

# مدلهای هیپوالاستیسیته و انتگرال پذیری آنها

بیژن عباسی خزایی<sup>۱\*</sup> و محمد حبیبی پارسا<sup>۲</sup>

<sup>۱</sup> استادیار گروه مهندسی مکانیک - دانشکده فنی مهندسی - دانشگاه رازی

<sup>۲</sup> دانشیار دانشکده مهندسی متالورژی و مواد - پردیس دانشکده های فنی - دانشگاه تهران

(تاریخ دریافت ۸۵/۱۲/۱۶، تاریخ دریافت روایت اصلاح شده ۸۶/۶/۲۸، تاریخ تصویب ۸۶/۱۱/۶)

## چکیده

در این مقاله انتگرال پذیری برخی مدلهای هیپوالاستیسیته شامل مدل لگاریتمی و مدلهای جامن، گرین-نقدی و مدلهای بر پایه اسپین حاصل از چرخش محورهای اولری و لاگرانژی و نیز مدلهای کاتر-ریولین و تروزدل با استفاده از تعیین مقدار انرژی باقیمانده در انتهای یک مسیر بسته تغییر شکل الاستیک سه بعدی به روش اجزاء محدود مورد بررسی قرار گرفته است. در این تحقیق همچنین برخی روشهای بهنگام کردن تنش برای مدلهای اولری نرخی مورد بررسی قرار گرفته و یک روش جدید برای مدلهای همگرد ارائه شده است. نتایج بدست آمده از بررسی انتگرال پذیری مدلهای هیپوالاستیسیته نشان می دهد که انرژی باقیمانده در انتهای مسیره های بسته برای مدل لگاریتمی از سایر مدلهای کمتر است. علاوه بر این نتایج بررسی روشهای بهنگام کردن تنش نشان می دهد که روش پیشنهاد شده در این تحقیق با سایر روشها قابل مقایسه است.

**واژه های کلیدی:** هیپوالاستیسیته - نرخ تنش لگاریتمی - اجزاء محدود - انرژی باقیمانده - بهنگام کردن تنش

## مقدمه

[۸] در یک سیکل بسته تغییر شکل منجر شود. عقیده بر این است که علت اصلی بروز این نتایج غیر فیزیکی، انتگرال ناپذیری این معادلات باشد. Lehman نشان داد که مشتق همگرد کرنش لگاریتمی تحت شرایطی می تواند برابر نرخ تغییر شکل شود [۹]. این یافته مهم که بعدها توسط Reinhardt و Dubey نیز تأیید گردید [۱۰] و [۱۱]، پایه های یک مدل هیپوالاستیسیته بنام مدل لگاریتمی را بنا نهاد. مطالعات منسجم و گسترده در این خصوص توسط Xio، Brühns، و Meyers انجام شده است [۱] و [۲۲]-[۱۲]. آنها نشان داده اند مدل لگاریتمی نقص مدلهای پیشین را نداشته و دارای مزایای بسیاری نسبت به سایر مدلهای هیپوالاستیسیته است. آنها نشان داده اند از میان تمامی مدلهای هیپوالاستیسیته ممکن، تنها مدل سازگار با تئوری الاستیسیته مدل لگاریتمی است. این مدل برخلاف سایر مدلهای ارائه شده، شرایط انتگرال پذیری برنشتن [۲۳] را احراز نموده و به عبارت دیگر انتگرال پذیر و با تئوری الاستیسیته و هایپرالاستیسیته سازگار است.

بررسی انتگرال پذیری سیستم معادلات دیفرانسیل جزئی غیرخطی با استفاده از بررسی شرایط انتگرال پذیری برنشتن حتی برای معادلات ساده، بسیار پیچیده است. یک راه ساده تر برای بررسی انتگرال پذیری مدلهای نرخی

