حل سريع روش اجزاي مرزي براي مسائل الاستيسيته با استفاده از موجكها

**لطيف ابراهيم نژاد[1] و رضا عطارنژاد[2]*

[1]دانشجوي دكتري سازه دانشكده مهندسي عمران- پرديس دانشكده هاي فني - دانشگاه تهران

[2]استاديار دانشكده مهندسي عمران- پرديس دانشكده هاي فني - دانشگاه تهران

(تاريخ دريافت ۸۵/۷/۲۲ ، تاريخ دريافت روايت اصلاح شده ۸۶/۲/۱۵ ، تاريخ تصويب ۸۶/۳/۱۹)

چكيده

در اين مقاله روشي سريع براي حل مسائل الاستيسيته به كمک روش اجزاي مرزي ارائه مي شود. نكته اصلي ايـن روش، اسـتفاده از تبـديل موجک براي فشرده كردن ماتريس هاي پرو نامتقارن ناشي از روش اجزاي مرزي است. موجكهای متعامد Daubechies برای فشرده كـردن ماتريس هاي سيستم اجزاي مرزی در مسائل عملي الاستيسيته استفاده شده اند. تبديل موجک به شكل جعبه سياه بـه برنامـه هـاي اجـزاي مرزي موجود اعمال شده است.

آناليز حساسيت نتايج عددي تغيير مكانها و تنشها براي پارامترهاي آستانه مختلف ارائه شده است. مزيت عمده اين روش تبديل ماتريس هـاي پر در روش اجزاي مرزي به ماتريس هاي شبه نواري است كه عناصر غيرصفر آن كم بوده و حول و حوش قطـر اصـلي توزيـع شـده انـد. ايـن ويژگي باعث كاهش قابل ملاحظه زمان حل سيستم معادلات خطي با روش تكراریGMRES ميگردد. مثالهای ارائه شده كـارائي روش را در حل سيستم هاي بزرگ اجزاي مرزي نمايان مي سازد.

واژه هاي كليدي : تبديل موجک- روش اجزاي مرزي- حل كننده GMRES - مسائل الاستيسيته

مقدمه

روش تفاضل هاي محدود و اجـزاي محـدود دو روش حـل عددي بسيار نيرومند براي حل مسائل عملي مهندسي مي باشند. در اين دو روش كه از نوع دامنـه اي هسـتند، بايـد كل دامنه مسأله افراز شود. در روش اجزاي مـرزي، نيـازي به افراز دامنه مسأله نيست و فقط مـرز مسـأله افـراز مـي شود. همين ويژگي باعث كاهش يک بعـد از ابعـاد مسـأله شده و به خاطر كاهش درجات آزادي سيستم بسيار جالب به نظر می رسد. متأسفانه در ازاي مزيت مذكور، مـاتريس هاي حاصله از روش اجزاي مرزي بر خلاف مـاتريس هـاي سختي روش تفاضل هـاي محـدود و اجـزاي محـدود كـه نواري و غالباً متقارن هستند، پر و نامتقارن مي باشند. بـه اين دليل ديگر نمي توان در حل سيستم معادلات خطـي از تكنيک های كارآمد Sky Line وFrontal استفاده كرد و همين امر باعث مي شود كه از روش حل مستقيم گـاوس براي حـل سيسـتم معـادلات خطـي روش اجـزاي مـرزي استفاده شود. با توجه به اينكه تـلاش محاسـباتي حـل در روش گاوس، از مرتبـه تـوان سـوم درجـات آزادي مسـأله است، زمان حل و حافظـه لازم بـراي حـل سيسـتم هـاي بزرگ در روش اجزاي مرزي باعـث ناكارآمـدي ايـن روش مي شود و ايراد عمده اين روش محسوب مي شـود. بـراي غلبه بر مشكل ماتريس هاي پـر و نامتقـارن روش اجـزاي مـــرزي، روش Panel Clustering [۱]، FMM [۲] و موجك [۳،۴،۵،۶،۷] ارائه شده است. ايده استفاده از تبديل موجـک در روش اجـزاي مـرزي، نخسـتين بـار توسـط Beylkin، Coifman و Rokhlin در سال ۱۹۹۱ ارائه شد و بعـدها توسـط سـايرين [۷، ۸، ۹، ۱۰ و۱۱] پـي گيـری و توسعه داده شد. مزيت عمـده موجكهـا نسـبت بـه Panel Clusteringو FMM در اين است كه مي توان موجكهـا را به شكل جعبه سياه به برنامه هـاي اجـزاي مـرزي اضـافه نمود. در حاليكه در دو روش ديگر بايد فرمولاسيون مسأله از ابتدا تغيير كند. تاكنون كاربرد موجكها در روش اجـزاي مرزي براي حل مسائل ساده پتانسيل مـورد بررسـي قـرار گرفته است. در اين مقاله براي نخستين بار اين روش براي مسائل الاستيسيته تعميم داده شده است و كـارائي آن بـا مثالهاي متعدد به اثبـات رسـيده اسـت. تعمـيم روش بـه مسائل الاستو ديناميک كار بعـدي نويسـنگان ايـن مقالـه است كه در دست تهيه است. پيكربندي اين مقاله به ايـن شكل تنظيم شـده اسـت كـه در ادامـه سيسـتم دسـتگاه معادلات خطي حاكم بـر مسـائل دو بعـدي الاستيسـيته و مسائل با تقـارن محـوري در روش اجـزاي مـرزي بدسـت

* نويسنده مسئول : تلفن : ۶۱۱۱۲۲۲۵ ، فاكس : ۶۶۴۰۳۸۰۸ ، Eamil: rattar@ut.ac.ir

مي آيد. سپس موجكها و ويژگي هاي مهم آنها بررسي مي شود. پس از معرفی موجكها، نحوه اعمال موجكها به سيستم معادلات خطي حاصل از روش اجزاي مرزي نشان داده مي شود. براي ارزيابي كارائي روش، نتايج عددي چند مثال و آناليز حساسيت نتايج حل را با پارامترهاي موجكها بررسی می كنيم و در نهايت نتيجه گيري از روش ارائه شده به عمل مي آيد.

