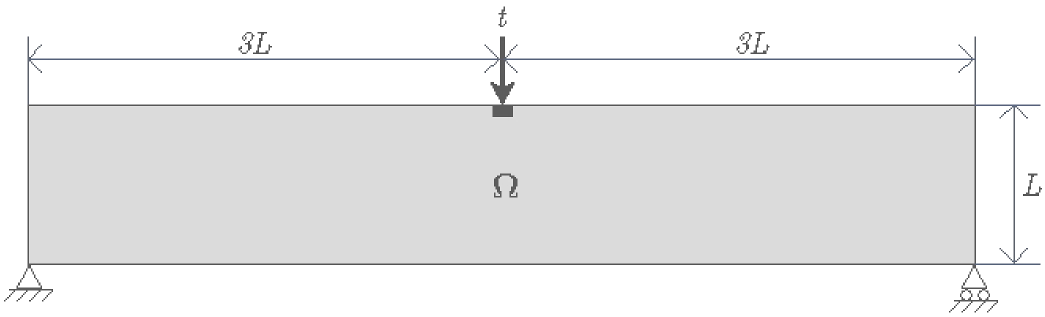
در روش SIMP توپولوژي سازه به صورت توزيع مواد همسان تعريف ميشود و چگاليهاي نسبي در المانها كه مقاديري بين صفر و يک دارند به عنوان متغيرهاي طراحي در نظر گرفته ميشوند. در هر مرحله از فرايند حل ابتدا

سازه‌ي مورد نظر به كمک روش اجزاي محدود تحليل مي‌شود و سپس متغيرهاي طراحي به كمک روش معيار بهينگي و بر اساس يک طرح بهبود تدريجي محاسبه مي‌شوند.

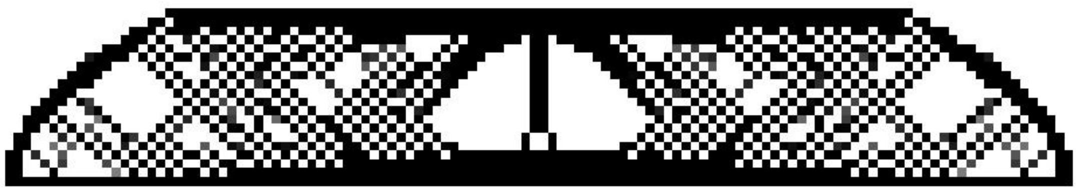
در نتايج روش SIMP، گاهي ناپايداري‌هايي عددي مشاهده مي‌شوند كه مهم‌ترين آن‌ها عبارتند از: وابستگي به شبكه‌ي المان‌ها، حداقل‌هاي محلي و تشكيل مناطق شطرنجي.

در اين مقاله روشي براي غلبه بر مشكل مناطق شطرنجي ارائه گرديد كه در آن با استفاده از هموارسازي توزيع تنش‌ها و كرنش‌ها از تشكيل مناطق شطرنجي جلوگيري به عمل مي‌آيد. در اين روش پس از تحليل اجزاي محدود، تنش‌ها و كرنش‌هاي هموارشده جايگزين تنش‌ها و كرنش‌هاي اوليه مي‌شوند و بقيه‌ي محاسبات بر اساس اين مقادير اصلاح‌شده صورت مي‌گيرد.

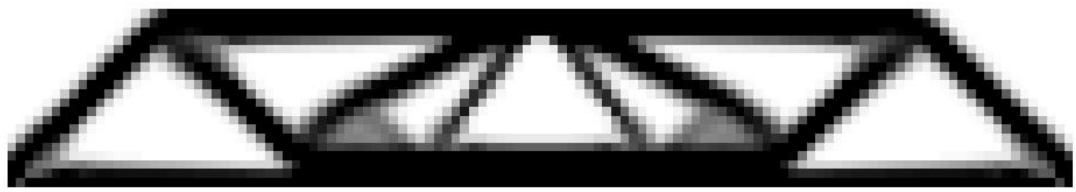
صحت عملكرد اين روش توسط مثال‌هايي مورد بررسي قرار گرفت و مشاهده گرديد كه اين روش به خوبي مي‌تواند مشكل تشكيل مناطق شطرنجي را برطرف سازد.



(الف)



(ب)



(ج)

شكل ٦: شرايط مرزي و بارگذاري مسأله‌ي MBB (الف) و نتايج حل اين مسأله به كمک روش SIMP (ب) و حذف مناطق شطرنجي با كمک هموارسازي تنش (ج) .

مراجع

1 - Rao, S. S. (1995). *Optimization – Theory and Applications,* New Age International, New Delhi.

2 - Eschenauer, H. A. and Olhoff, N. (2001). "Topology optimization of continuum structures: a review." *Applied Mechanics Reviews*, Vol. 54, No. 4, PP.331-390.

3 - Michell, A. G. M. (1904). "The limits of economy of material in frame structures." *Philosophical Magazine* Vol. 8, PP. 589-597.

4 - Dorn, W. S., Gomory, R. E. and Greenberg, H. J. (1964). "Automatic design of optimal structures." *Journal de Mecanique*, Vol. 3, PP. 25-52.

5 - Rozvany, G. I. N. (1972). "Optimal load transmission by flexure." *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 1, PP. 253-263.

6 - Prager, W. and Rozvany, G. I. N. (1977). "Optimization of structural geometry." In: *Dynamical Systems*, Academic Press, New York, PP. 265-293.

7 - Rozvany, G. I. N., Olhoff, N., Bendsøe, M. P., Ong, T. G., Sandler, R. and Szeto, W. T. (1985/87). "Least-weight design of perforated elastic plates." *International Journal of Solids and Structures* 23: 521-536 (part I) and 537-550 (part II).