در تحلیل تغییرشکلهای بزرگ اجسام، بدلیل تغییر پیوسته موقعیت جسم، لازم است معادله بنیادین مستقل از ناظر و یا به عبارتی آجکتیو<sup>۱</sup> باشد. معادله بنیادین می تواند نسبت به موقعیت تغییر شکل یافته و یا تغییر شکل نیافته به عنوان موقعیت مبنا بدست آید. چنانچه موقعیت تغییر شکل یافته به عنوان موقعیت مبنا برای استخراج معادله بنیادین انتخاب شود، استفاده از معادلات بنیادین هیپوالاستیسیته اولری الزامی است. مدل هیپوالاستیسیته در ابتدا با استفاده از نرخ جامن<sup>۲</sup> ارائه گردید و پس از آن سایر مدلهای بر اساس نرخهای متفاوتی از تنش ارائه شدند. کلیه نرخهای آجکتیو تنش را می توان در دو دسته کلی مدلهای همگرد<sup>۳</sup> نظیر مدل لگاریتمی، جامن، گرین-نقدی، و مدلهای غیر همگرد<sup>۴</sup> نظیر مدل تروزدل، کاتر-ریولین<sup>۵</sup> و اولدروید<sup>۶</sup> دسته بندی کرد [۱]. برای یک مدل همگرد بر خلاف مدل غیر همگرد، نگاشت یک متغیر تانسوری از موقعیت تغییر شکل نیافته به موقعیت تغییر شکل یافته، بگونه ای صورت می گیرد که سیستم مختصات فضا-زمان دچار اعوجاج نمی شود [۱].

همان طوری که برخی از محققین اشاره کرده اند، استفاده از مدلهای هیپوالاستیسیته ممکن است به برخی نتایج غیر فیزیکی نظیر پاسخ های نوسانی در مسئله برش ساده [۶-۲]، تنش های باقیمانده [۷] و یا انرژی باقیمانده

تعیین مقدار تنشهای باقیمانده در انتهای یک مسیر بسته تغییر شکل می باشد.

مقدار تنش های باقیمانده برای مسیرهای تغییرشکل دو بعدی توسط  $L_{in}$  برای برخی مدل های هیپوالاستیسیته بررسی شده است [۲۴] و [۲۵]. وی نشان داد که مدل لگاریتمی در مقایسه با سایر مدل ها، حداقل مقدار تنشهای باقیمانده را در انتهای یک مسیر بسته تغییرشکل دو بعدی ارائه می دهد. به نظر می رسد موضوع مقدار انرژی باقیمانده در انتهای یک مسیر بسته تغییرشکل در حالت سه بعدی و حتی دو بعدی تاکنون مورد بررسی قرار نگرفته است.

هدف اصلی از این تحقیق انتگرال پذیری مدل های هیپوالاستیسیته از طریق تعیین مقدار انرژی باقیمانده در انتهای یک مسیر بسته تغییرشکل در حالت سه بعدی است. علاوه بر این موضوع مهم دیگری که در این تحقیق بدان پرداخته می شود، بررسی روش های بهنگام کردن تنش کاوشی در تحلیل المان محدود تغییر شکلهای بزرگ است. برای این منظور یک برنامه اجزاء محدود برای نرخهای مورد مطالعه به زبان برنامه نویسی فرترن نوشته شده است.

## روابط سینماتیکی

در این بخش برخی روابط سینماتیکی که در ادامه مورد استفاده قرار خواهند گرفت مرور می شوند:

## گرادیان تغییرشکل، گرادیان سرعت، نرخ تغییرشکل

هنگامی که یک جسم تحت تغییرشکل قرار می گیرد، می توان به هر ذره از این جسم، یک بردار موقعیت  $\mathbf{X} = \phi(\mathbf{x}, t)$  نسبت به یک سیستم مختصات مبنا نسبت داد. سیستم مختصات مبنا می تواند موقعیت تغییرشکل نیافته، موقعیت تغییرشکل یافته و یا هر موقعیت دیگری باشد. بنابراین بردار سرعت ذره  $\mathbf{X}$  بصورت  $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{X}} = \frac{d\mathbf{x}}{dt}$  تعریف می گردد. جائیکه علامت  $\dot{(\quad)}$  و  $\frac{d}{dt}(\quad)$  برای مشخص نمودن مشتق زمانی نسبت به یک کمیت اسکالر و یا تانسوری است.

تغییر شکل موضعی یک ذره  $\mathbf{X}$  بوسیله تانسور گرادیان

تغییرشکل  $\mathbf{F}$  بصورت زیر تعریف می شود:

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}}; \det \mathbf{F} > 0 \quad (1)$$

نرخ تغییرات تغییرشکل ذره  $\mathbf{X}$  بوسیله گرادیان سرعت بصورت زیر تعریف می گردد:

$$\mathbf{L} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} = \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1} \quad (2)$$

بخش های متقارن و نامتقارن تانسور گرادیان سرعت  $\mathbf{L}$  به ترتیب، نرخ تغییر شکل  $\mathbf{D}$  و تانسور چرخش  $\mathbf{W}$  نامیده می شوند و عبارتند از:

$$\mathbf{D} = \frac{\mathbf{L} + \mathbf{L}^T}{2}, \mathbf{W} = \frac{\mathbf{L} - \mathbf{L}^T}{2} \quad (3)$$