روش اجزاي مرزي براي حل مسائل الاستيسيته دوبعدي و مسائل با تقارن محوري

معادله ناويه

در اين مقاله از فرمولاسيون "مستقيم" در روش اجزاي مرزي كه كميت هاي فيزيكي را بعنوان متغيرهاي حل بكار مي برد، استفاده شده است. براي بدست آوردن معادله ديفرانسيل حاكم بر تئوري الاستيسيته بر حسب تغيير مكان، سه رابطه معادله ديفرانسيل تعادل، روابط تنش-كرنش و روابط كرنش- تغيير مكان را بكار برده و براي محيط هاي همگن به معادله زير موسوم به معادله ناويه مي رسيم:

$$u_{i,jj} + \left(\frac{1}{1-2\upsilon^*}\right)u_{j,ij} = -\frac{f_i}{\mu}$$

(١)

در نوشتن روابط در اين مقاله از جمع انديسي استفاده شده است. در رابطه فوق u_i و f_i بترتيب مؤلفه i ام تغييرمكان و بار حجمي، μ مدول برشي و υ^* براي مسائل كرنش مسطح ضريب پواسون و براي مسائل تنش مسطح از رابطه زير بدست مي آيد:

$$\upsilon^* = \frac{\upsilon}{1+\upsilon}$$

(٢)

كه در آن υ ضريب پواسون مي باشد.

حل اساسي مسأله

براي حل معادله فوق، به حل اساسي مسأله نياز داريم. حل اساسي مسأله الاستيسيته حل كلوين است، كه در روابط (٣) و (٤) ارائه شده است [١٢].

$$u_i = \frac{1}{8\pi\mu(1-\upsilon)}\left[(3-4\upsilon)Ln\left(\frac{1}{r}\right)\delta_{ij} + r_{,i}r_{,j}\right]$$

(٣)

$$t_i = \frac{-1}{4\pi(1-\upsilon)r}\Big\{\left[(1-2\upsilon)\delta_{ij} + 2r_{,i}r_{,j}\right]r_{,n} - \left[(1-2\upsilon)(r_{,j}n_{,i} - r_{,i}n_{,j})\right]\Big\}$$

(٤)

در اين رابطه t_i مؤلفه i ام بردار تنش روي سطح با بردار نرمال n با مؤلفه هاي n_i و δ_{ij} دلتاي كرونكرمي باشد.

معادله انتگرال مرزي

از قضيه تقابل بتی [١٢] براى به دست آوردن معادله انتگرالي تغييرمكان نقطه P ناشي از تنش و تغييرمكان بر روي نقطه مرزي Q استفاده مي كنيم. در غياب نيروهاي حجمي، معادله انتگرالي به شكل زير درمي آيد:

$$u_i(P) + \int_\Gamma T_{ij}(P,Q)u_j(Q)d\Gamma(Q) = \int_\Gamma U_{ij}(P,Q)t_j(Q)d\Gamma(Q)$$

(٥)

در رابطه فوق U_{ij} و T_{ij} بترتيب كرنل تغييرمكان و تنش مي باشند.

حل معادله انتگرالي

براي حل معادله انتگرالي (٥) بايد مراحل زير طي شود:

تجزيه مرز به المانها

نحوه تغييرات هندسه و متغيرهاي تغييرمكان و تنش بر روي المانهاي مرزي بايد از پيش مشخص باشد. در اين مقاله از المانهاي ايزوپارامتريک درجه دو استفاده شده است.

انتگرال گيري عددي كرنل ها:

با استفاده از ماتريس ژاكوبين براي تبديل از مرز G به مختصات محليx معادله انتگرالی (٥) به صورت زير درمي آيد:

$$\begin{bmatrix} c_{xx}(P) & c_{xy}(P) \\ c_{yx}(P) & c_{yy}(P) \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_x(P) \\ u_y(P) \end{Bmatrix} + \sum_{m=1}^{M}\sum_{c=1}^{3}\left(\int_{\Gamma_m}\begin{bmatrix} T_{xx}(P,Q) & T_{xy}(P,Q) \\ T_{yx}(P,Q) & T_{yy}(P,Q) \end{bmatrix} N_c(\xi)J(\xi)d\xi\right)\begin{bmatrix} u_x(Q) \\ u_y(Q) \end{bmatrix} = \sum_{m=1}^{M}\sum_{c=1}^{3}\left(\int_{\Gamma_m}\begin{bmatrix} U_{xx}(P,Q) & U_{xy}(P,Q) \\ U_{yx}(P,Q) & U_{yy}(P,Q) \end{bmatrix} N_c(\xi)J(\xi)d\xi\right)\begin{bmatrix} t_x(Q) \\ t_y(Q) \end{bmatrix}$$

(٦)

كه در آن M تعداد كل المانهاست.

$N_c(\xi)(c=1,2,3)$ توابع شكل و c_{ij} براى مرزهاى

هموار با رابطه زير تعريف می شود:

$$c_{ij} = \frac{1}{2}\delta_{ij} \;\; ; i,j = x,y$$
(۷)

در مرزهاي ناهموار نظير گوشه هاي تيز، اصلاحاتي در مدلسازي و تقريب مرزها صورت مي گيرد [۱].

اگر انتگرالهای رابطه (۶) را با ماتريسهاي [A] و [B] جايگزين نمائيم به رابطه زير مي رسيم:

$$\begin{bmatrix} c_{xx}(P) & c_{xy}(P) \\ c_{yx}(P) & c_{yy}(P) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_x(P) \\ u_y(P) \end{Bmatrix} + \sum_{m=1}^{M}\sum_{c=1}^{3} \begin{bmatrix} A_{xx} & A_{xy} \\ A_{yx} & A_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x(Q) \\ u_y(Q) \end{bmatrix} = \sum_{m=1}^{M}\sum_{c=1}^{3} \begin{bmatrix} B_{xx} & B_{xy} \\ B_{yx} & B_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_x(Q) \\ t_y(Q) \end{bmatrix}$$
(۸)

كه اين معادله مي تواند به صورت مجموعه معادلات جبري خطي به شكل زير نوشته شود:

$$[A]\cdot[u] = [B]\cdot[t]$$
(۹)

لازم به ذكر است كه سه حالت براي وضعيت نقاط P و Q متصور است:

الف- P و Q در المانهاي جداگانه باشند:

در اين حالت از روش انتگرال گيري گاوس استفاده مي شود.

ب-P وQ دريک المان باشند ولي $P \neq Q$:

در اين حالت كرنل هاي U_{ij} و T_{ij} منفردانـد ولي حاصلضرب آنها در تابع شكل منفرد نيست. بنابراين مجدداً از روش انگرال گيري گاوس استاندارد استفاده مي شود.

ج- P و Q دريک المان باشند و $P = Q$:

در اين حالت از انتگرال گيري لگاريتمي گاوس براي ارزيابي عناصر قطری ماتريس B استفاده مي شود. براي عناصر قطري ماتريس A در محيطهاي محدود از تكنيك حركت جسم صلب استفاده مي شود.