8 - Rozvany, G. I. N. (1992). "Optimal layout theory: analytical solutions for elastic structures with several deflection constraints and load conditions." *Structural Optimization,* Vol. 4, PP. 247-249.

9 - Rozvany, G. I. N. and Birker, T. (1994). "On singular topologies in exact layout optimization." *Structural Optimization,* Vol. 8. PP. 228-235.

10 - Cheng, K.-T. and Olhoff, N. (1981). "An investigation concerning optimal design of solid elastic plates." *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 17, PP. 305-323.

11 - Lurie, K. A., Cherkaev, A. V. and Fedorov, A. V. (1982). "Regularization of optimal design problems for bars and plates." *Journal of Optimation Theory and Applications,* Vol. 37, 499-522. (Part I), PP. 523-543 (part II) and 42: 247-282 (part III).

12 - Kohn, R. V. and Strang, G. (1986). "Optimal design and relaxation of variational problems." *Communications on Pure and Applied Mathematics,* Vol. 39, PP. 1-25. (part I), 19-182 (part II) and 353-357 (part III).

13 - Vigdergauz, S. (1986). "Effective elastic parameters of a plate with a regular system of equal strength holes." *Mechanics of Solids,* Vol. 21, PP. 162-166.

14 - Ong, T. G., Rozvany, G. I. N. and Szeto, W. T. (1988). "Least-weight of perforated elastic plates for given compliance: non-zero Poisson's ration." *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 66, PP. 301-322.

15 - Bendsøe, M. P. & Kikuchi, N. (1988). "Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method." *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering,* Vol. 71, PP. 197-224.

16 - Rozvany, G. I. N. (2001). "Aims, scope, methods, history and unified terminology of computer-aided topology optimization in structural mechanics." *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol. 21, PP. 90-108.

17 - Stolpe, M. (2003). *On Models and Methods for Global Optimization of Structural Topology*, Doctoral thesis, Optimization and System Theory, Department of Mathematics, Royal Institute of Technology, Stockholm, Sweden.

18 - Stolpe, M. and Svanberg, K. (2001). "On the trajectories of the epsilon-relaxation approach for stress-constrained truss topology optimization." *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol. 21, PP. 140-151.

19 - Bendsøe, M. P. and Sigmund, O. (2004). *Topology Optimization – Theory, Methods and Applications*, Springer, New York Berlin Heidelberg.

20 - Hassani, B. and Hinton, E. (1999). *Homogenization and Structural Topology Optimization – Theory, Practice and Software*, Springer, New York Berlin Heidelberg.

21 - Sigmund, O. (2001). "A 99 line topology optimization code written in Matlab." *Structural and Multidisciplinary Optimization,* Vol. 21, PP.120-127.

22 - Díaz, A. and Sigmund, O. (1995). "Checkerboard patterns in layout optimization." *Structural Optimization*, Vol. 10, PP. 40-45.

23 - Jog, C. S. and Haber, R. B. (1996). "Stability of finite element models for distributed-parameter optimization and topology optimization." *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering,* Vol. 130, PP. 203-226.

24 - Bendsøe, M. P. (1989). "Optimal shape design as a material distribution problem." *Structural Optimization*, Vol. 1, PP.193-202.

25 - Sigmund, O. and Petersson, J. (1998). "Numerical instabilities in topology optimization: A survey on procedures dealing with checkerboards, mesh-dependencies and local minima." *Structural Optimization*, Vol. 16, PP. 68-75.

26 - Horst, R., Pardalos, P. M. and Thoai, N. V. (1995). *Introduction to Global Optimization*, Kluwer, Dordrecht.

27 - Bendsøe, M. P. and Sigmund, O. (1999). "Material interpolation schemes in topology optimization." *Archive of Applied Mechanics*, Vol. 69, No. 9-10, PP. 635-654.

28 - Jang, G. W., Jeong, J. H., Kim, Y. Y., Sheen, D., Park, C. and Kim, M. N. (2003). "Checkerboard-free topology optimization using non-conforming finite elements." *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 57, PP. 1717-1735.

29 - Petterson, J. and Sigmund, O. (1998). "Slope constrained topology optimization." *International Journal for Numerical Methods in Engineering,* Vol. 41, PP. 1417-1434.

30 - Bourdin, B. (2001). "Filters in topology optimization." *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 50, PP. 2143-2158.

31 - Borrvall, T. and Petersson, J. (2001). "Topology optimization using regularized intermediate density control." *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 190, PP. 4911-4928.

32 - Guo, X. and Gu, Y. X. (2004). "A new density-stiffness interpolation scheme for topology optimization of continuum structures." *Engineering Computations,* Vol. 21, No. 1, PP. 9-22 .

33 - Rahmatalla, S. F. and Swan, S. S. (2004). "A Q4/Q4 continuum structural topology optimization." *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol. 27, PP. 130-135.

34 - Matsui, K. and Terada, K. (2004). "Continuous approximation of material distribution for topology optimization." *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 59, PP. 1925-1944.

واژه‌هاي انگليسي به ترتيب استفاده در متن

1 - Sizing Optimization
2 - Shape Optimization
3 - Topology Optimization
4 - Integrated Structural Optimization
5 - Homogenization
6 - Material Distribution Methods
7 - Remeshing
8 - Gray-scale Image
9 - Solid Isotropic Materials with Penalization
10 - Isotropic
11 - Design Domain
12 - The Load Linear Form
13 - The Energy Bilinear Form
14 - Weak Form
15 - Material Model
16 - Mixed
16 - Closed
18 - Lack of Continuity
19 - Global
20 - Relaxed Formulation
21 - Mean Compliance
22 - Box Constraints
23 - Singularity
24 - Method of Moving Asymptotes
25 - Optimality Criteria
26 - Kuhn-Tucker Conditions
27 - Damping Factor