## تانسورهای استرچ، کاوشی گرین، کرنش لگاریتمی و تجزیه طیفی آنها

با استفاده از تجزیه قطبی گرادیان تغییر شکل خواهیم داشت:

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{V}\mathbf{R} \quad (4)$$

در این جا  $\mathbf{R}$  تانسور دوران،  $\mathbf{U}$  تانسور استرچ راست و  $\mathbf{V}$  تانسور استرچ چپ هستند. کمیت های  $\mathbf{U}$  و  $\mathbf{V}$  بصورت زیر می توانند بدست بیایند:

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \mathbf{U}^2$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{F} \mathbf{F}^T = \mathbf{V}^2 \quad (5)$$

در این جا  $\mathbf{B}$  و  $\mathbf{C}$  به ترتیب تانسورهای کاوشی گرین چپ و راست هستند.

فرض کنید مقادیر ویژه تانسورهای  $\mathbf{V}$  و  $\mathbf{B}$  به ترتیب  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$  و  $\{\chi_1, \dots, \chi_n\}$  باشند، بطوریکه  $1 \leq n \leq 3$  تعداد مقادیر ویژه غیر یکسان را مشخص

می کند جایی که  $\chi_\alpha = \lambda_\alpha^2$  ( $\alpha = 1, \dots, n$ ) هرگاه  $\{\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_n\}$  تصاویر ویژه<sup>۷</sup> تانسور  $\mathbf{B}$  باشند، تجزیه طیفی آن بصورت زیر خواهد بود [۱۲]:

$$\mathbf{B} = \sum_{\alpha=1}^n \chi_\alpha \mathbf{B}_\alpha, \mathbf{B}_\alpha = n_\alpha \otimes n_\alpha \quad (6)$$

$n_\alpha$  بردار ویژه تانسور  $\mathbf{V}$  یا  $\mathbf{B}$  است. تانسور تصویر ویژه  $\mathbf{B}_\alpha$  دارای خواص زیر است:

## نرخهای آجکتیو<sup>۱</sup> تنش

نرخهای آجکتیو تنش در دو گروه اصلی نرخهای همگرد نظیر نرخ لگاریتمی، گرین-نقدی و جامن و نرخهای غیر همگرد نظیر نرخ اولدروید بالائی و پائینی، کاتر-ریولین و ... طبقه بندی می شوند. خانواده نرخهای آجکتیو تنش بصورت روابط زیر می توانند ارائه شوند [۱]:

$$\overset{\circ}{\sigma} = \overset{\circ}{\sigma} + \sigma \mathbf{W} - \mathbf{W} \sigma - m(\sigma \mathbf{D} + \mathbf{D} \sigma) \quad (13)$$

$$\overset{\circ}{\sigma} = \overset{\circ}{\sigma} + \sigma \mathbf{W} - \mathbf{W} \sigma - m(\sigma \mathbf{D} + \mathbf{D} \sigma) + (tr \mathbf{D}) \sigma \quad (14)$$

در روابط فوق  $m \in (-\infty, \infty)$  و  $\sigma$  تنش کاوشی

است. علامتهای  $(\overset{\circ}{\cdot})$ ,  $(\overset{\circ}{\cdot})$  به ترتیب برای نشان دادن مشتق زمانی آجکتیو در مختصات فضائی و مادی بکار می رود. می توان نشان داد به ازای هر  $m$  متعلق به اعداد حقیقی یک نرخ آجکتیو اولری حاصل می شود. به عنوان مثال به ازای  $m = -1$  و  $m = 1$  در رابطه (۱۴) نرخهای اولدروید پائینی و بالائی و به ازای  $m = 0$  و  $m = 0.5$  در رابطه (۱۳) نرخهای جامن و دوربان-باروخ<sup>۲</sup> بدست می آید.