با استفاده ازاين تكنيك درايه قطري ماتريس A برابر با قرينه مجموع درايه هاي سطر مربوطه به دست مي آيد. در محيطهاي نامحدود اين تكنيك قابل اعمال نيست و بايد انتگرال هاي منفرد حاصله در مفهوم كوشي (CPV) محاسبه شوند.

اعمال شرايط مرزي

با اعمال تغييرمكان و تنشهاي پيش فرض در معادله (۸) بايد آرايش مجددي در معادلات خطي صورت گيرد تا معلومات مسأله در طرف راست معادله و مجهولات در سمت چپ معادله قرار گيرند. از آنجا كه مرتبه درايه هاي ماتريس A و B باهم متفاوت است، براي اجتناب از خطاهاي عددي حل دستگاه معادلات، از مقياس كردن عناصر ماتريس B براي هم مرتبه كردن با درايه هاي ماتريس A استفاده مي شود. بطوريكه معادله (۹) پيش از آرايش مجدد به شكل معادله زير در مي آيد:

$$[A]\cdot[u] = (s[B])\cdot(\frac{1}{s}[t])$$
(۱۰)

كه s از رابطه (۱۱) بدست مي آيد:

$$s = \frac{E}{L_{max}}$$
(۱۱)

دراين رابطه E مدول الاستيسيته و L_{max} حداكثر فاصله دو گره است. پس از اعمال شرايط مرزي به معادله زير مي رسيم:

$$[A^*]\cdot[x] = [B^*]\cdot[y] = [c]$$
(۱۲)

حل دستگاه معادلات جبري

در روش استاندارد اجزاي مرزي از روش مستقيم حذف گاوس براي حل معادله (۱۲) استفاده مي شود. در سيستم هاي بزرگ اين روش بسيار وقتگير است، لذا معادله مذكور در ادامه، به فضاي موجک انتقال داده مي شود تا با تُنُك كردن ماتريس $[A^*]$ و استفاده از روش حل عددی GMRES زمان حل دستگاه معادلات به ميزان قابل توجهي كاهش يابد.

محاسبه تنشهاي مرزي

در اين مقاله با استفاده از مشتق گيري توابع شكل، تنشها مستقيماً از تغييرمكان هاي محاسبه شده بدست مي آيند.

محاسبه متغير هاي دامنه

پس از حل معادلات، تمامي تغييرمكان ها و تنشها در نقاط مرزي بدست مي آيند. براي تعيين تغييرمكان و تنش در نقاط دامنه از معادلات زير استفاده مي شود:

$$u_i(p)+\int_\Gamma T_{ij}(p,Q)\cdot u_j(Q)d\Gamma(Q)=\int_\Gamma U_{ij}(p,Q)\cdot t_j(Q)d\Gamma(Q)$$
(١٣)

$$\sigma_{ij}(p)+\int_\Gamma S_{kij}(p,Q)\cdot u_k(Q)d\Gamma(Q)=\int_\Gamma D_{kij}(p,Q)\cdot t_k(Q)d\Gamma(Q)$$
(١٤)

كه S_{kij} و D_{kij} تانسورهاي مرتبه سوم هستند در كه مرجع [١٢] ارائه شده اند.

مروري بر تئوري موجك

تبديل موجك ابزاري است كه داده ها، توابع و عملگرها را به مقياس هاي مختلف فركانسي تفكيك مي كند و سپس هر مؤلفه را با دقتی متناسب با مقياس آن مؤلفه مورد مطالعه قرار مي دهد. از آنجا كه تبديل موجك بسيار شبيه تبديل فوريه عمل مي كند، آن را با تبديل فوريه و تبديل فوريه پنجره اي مقايسه مي كنيم. تبديل فوريه تابع يا عملگر را به محتواي فركانسي اش تفكيك مي كند ولي تمامي اطلاعات مربوط به محل فركانس ها را از دست مي دهد. براي غلبه بر اين مشكل تبديل فوريه پنجره اي ابداع شده است. در اين روش نخست محل يابي در زمان توسط ايجاد پنجره اي بر روي داده ها صورت مي گيرد و سپس تبديل فوريه گرفته مي شود. ايراد اين روش اين است كه همواره ابعاد قطعات داده هاي مورد مطالعه، يكسان و مستقل از محتواي فركانسي است. تبديل موجك عرض قطعه زماني را متناسب با محتواي فركانسي اش تنظيم مي كند. انتگرال هائي كه تبديل فوريه، تبديل فوريه پنجره اي و تبديل موجك را تعريف مي كنند به قرار زير مي باشند:

$$(T^{FT})(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cdot e^{-i\omega t}dt$$
(١٥)

$$(T^{WFT})(\omega,\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cdot g(t-\tau)\cdot e^{-i\omega\tau}dt$$
(١۶)

$$(T^{WT})(a,b)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cdot \Psi(\frac{t-b}{a})\cdot dt$$
(١٧)

در روابط فوق T^{FT}، T^{WFT} و T^{WT} بترتيب تبديل فوريه، فوريه پنجره اي و موجك تابع $f(t)$ مي باشند. $g(t-\tau)$ تابع پنجره و $\Psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$ موجك با مقياس a و جابجائی b را تعريف مي كند. بر پايه اين تعاريف مشاهده مي شود كه توابع پايه براي تبديل فوريه توابع نمايي مختلط مي باشند، در حاليكه براي تبديل موجك هر تابعي كه شرايط موجك ها را ارضاء نمايد مي تواند تابع پايه باشد. موجكهاي مختلف ويژگي هاي متفاوتي دارند كه باعث مي شود هر كدام كاربرد خاص داشته باشند. به منظور بهره گرفتن از ويژگي فشرده كردن ماتريس ها در روش اجزاي مرزي از موجكهائي با مشخصات فشرده سازي قوي استفاده مي شود. يكي از موجكها براى اين منظور موجكهای Daubechies مي باشند كه داراي خاصيت تعامد، تعداد لنگرهاي صفر زياد و دامنه ضرايب غير صفر محدود مى باشند [١٣]. در اين مقاله از اين موجكها براي فشرده كردن ماتريس هاي ناشي از روش اجزاي مرزي استفاده مي كنيم. نحوه اعمال تبديل موجك سريع به ماتريس هاي منتجه از روش اجزاي مرزي در بخش بعدي تشريح مي گردد.

استفاده از موجكها براي فشرده كردن ماتريس روش اجزاي مرزي

دو استراتژي عمده براي اعمال موجكها به روش اجزاي مرزي وجود دارد. استراتژي اول متغيرها را به سري موجكها بسط مي دهد. با وجود اينكه اين روش زمان حل را تا مرتبه O(N.LOG(N)) كاهش مي دهد ([٣])،و به محاسبه تمامي درايه هاي ماتريسها نياز ندارد، به فرمولاسيوني كاملاً جديد و به تبع آن الگوريتم و برنامه كامپيوتري جديدي نياز دارد. استراتژي دوم كه موضوع اين مقاله است، فشرده سازي توسط موجكها را پيش از شروع حل سيستم نهائي اعمال مي كند. عمده ترين مزيت اين روش حداقل كردن تغييرات لازم در برنامه كامپيوتري روش استاندارد اجزاي مرزي است. اين روش ماتريس هاي پر و نامتقارن روش اجزاي مرزي استاندارد را گرفته و ماتريس هاي تُنُك مربوطه را توليد مي كند.

معادله (١٨) كه همان معادله (١) است، توسط روش اجزاي مرزي استاندارد براي مسأله الاستيسيته دوبعدي بدست آمده است:

$$\left[A^*\right]\cdot[x]=[c]$$
(١٨)

كه درآن A^* ماتريس شامل درايه هاي ماتريس هاي A و B (مجهولات مسأله) مي باشد.

[x] شامل بردارمتغيرهاي مجهول و [c] شامل بردار عناصرحاصل از ضرب متغيرهاي معلوم در درايه هاي ماتريس هاي مربوطه مي باشد. از آنجا كه از معادلات مقياس شده استفاده كرده ايم (معادله (١٠))، درايه هاي ماتريس A^* حدوداً هم مرتبه هستند.

الگوريتم تبديل موجك سريع(FWT)[1] بردارa^w را براي هر بردارa توليد مي كند:

$$a^w = W.a$$

(١٩)

كه در آن Wماتريس مربعي است كه درايه هاي آن بستگي به نوع موجك انتخاب شده دارد. از آنجا كه موجك متعامد Daubechies را مورد استفاده قرار داده ايم، W چنان انتخاب مي شود كه:

$$W^T \cdot W = I$$

(٢٠)

با پيش ضرب كردن رابطه (١٨) در ماتريسW خواهيم داشت:

$$[W]\cdot[A^*]([W^T]\cdot[W])[x] = [W]\cdot[c]$$

(٢١)

كه مي تواند به شكل زير بيان شود:

$$([W]\cdot[A^*][W^T])\cdot([W][x]) = [W]\cdot[c]$$

(٢٢)

ماتريس هاي انتقال يافته جديد به شكل زير خواهند بود:

$$[\overline{A}] = [W]\cdot[A^*]\cdot[W^T]$$

(٢٣)

$$[\overline{x}] = [W]\cdot[x]$$

(٢٤)

$$[\overline{c}] = [W]\cdot[c]$$

(٢٥)

با جايگذاري روابط (٢٣) تا (٢٥) در رابطه (٢٢) خواهيم داشت:

$$[\overline{A}]\cdot[\overline{x}] = [\overline{c}]$$

(٢٦)

از آنجا كه ماتريس انتقال يافته $[\overline{A}]$ فقط تعداد محدودي درايه بزرگ دارد، مي توانيم درايه هائي را كه از پارامتر آستانه اي كوچكتر هستند به صفر تبديل كنيم. اين نوع فيلترينگ را آستانه سازي نوع سخت (مرگ و زندگي) مي نامند [١٤].

$\left[\tilde{\overline{A}}\right]$ ماتريس تُنُک شده ماتريس $[\overline{A}]$است كه با آستانه سازي به دست آمده است. اين ماتريس شكلي شبيه به انگشتان دست دارد. يک نمونه از اين ماتريس ها در شكل شماره (١) ارائه شده است.

از آنجا كه حل عددي معادله (٢٦) با دشواري هائي توأم است، ماتريس متعامد جابجائيP را بصورت زير تعريف مي كنيم:

$$p_{ij} = \begin{cases} 1 & ; i \le \frac{n}{2}, \; j = 2i\text{-}1 \\ 0 & ; i \le \frac{n}{2}, \; j \ne 2i\text{-}1 \\ 1 & ; i > \frac{n}{2}, \; j = 2i\text{-}n \\ 0 & ; i > \frac{n}{2}, \; j \ne 2i\text{-}n \end{cases}$$

(٢٧)

در رابطه فوق p_{ij} درايه هاي ماتريسP وn تعداد درجات آزادي مسأله مي باشد. اگر رابطه (٢٤) را در ماتريس متعامد P پيش ضرب كنيم، خواهيم داشت:

$$[P]\cdot[W]\cdot[A^*]([W^T]\cdot[P^T]\cdot[P]\cdot[W])[x] = [P]\cdot[W]\cdot[c]$$

(٢٨)

و يا:

$$([P]\cdot[W]\cdot[A^*]\cdot[W^T]\cdot[P^T])\cdot([P]\cdot[W]\cdot[x]) = [P]\cdot[W]\cdot[c]$$

(٢٩)

و يا بصورت ديگر:

$$[\overline{\overline{A}}]\cdot[\overline{\overline{x}}] = [\overline{\overline{c}}]$$

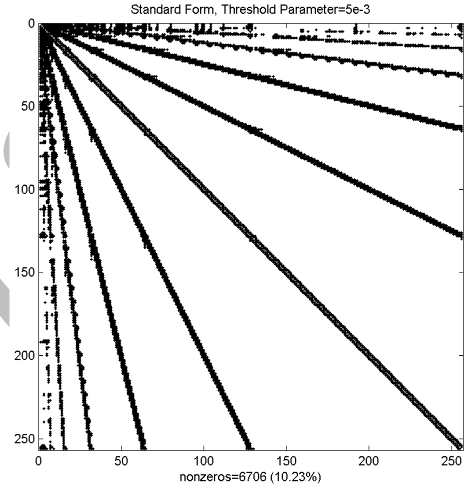
(٣٠)

پس از آستانه سازي به ماتريس $\left[\tilde{\overline{\overline{A}}}\right]$ مي رسيم. اين ماتريس برخلاف ماتريس$\left[\tilde{\overline{A}}\right]$ تقريباً نواري است.

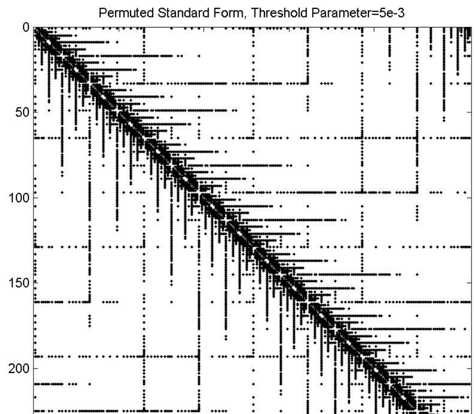
ماتريس معادل شكل (١) در شكل (٢) نشان داده شده است. با افزايش مرتبه موجكها، تعداد عناصر غيرصفر و عرض نواركاهش مي يابد. حل عددي دستگاه معادلات (٣٠) بسيار راحتتر و كم هزينه تر از حل دستگاه معادلات (٢٦) است.