یک رابطه عمومی دیگر برای نرخهای همگرد تنش بصورت زیر است:

$$\overset{\circ}{\sigma} = \overset{\circ}{\sigma} + \sigma \mathbf{\Omega} - \mathbf{\Omega} \sigma \quad (15)$$

در این جا  $\mathbf{\Omega}$  تانسور اسپین بوده و به صورت زیر به دست می آید:

$$\mathbf{\Omega} = \mathbf{W} + \mathbf{N} \quad (16)$$

$$\mathbf{N} = 0 \quad \text{if} \quad \chi_1 = \chi_2 = \chi_3$$

$$\mathbf{N} = \nu [\mathbf{BD}] \quad \text{if} \quad \chi_1 \neq \chi_2 = \chi_3$$

$$\mathbf{N} = \nu_1 [\mathbf{BD} - \mathbf{DB}] + \nu_2 [\mathbf{B}^2 \mathbf{D}] + \nu_3 [\mathbf{B}^2 \mathbf{DB}]$$

$$\text{if} \quad \chi_1 \neq \chi_2 = \chi_3 \neq \chi_1$$

(۱۷)

$$[\mathbf{B}^r \mathbf{D}^s] = \mathbf{B}^r \mathbf{DB}^s - \mathbf{B}^s \mathbf{DB}^r$$

در این جا  $r, s = 0, 1, 2$  هستند. ضرایب  $\nu_1, \nu_2, \nu_3$  بطوری که نیز بوسیله رابطه زیر بدست می آید:

$$\mathbf{B}_\alpha \cdot \mathbf{B}_\beta = \delta_{\alpha\beta} \mathbf{B}_\alpha, \quad \sum_{\alpha=1}^n \mathbf{B}_\alpha = \mathbf{I} \quad (7)$$

در این رابطه عملگر جمع  $\sum$  روی اندیسهای تکراری انجام نمی شود.  $\mathbf{I}$  تانسور واحد از مرتبه دوم است. با استفاده از رابطه (۷)، رابطه سیلوستر بصورت زیر بدست می آید:

$$\mathbf{B}_\alpha = \delta_{in} + \prod_{\beta=1, \beta \neq \alpha}^n \frac{\mathbf{B} - \chi_\beta \mathbf{I}}{\chi_\alpha - \chi_\beta} \quad (8)$$

با استفاده از تانسورهای تصاویر ویژه، دسته بندی عمومی کرنشهای اولری که توسط هیل ارائه شده است را مجدداً بصورت زیر تعریف می کنیم [۱۲]:

$$\mathbf{e} \equiv f(\mathbf{B}) = \sum_{\alpha=1}^n f(\chi_\alpha) \mathbf{B}_\alpha \quad (9)$$

تابع  $f$  همواره مثبت، افزایشی و دارای خواص زیر است:

$$f: R^+ \rightarrow R$$

$$f(1) = f'(1) - \frac{1}{2} = 0$$

با انتخاب تابع  $f$  کمیت های مختلف کرنش اولری قابل

دستیابی است. در حالت خاص برای  $f(x) = \frac{1}{2} \ln x$ ،

کرنش لگاریتمی بصورت زیر بدست می آید:

$$\mathbf{h} = \frac{1}{2} \ln \mathbf{B} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^n (\ln \chi_\alpha) \mathbf{B}_\alpha \quad (10)$$

مقادیر ویژه تانسور  $\mathbf{B}$  بصورت زیر بدست می آیند:

$$\chi_\alpha = \frac{1}{2} \{ I + 2\sqrt{I^2 - III} \cos \frac{1}{3}(\theta - 2\pi i) \}$$

$$\theta = \arccos \left\{ \frac{2I^3 - 9I \cdot III + 27III}{2(I^2 - III)^{3/2}} \right\};$$

$$i = 1, 2, 3$$

(۱۱)

$I$  و  $II$  و  $III$  نامتغیرهای تانسور  $\mathbf{B}$  هستند و عبارتند از:

$$I = tr \mathbf{B};$$

$$II = \frac{1}{2} ((tr \mathbf{B})^2 - tr \mathbf{B}^2);$$

$$III = \det \mathbf{B} = \frac{1}{6} (tr \mathbf{B})^3 - \frac{1}{2} (tr \mathbf{B})(tr \mathbf{B}^2) + \frac{1}{3} tr \mathbf{B}^3$$

(۱۲)

$$\begin{aligned} \sigma_{t+\Delta t} &= \mathbf{Q}_{t+\Delta t} \mathbf{Q}_t^T \sigma_t \mathbf{Q}_t \mathbf{Q}_{t+\Delta t}^T \\ &+ [\mathbf{Q}_{t+\Delta t} \mathbf{Q}_{t+\frac{\Delta t}{2}}^T (\mathbf{C} : \mathbf{D}_{t+\frac{\Delta t}{2}}) \mathbf{Q}_{t+\frac{\Delta t}{2}} \mathbf{Q}_{t+\Delta t}^T] \Delta t \end{aligned} \quad (22)$$

### الگوریتم ۱

با استفاده از تخمین  $\mathbf{Q}_{t+\Delta t} \mathbf{Q}_{t+\frac{\Delta t}{2}}^T \approx \mathbf{Q}_{t+\frac{\Delta t}{2}} \mathbf{Q}_{t+\Delta t}^T \approx \mathbf{I}$  و نیز اعمال شرط مرزی  $\mathbf{Q}_t = \mathbf{I}$  برای روش لاگرانژی بهنگام شده، خواهیم داشت:

$$\sigma_{t+\Delta t} = \mathbf{Q}_{t+\Delta t} \sigma_t \mathbf{Q}_{t+\Delta t}^T + (\mathbf{C} : \mathbf{D}_{t+\frac{\Delta t}{2}}) \Delta t \quad (23)$$

رابطه انتگرالگیری (۲۳) توسط هیوز- وینجت ارائه شده است [۲۶] و بطور وسیعی در برنامه های اجزاء محدود بکار می رود.

### الگوریتم ۲

چنان چه دورانها تا نقطه میانی بسیار کوچک فرض شوند بطوری که بتوان از تخمین  $\mathbf{Q}_{t+\frac{\Delta t}{2}}^T \approx \mathbf{I}$  و  $\mathbf{D}_{t+\frac{\Delta t}{2}} \approx \mathbf{D}_{t+\Delta t}$  استفاده کرد، و با استفاده از شرط مرزی  $\mathbf{Q}_t = \mathbf{I}$  رابطه (۲۲) بصورت زیر در خواهد آمد:

$$\sigma_{t+\Delta t} = \mathbf{Q}_{t+\Delta t} [\sigma_t + (\mathbf{C} : \mathbf{D}_{t+\Delta t}) \Delta t] \mathbf{Q}_{t+\Delta t}^T \quad (24)$$

### الگوریتم ۳

هرگاه در محدوده  $[t, t + \Delta t]$ ، نمو دورانها بقدر کافی کوچک باشند برای لحظه  $\frac{t+\Delta t}{2}$  می توان نوشت [۲۷]:

$$\mathbf{Q}_{t+\frac{\Delta t}{2}} = \frac{\mathbf{Q}_t + \mathbf{Q}_{t+\Delta t}}{2}, \mathbf{Q}_t = \mathbf{I} \quad (25)$$

$$\mathbf{Q}_{t+\frac{\Delta t}{2}}^T = \frac{\mathbf{I} + \mathbf{Q}_{t+\Delta t}^T}{2}, \mathbf{Q}_{t+\frac{\Delta t}{2}}^T = \frac{\mathbf{I} + \mathbf{Q}_{t+\Delta t}^T}{2} \quad (26)$$

با جایگزین کردن رابطه (۲۵) و (۲۶) در رابطه (۲۲)، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \sigma_{t+\Delta t} &= \mathbf{Q}_{t+\Delta t} \sigma_t \mathbf{Q}_{t+\Delta t}^T + \left[ \mathbf{Q}_{t+\Delta t} \left( \frac{\mathbf{I} + \mathbf{Q}_{t+\Delta t}^T}{2} \right) \right. \\ &\left. (\mathbf{C} : \mathbf{D}_{t+\frac{\Delta t}{2}}) \left( \frac{\mathbf{I} + \mathbf{Q}_{t+\Delta t}}{2} \right) \mathbf{Q}_{t+\Delta t}^T \right] \Delta t \end{aligned} \quad (27)$$

با توجه به روابط ۲۵ و ۲۶ و ۲۷ یک رابطه نسبتاً ساده بصورت زیر پیشنهاد می گردد:

$$\begin{aligned} v_k &= -\frac{(-1)^k}{\Delta} [\chi_1^{3-k} \varepsilon_{23} \\ &+ \chi_2^{3-k} \varepsilon_{31} + \chi_3^{3-k} \varepsilon_{12}] \\ \Delta &= (\chi_1 - \chi_2)(\chi_2 - \chi_3)(\chi_3 - \chi_1) \\ \varepsilon_{12} &= h \left( \frac{\chi_1}{\chi_2} \right), \varepsilon_{31} = h \left( \frac{\chi_3}{\chi_1} \right), \varepsilon_{23} = h \left( \frac{\chi_2}{\chi_3} \right) \end{aligned} \quad (18)$$

در رابطه فوق  $\chi_i$  مقادیر ویژه تانسور  $\mathbf{B}$  هستند. مقدار تابع  $h(y)$  برای نرخهای جامن، گرین-نقدی، لگاریتمی و نرخهای بر پایه اسپین حاصل از چرخش محورهای اولری و لاگرانژی به ترتیب برابر  $0, \frac{2\sqrt{y}}{1+y}, \frac{1-y}{1+y}, \frac{1+y}{1-y}, \frac{2}{\ln y}, \frac{1-\sqrt{y}}{1+\sqrt{y}}$  می باشد. به ازاء هر یک از مقادیر فوق در رابطه (۱۸)، کمیت  $\mathbf{N}$  در نتیجه  $\Omega$  برای مدلهای مختلف بدست می آید.