حافظه مورد نياز براي ذخيره كردن ماتريس $\left[\overset{\cong}{A}\right]$ در مقايسه با $\left[\overline{\overline{A}}\right]$ بسيار كمتر است. تعداد عناصر غير صفر ماتريس $\left[\overset{\cong}{A}\right]$ بستگي به پارامتر آستانه دارد.

هر چه اين پارامتر بزرگتر باشد نرخ فشرده سازي بيشتر و دقت جوابها كمتر خواهد بود. در اين مقاله براي تعيين پارامتر آستانه بهينه، پارامترهاي آستانه مختلف با خطاي عددي حل مسأله سنجيده مي شود. بهترين پارامتر آستانه زماني بدست مي آيد كه خطاي حل بدليل آستانه سازي با خطاي مجزاسازي المانها برابر باشد [١۴].



شكل ١: فرم انگشت مانند ماتريس در فضاى موجک.



شكل ٢ : فرم نوارى ماتريس در فضاى موجک جابجاشده.

براي ذخيره كردن ماتريس $\left[\overset{\cong}{A}\right]$ نياز به دانستن محل و مقدار درايه هاي غيرصفر داريم. روش مختصات فشرده $(CC)^2$ براي ذخيره كردن محل و مقدار درايه هاى غيرصفر ماتريس $\left[\overset{\cong}{A}\right]$ استفاده شده است.

حل كننده تكراريGMRES ([١۵]) براى حل سيستم معادلات خطي بكار گرفته شده است. اين حل كننده براي هر تكرار نياز به تلاش محاسباتي از مرتبه O(N.Log(N)) دارد. پس از حل سيستم معادلات بردارهاي $\left[\overline{\overline{x}}\right]$ معلوم خواهند شد. از تبديل معكوس زير براي بدست آوردن متغيرهاي فيزيكي مسأله در فضاي واقعي استفاده مي شود.

$$[x]=\left[P^T\right]\left[W^T\right]\cdot\left[\overline{\overline{x}}\right] \tag{٣١}$$

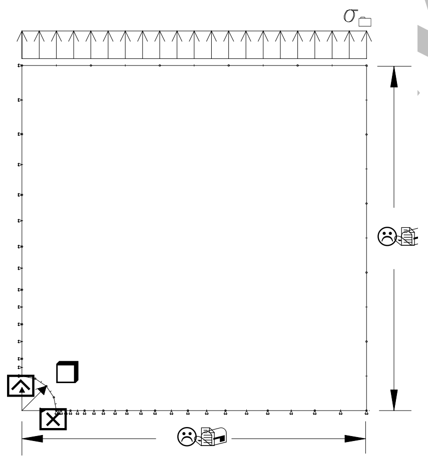
نتايج عددي

در اين بخش نتايج مثالهاي عددي كه به منظور تعيين صحت و اعتبار روش ارائه شده براي حل مسائل دوبعدي الاستيسيته گنجانده شده است. مثالهايي كه مطرح مي شوند مربوط به مسائل زير هستند:

مثال١- ورق با سوراخ گرد تحت كشش

معروفترين مثال براي كنترل صحت برنامه هاي حل عددي در اين مقاله نيز به خدمت گرفته مي شود.

ورق مربعي بطول L با سوراخ گرد به شعاع r در وسط تحت كشش به تنش σ_0 قرار دارد. (شكل (٣))

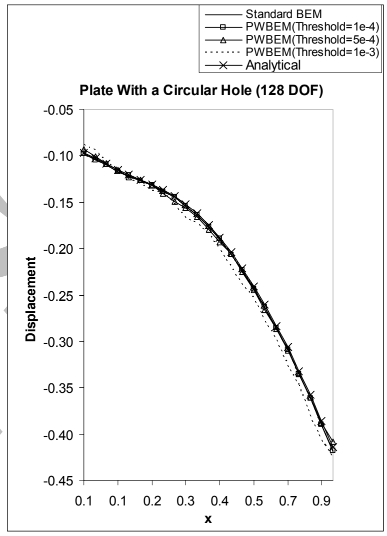


شكل ٣ : مثال ١ - ورق مربعى با سوراخ گرد تحت كشش.

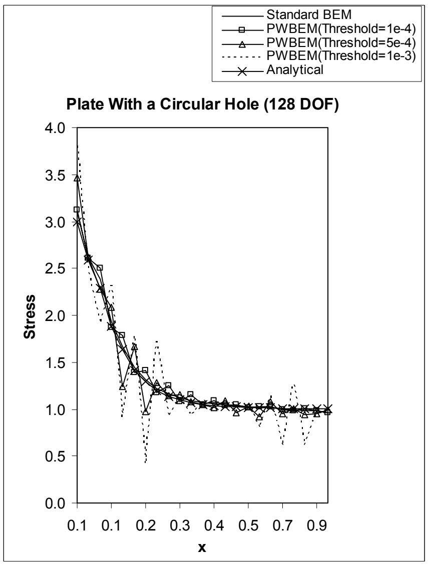
ورق به اندازه كافي نازک در نظر گرفته مي شود تا شرايط تنش مسطح حاكم باشد. حل تحليلي تنش محوري حول سوراخ در ورق به طول نامحدود از رابطه زير بدست مي آيد [١٢]:

$$\frac{\sigma_{yy}}{\sigma_0}=0.5\left[2+\left(\frac{r}{x}\right)^2+3\left(\frac{r}{x}\right)^4\right] \tag{٣٠}$$

در رابطه اخیر σ_{yy} و σ_0 بترتیب تنش قائم در نقطه به فاصله x از مرکز سوراخ و تنش وارده به لبه ورق می باشند. مثال ۱ با تعداد درجات آزادي ۱۲۸، ۲۵۶، ۵۱۲ و۱۰۲۴ حل شده است تا خطاي مجزاسازي تعیین شود. نتیجه حل مسأله فوق براي تغییرمکان و تنش با روش استاندارد اجزاي مرزي و روش ارائه شده در این مقاله با ۱۲۸ درجه آزادي در حالت $L = 2$ ،$r = 0.1$ و $\sigma_0 = 1.0$ به ترتیب در شکلهاي (۴) و (۵) ارائه شده است.



شکل ۴: تغییرمکان قائم(u_y) ورق با سوراخ گرد.



شکل ۵ : تنش ورق با سوراخ گرد.

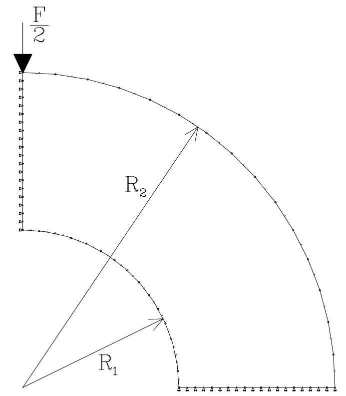
مشاهده مي شود که تغییرمکان حتي با پارامتر آستانه بزرگ نیز خطاي ناچیزي دارد ولي تنش ها به پارامتر آستانه حساس مي باشند. براي کاهش خطاي تنشها باید از پارامتر آستانه کوچکتر استفاده کرد.

همانطور که حل تحلیلی براي ورق بطول بینهایت پیش بیني مي کند، مقادیر تنش در نقاط حول سوراخ، حدود سه برابر تنش متوسط ورق است.

جزئیات بیشتر تحلیل نتایج مثالها در مرجع [۲۱] ارائه شده است. جدول (۱) نُرم دوم خطا را براي تغییرمکان و تنش هاي مثال ۱ با پارامتر آستانه هاي مختلف ارائه مي کند.

مثال۲– حلقه تحت بار متمرکز

تغییرشکل حلقه به شعاع داخلی R_1 و شعاع خارجي R_2 تحت اثر دو بار متمرکز خلاف جهت هم به شدت F مورد بررسي قرار مي گیرد (شکل (۶)).

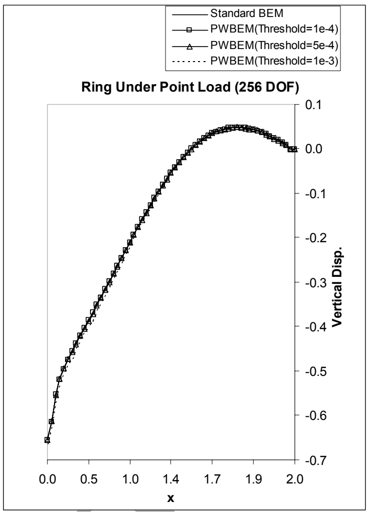


شکل ۶ : مثال ۲ - حلقه تحت بار متمرکز.

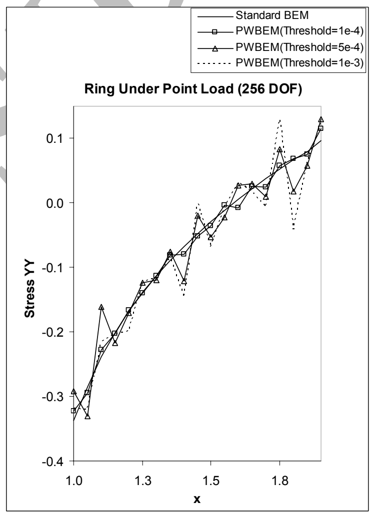
حلقه به اندازه کافي ضخیم در نظر گرفته مي شود تا شرایط کرنش مسطح حاکم باشد. شکل (۷) و (۸) بترتیب تغییرشکل و تنش را در نقاط مختلف حلقه نشان مي دهد. نظیر مثال۱ این مثال نیز با تعداد درجات آزادي ۲۵۶، ۵۱۲ و ۱۰۲۴تحلیل شده و نتایج ارائه شده فقط براي حالت ۲۵۶ درجه آزادي مي باشد. جدول (۲) نُرم خطا را براي مثال ۲ با تعداد درجات آزادي ۲۵۶ و پارامترآستانه مختلف نشان مي دهد. مشابه مثال ۱ تغییرمکان ها با پارامتر آستانه بزرگ نظیر 10^{-3} کمتر از ۵ درصد خطا دارند ولي تنش ها احتیاج به پارامتر آستانه اي کوچکتر از $5*10^{-4}$ دارند.

مثال۳- ورق وصله شاهتیر پل

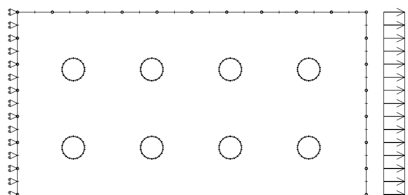
مثال ۳ شامل حل مسأله عملي ورق وصله شاهتیرهاي پل فلزي است. این ورق به ابعاد ۶۰ در ۸۰ سانتیمتر داراي ۴۸ سوراخ به قطر ۲۶ میلیمتر است که تحت تنش افقي قرار دارد. بدلیل تقارن در دو جهت یک چهارم ورق تحلیل شده است (شکل (۹)).



شكل ۷: تغييرمكان قائم حلقه تحت بار متمركز.



شكل ۸ : تنش حلقه تحت بار متمركز.

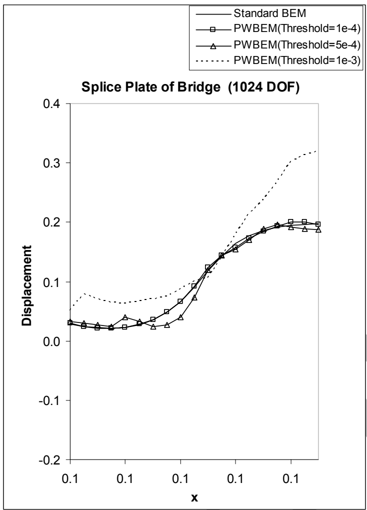


شكل ۹ : مثال ۳ - ورق وصله شاهتير پل فلزی.

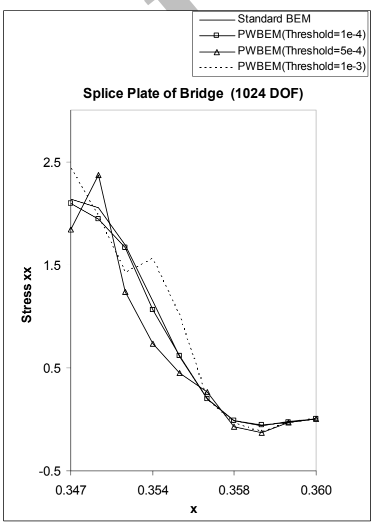
اين مثـال بـا تعـداد درجـات آزادي ۱۰۲۴ و ۲۰۴۸ مـورد تحليل قرار گرفته است. حل روش استاندارد اجزاي مـرزي محک مقايسه نتايج روش ارائه شـده اسـت. شـكل (۱۰) و (۱۱) نتايج حل تغييرمكان و تـنش را در نزديكـي سـوراخ هاي رديف آخر براي حالـت تعـداد درجـات آزادي ۱۰۲۴ نشان مي دهد. همانگونه كه ديده مي شـود، حتـي بـراي پارامتر آستانه $۱۰^{-۳}$ نتايج تغييرمكان بسيار مناسب اسـت.