### روشهای بهنگام کردن تنش

در این بخش روابط بهنگام کردن تنش کاوشی (کریشهف) برای برخی الگوریتمها استخراج شده و یک رابطه جدید نیز پیشنهاد شده است. با توجه به تعریف مشتق فضائی تنش کاوشی می توان نشان داد [۱۵ و ۱]:

$$\overline{\mathbf{Q}^T \sigma \mathbf{Q}} = \mathbf{Q}^T \overset{\circ}{\sigma} \mathbf{Q} \quad (19)$$

در اینجا  $\mathbf{Q}$  تانسور دوران اورتوگونال حاصل از اسپین  $\Omega$  است به طوری که  $\Omega = \dot{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}^{-1}$ . با انتگرالگیری از رابطه (۱۹) در محدوده  $[t, t + \Delta t]$  و استفاده از رابطه  $\overset{\circ}{\sigma} = \mathbf{C} : \mathbf{D}$  خواهیم داشت:

$$\int_t^{t+\Delta t} \overline{\mathbf{Q}^T \sigma \mathbf{Q}} dt = \int_t^{t+\Delta t} \mathbf{Q}^T (\mathbf{C} : \mathbf{D}) \mathbf{Q} dt \quad (20)$$

پس از انتگرالگیری از معادله (۲۰) و استفاده از قاعده نقطه میانی برای سمت راست معادله داریم:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{t+\Delta t}^T \sigma_{t+\Delta t} \mathbf{Q}_{t+\Delta t} - \mathbf{Q}_{t+\Delta t} \mathbf{Q}_t^T \sigma_t \mathbf{Q}_t \mathbf{Q}_{t+\Delta t}^T &= \\ [\mathbf{Q}_{t+\frac{\Delta t}{2}}^T (\mathbf{C} : \mathbf{D}_{t+\frac{\Delta t}{2}}) \mathbf{Q}_{t+\frac{\Delta t}{2}}] \Delta t \end{aligned} \quad (21)$$

با ضرب نمودن سمت چپ و راست اجزائی معادله فوق در  $\mathbf{Q}_{t+\Delta t}$  و  $\mathbf{Q}_{t+\Delta t}^T$  و استفاده از فرض  $\mathbf{Q}_{t+\Delta t} \mathbf{Q}_{t+\Delta t}^T = \mathbf{I}$  خواهیم داشت:

با ماتریس سختی لحظه ای و روش انتگرالگیری ضمنی مورد استفاده قرار گرفت. در این تحقیق از یک المان مکعبی ۲۰ گرهی با ۲۷ نقطه گوسی استفاده شده است.

اولین مثال عددی در این بخش برای بررسی عملکرد برنامه اجزاء محدود و نیز مطالعه دقت روشهای بهنگام کردن تنش طراحی شده است. در مثالهای بعدی مقدار انرژی باقیمانده در انتهای مسیرهای طراحی شده برای تغییرشکلهای سه بعدی برای مدل‌های مختلف هیپوالاستیسیته محاسبه و مقایسه شده اند.

### مثال ۱: مسئله برش ساده

مسئله برش ساده بطور وسیعی برای بررسی مدل‌های نرخی در حالت تغییر شکلهای بزرگ مورد استفاده قرار می گیرد [۳۰، ۲۹، ۲۸، ۲۵، ۱۳، ۸، ۳] از آنجا که حل تحلیلی مسئله برش ساده برای تعدادی از نرخ‌های مشهور نظیر: لگاریتمی، گرین نقدی و جامن در دسترس است [۲۵]، بنابراین با حل مسئله برش ساده برای هریک از نرخهای مذکور و مقایسه نتایج عددی و تحلیلی می توان نسبت به دقت نتایج المان محدود و نیز روشهای بهنگام کردن تنش قضاوت نمود.