بطوريكه حداكثر خطا كمتر از ۳ درصد است. ولی تنش ها به پارامتر آستانه $۱*۱۰^{-۴}$ نياز دارند. جـدول (۳) نُـرم دوم خطاي را براي مثال۳ و در حالات مختلف ارائه مي كند.

از مقايسه نتايج بدست مي آيد كه تغييرمكانها حتي براي پارامتر آستانه $۱۰^{-۴}$ خطايي كمتر از ۴ درصد دارنـد. ولـی براي تنش ها با پارامتر آستانه $۵*۱۰^{-۴}$ خطاهـاي حـداكثر براي مثالهاي ۱ تا ۳ بترتيب ۷/۲، ۱/۳ و۱۹/۳ درصد است. با پارامتر آستانه $۱۰^{-۴}$ حداكثر خطـاي تنشـها كمتـر از ۴ درصد مي باشد. همانگونه كه در شكلهای (۵)، (۸) و (۱۱) ديده می شود، به ازای پارامتر آستانه بزرگـي نظيـر $۱۰^{-۳}$، نتـايج تنشـها داراي نوسـانات نسـبتاً زيـادی اسـت. بـراي كاستن از نوسـانات در نتـايج تـنش، بايـد مقـدار پـارامتر آستانه را كاهش داد. بهتـرين پـارامتر آسـتانه بـا ملحـوظ نمودن دقت مناسب جوابها براي تنش ها، $۱۰^{-۴}$مي باشد.



شكل ۱۰: تغييرمكان افقی ورق وصله شاهتير فلزي.



شكل ۱۱: تنش ورق وصله شاهتير فلزي.

جدول (۴) تعداد المان هاي غيرصفر و نرخ فشرده سازي را براي پارامتر آستانه هاي مختلف در مثال هاي ۱ تا ۳ ارائه مي كند.

جدول (۵) زمان حل كل مسأله و زمان مورد نياز براي حل سيستم معادلات خطي را در روش اجزاي مرزي استاندارد و روش ارائه شده براي مثالهاي مختلف نشان مي دهد. همانطور كه ديده مي شود، براي مسائل با درجه آزادي كم زمان افزايش يافته است. دليل اين امر، محاسبات اضافی لازم در روش پيشنهادی نسبت به روش استاندارد اجزای مرزی و سرعت بالای الگوريتم حذف گاوس برای حل سيستم معادلات خطی با تعداد معادلات كم می باشد. ولي در مسائل با مقياس بزرگ روش استاندارد اجزای مرزی نياز به زمان بيشتری برای حل دستگاه معادلات جبری دارد و روش ارائه شده، كاهش قابل ملاحظه اي را در زمان حل موجب مي شود، بدون آنكه خطاي محسوسي در جوابها ايجاد نمايد.

نتيجه گيري

در اين مقاله نتايج كاربرد موجكها در بهسازي روش اجزاي مرزي در حل مسائل الاستيسيته نشان داده شده است. تكنيک فشرده سازي با موجكها براي پوشش دادن ضعف عمده روش اجزاي مرزي (ماتريس هاي پر و نامتقارن و زمان حل زياد) با موفقيت استفاده شده است. در روش ارائه شده، ماتريسهای پر روش استاندارد اجزای مرزی به ماتريس های شبه نواری تُنُک، شبيه ماتريسهای سختي روش اجزای محدود، تبديل مي شوند. انتقال متغيرها از فضاي واقعي به فضاي موجک احتياج به زمان بسيار كمتري نسبت به زمان صرفه جويی شده در حل سيستم معادلات دارد.

حل سيستم معادلات خطي در فضاي تبديل يافته به كمک الگوريتم حل تكراري GMRES صورت گرفته است. با توجه به فرم تُنُک و شبه نواری ماتريسهای جديد، حل دستگاه معادلات جبري با حل كننده تكراري صرفه جويي قابل توجهي نسبت به زمان حل روش مستقيم حذف گاوس كه در روش استاندارد اجزای مرزی بكار گرفته مي شود، ايجاد مي كند.

با روش ارائه شده افزايش قابل ملاحظه اي در سرعت حل بدست آمده است، بدون اينكه به دقت حل مسأله لطمه وارد شود. نرخ فشرده سازي با پارامتر آستانه هاي مختلف آزمايش شده و در نهايت پارامتر آستانه مناسب براي مسائل الاستيسيته، با ملاحظات دقت كافی نتايج براي تنشها و تغييرمكانها، معرفي شده است.

از آنجا كه در اين مقاله تكنيک موجک به شكل يک جعبه سياه در برنامه روش اجزاي مرزي استاندارد اعمال شده است، نتايج اين كار انگيزه بسيار قوي براي استفاده از روش تركيبي موجک – اجزاي مرزي براي حل مسائل عملي مهندسي بخصوص در مسائل الاستو پلاستيسيته و ديناميكي كه نياز به زمان حل زيادي دارند، ايجاد مي كند.

جدول ۱: نُرم خطاي L^2 تغييرمكان و تنش های مثال ۱ با پارامتر آستانه های مختلف.

h	DISP.	STR.(XX)	STR.(YY)	STR.(XY)	STR.(ZZ)	VON-MISES
1.E-04	2.45E-04	1.51E-02	3.43E-04	1.06E-02	0.00E+00	2.23E-03
5.E-04	4.52E-03	7.22E-02	4.52E-03	3.18E-02	0.00E+00	8.67E-03
1.E-03	1.68E-02	1.89E-01	1.49E-02	9.11E-02	0.00E+00	2.24E-02

جدول ۲ : نُرم خطاي L^2 تغييرمكان و تنش های مثال ۲ با پارامتر آستانه های مختلف.

h	DISP.	STR.(XX)	STR.(YY)	STR.(XY)	STR.(ZZ)	VON-MISES
1.E-04	2.16E-03	2.92E-03	2.11E-03	2.70E-03	2.42E-03	2.18E-03
5.E-04	5.76E-03	1.29E-02	7.01E-03	9.44E-03	7.46E-03	7.48E-03
1.E-03	3.91E-02	4.94E-02	2.72E-02	3.75E-02	3.62E-02	2.72E-02

جدول ۳: نُرم خطاي L^2 تغييرمكان و تنش های مثال ۳ با پارامتر آستانه های مختلف.

h	DISP.	STR.(XX)	STR.(YY)	STR.(XY)	STR.(ZZ)	VON-MISES
1.E-04	5.90E-03	3.97E-02	1.31E-01	4.69E-02	0.00E+00	5.94E-02
5.E-04	9.81E-02	1.93E-01	6.63E-01	3.49E-01	0.00E+00	3.21E-01
1.E-03	2.68E-01	2.12E-01	7.12E-01	3.98E-01	0.00E+00	3.33E-01

جدول ۴ : تعداد المان های غیرصفر و نرخ فشرده سازی برای پارامتر آستانه های مختلف در مثالهای ۱ تا ۳.