در شکل (۱) حالت تغییر شکل یافته و تغییر شکل نیافته جسم پیوسته برای مسئله برش ساده در حالت تغییر شکل بزرگ نشان داده شده است. نتایج تحلیلی و اجزاء محدود برای نمو کرنش ۰/۰۱ در شکل (۲) نشان داده شده است. نتایج تحلیلی بصورت علامتهای بزرگ و نتایج اجزاء محدود بصورت علامتهای کوچک نشان داده شده اند. در اینجا مولفه های تنش بصورت نرمال شده  $\frac{\tau}{\mu}$  نمایش داده شده است. در اینجا  $\tau$  تنش کریشهف و  $\mu$  مدول برشی است. بطوری که  $\tau = J\sigma$  و  $J = \det F$ . همانطوری که دیده می شود برای نمو کرنش ۰/۰۱ نتایج تحلیلی کاملاً بر نتایج اجزاء محدود منطبق هستند.

چند نکته قابل توجه در شکل (۲) وجود دارد اینک: اولاً پاسخ بدست آمده برای نرخ جامن نوسانی است، دوماً پاسخ مدل ها بر پایه اسپین حاصل از چرخش محورهای اولری و لاگرانژی مشابه هستند، سوماً مولفه برشی تنش در مدل‌های تروزدل و کاتر-ریولین بر هم منطبقند.

$$\sigma_{t+\Delta t} = \mathbf{Q}_{t+\Delta t} \sigma_t \mathbf{Q}_{t+\Delta t}^T + \frac{1}{4} [(\mathbf{Q}_{t+\Delta t} + \mathbf{I})(\mathbb{C} : \mathbf{D}_{t+\frac{\Delta t}{2}})(\mathbf{Q}_{t+\Delta t}^T + \mathbf{I})] \Delta t \quad (28)$$

### الگوریتم ۴

یک روش انتگرالگیری که اخیراً توسط Zhou و Tamma برای مدل های همگرد ارائه شده بصورت زیر است [۲۸]:

$$\sigma_{t+1} = \mathbf{T}[\Omega; \sigma_t; t, t+1] + \mathbf{T}[\Omega; \mathbb{C} : \Delta \mathbf{D}; \frac{\Delta t}{2}, t+1], \quad (29)$$

در اینجا  $\mathbf{T}$  یک عملگر همگرد است که تنش کاوشی را از موقعیت  $t$  به موقعیت  $t+1$  می نگارد. نگاشت  $\mathbf{T}$  بصورت زیر تعریف شده است:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}[\Omega; \sigma; t, t+1] &= \sigma + \frac{1}{\Upsilon} \sin(\Upsilon \Delta t) [\Omega \sigma] \\ &\quad - \frac{1}{\Upsilon^2} \sin^2(\Upsilon \Delta t) \Omega \sigma \Omega \\ &\quad + \frac{1}{\Upsilon^2} (1 - \cos(\Upsilon \Delta t)) [\Omega^2 \sigma] \\ &\quad + \frac{1}{2\Upsilon^3} (2 \sin(\Upsilon \Delta t) - \sin(2\Upsilon \Delta t)) [\Omega \sigma \Omega^2] \\ &\quad + \frac{1}{2\Upsilon^4} (3 + \cos(2\Upsilon \Delta t) - 4 \cos(\Upsilon \Delta t)) \Omega^2 \sigma \Omega^2 \end{aligned} \quad (30)$$

جائی که برای  $r, s = 0, 1, 2$  داریم

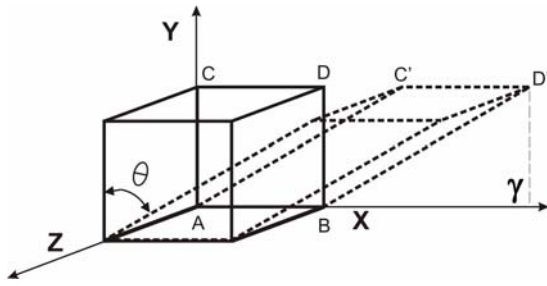
$$[\Omega^r \sigma^s] = \Omega^r \sigma^s - \sigma^s \Omega^r \quad (31)$$