Problem	DOF	NNZ			Compression Ratio		
		th=0.0001	th=0.0005	th=0.001	th=0.0001	th=0.0005	th=0.001
Example 1	128	13,200	10,395	9,111	1.24	1.58	1.80
	256	40,976	31,187	25,996	1.60	2.10	2.52
	512	128,723	90,581	70,152	2.04	2.89	3.74
	1024	413,309	253,594	172,154	2.54	4.13	6.09
Example 2	256	42,391	33,160	28,298	1.54	1.98	2.32
	512	134,037	100,126	76,704	1.96	2.62	3.42
	1024	457,527	300,799	180,426	2.29	3.48	5.81
Example 3	1024	631,876	426,476	320,185	1.66	2.46	3.27
	2048	1,903,013	1,120,267	772,211	2.20	3.74	5.43

جدول۵ : مقایسه زمان حل سیستم معادلات خطی و زمان حل کل (ثانیه) روش المان مرزی استاندارد و روش پیشنهادی.

Problem	DOF	Permuted Wavelet BEM		Standard BEM	
		Total Time	T_1	Total Time	T_1
Example 1	128	0.42	0.19	0.28	0.22
	256	1.93	1.31	1.83	1.61
	512	12.57	9.03	13.34	12.80
	1024	89.21	68.17	103.67	101.80
Example 2	256	1.97	1.34	1.88	1.66
	512	12.41	8.88	13.25	12.69
	1024	86.99	64.96	101.31	99.31
Example 3	1024	88.01	65.83	101.80	99.98
	2048	715.94	574.37	876.63	869.64

مراجع

1 - Hackbush, W. and Nowak, Z. P. (1989). *On the Fast Matrix Multiplication in the Boundary Element Method by Panel Clustering, Numer. Math.,* Vol. 54, PP. 463-491.

2 - Greengard, L. and Rokhlin, V. (1987). "A fast algorithm for particle simulations." *J. comp. phy.,* Vol. 73, PP. 325-348.

3 - Beylkin, G., Coifman, R. and Rokhlin, V. (1991). "Fast wavelet transforms and numerical algorithms I." *comm. Pure. Appl. Math.,* Vol. 44, PP. 141-183.

4 - Dahmen, W., Klemmann, B., Prossdorf, S. and Schneider, R. (1996). *Multiscale methods for the solution of the Helmholtz and Laplace equations, in Boundary Element Topics*, Wlfgang L.Wendland ed., Springer-Verlag.

5 - Lage, C. and Schwab, C. (1990). "Wavelet Galerkin algorithms for boundary integral equations." *SIAM J. Sci, Comp,* Vol. 20, PP. 195-222.

6 - Rokhlin, V. (1983). "Rapid solution of integral equations of classical potential theory." *J. Comp. Phys,* Vol. 60, PP. 187-207.

7 - Bucher, H. F., Wrobel, L. C., Mansur, W. J. and Magulta, C. (2004). "On the block wavelet transform applied to the boundary element method." *Engng. Anal. Bound. Elem,* Vol.28, PP. 571-581.

8 - Bucher, H. F., Wrobel, L. C., Mansur, W. J. and Magulta, C. (2003). "Fast solution of problems with multiple load cases by using wavelet compressed boundary element matrices." *Commun. Numer. Math. Engng.,* Vol.

19, PP. 387-399.

9 - Gonzalez, P., Cabalaeir, J. C. and Pena, T. F. (2002). "Parallel iterative solvers involving fast wavelet transforms for the solution of BEM systems." *Advanced in Engineering Softwares,* Vol. 33, PP. 417-426.

10 - Bucher, H. F. and Wrobel, L. C. (2002). "A novel Approach to applying fast wavelet transforms in the boundary element method." *Electronic Journal of Boundary Elements*, Vol. 2, PP. 187-195.

11 - Chen, K. (1999). "Discrete Wavelet Transforms accelerated sparse preconditioners for dense boundary element systems." *Electronic Transaction Numerical Analysis,* Vol. 8, PP. 138-153.

12 - Becker, A. A. (1991). *The Boundary Element Method in Engineering*, McGraw-Hill, London.

13 - Daubecies, I. (1992). *Ten Lectures on wavelets*, SIAM, Vol. 61.

14 - Koro, K. and Abe, K. (2003). "A practical determination strategy of optimal threshold parameter for matrix compression in wavelet BEM." *Int. J. Numer. Meth. Engng*, Vol. 57, PP.169-191.

15 - Saad, Y. and Schultz, M. H. (1986). "GMRES: a generalized minimal residual method for solving nonsymmetric linear systems*." SIAM.J. Sci. Statist. Comput.*, Vol. 7, PP. 856-869.

16 - Williams, J. R. and Amaratunga, K. (1994). "Introduction to the wavelets in the engineering." *International Journal for Numerical Methods in Engineering,* Vol. 37, PP.2365-2388.

17 - Amaratunga, K. (2000). "A wavelet based approach for compressing kernel data in large-scale simulations for 3D integral problems." *Computing in Science and Engineering*, Vol. 1, PP. 34-45.

18 - Barra, LPS, Coutinho, ALGA, Mansur, W. J. and Telles, JCR. (1994). "Iterative solution of BEM equations by GMRES." *Computers and Structures,* Vol. 111, PP. 335-355.

19 - Mansur, W. J., Araujo, F. C. and Malgnini, JEB. (1992). "Solution of BEM systems of equations via iterative techniques." *International Journal for Numerical Methods in Engineering,* Vol. 33, PP. 1823-1841.

20 - Bond, D. M. and Vavasis, S. A. (1994). "Fast wavelet transforms for matrices arising from boundary element methods." *Computer science research report, TR-174*, Cornell University.

21 - Ebrahimnejad, L. (2007). *Applying wavelets to improve the boundary element method,* Ph.D Dissertation, School of Civil Engineering, University of Tehran.

واژه هاي انگليسي به ترتيب استفاده در متن

1 - Fast Wavelet Transform
2 - Compressed Coordinate