$$\Upsilon = \sqrt{\Omega_{12}^2 + \Omega_{13}^2 + \Omega_{23}^2}$$

بطوری که

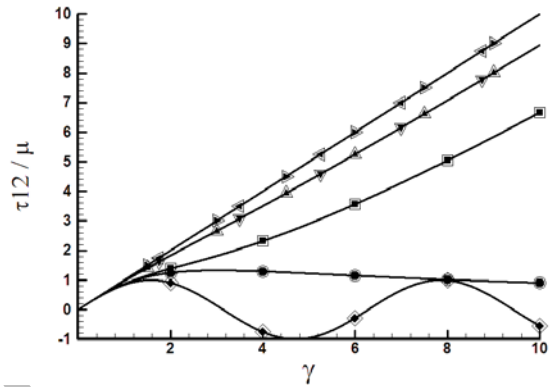
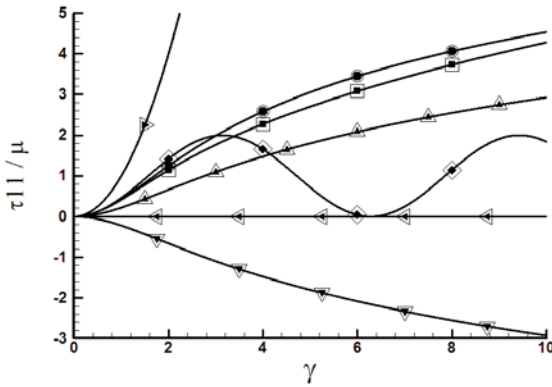
### نتایج عددی و بحث

با توجه به اینکه حل تحلیلی معادلات دیفرانسیل ناشی از مدل‌های نرخی بجز در حالات بسیار محدودی غیر ممکن به نظر می رسد، لذا برای حل معادلات مربوطه در این تحقیق، یک برنامه اجزاء محدود لاگرانژی بهنگام شده برای تغییر شکلهای بزرگ به زبان فرترن نوشته شد. برای حل معادلات غیر خطی روش نیوتن اصلاح شده

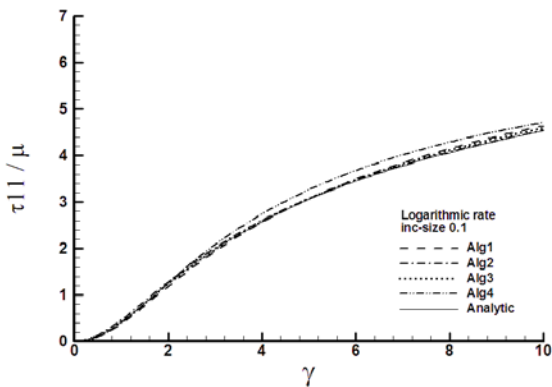
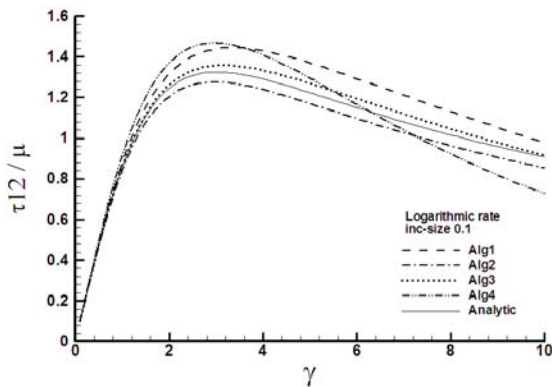


شکل ۱: مسئله برش ساده.

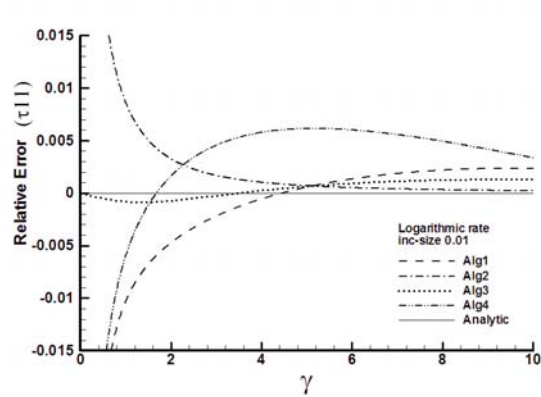
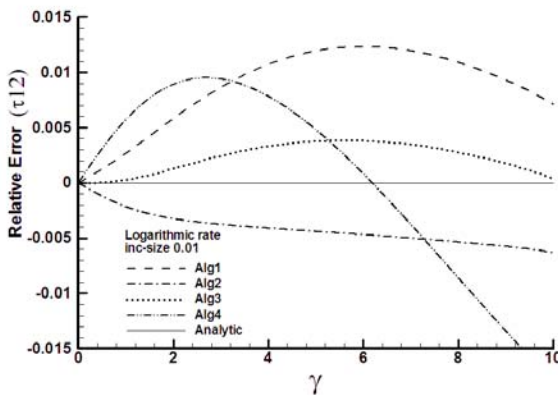
- Logarithmic
- ◇ Green-Naghdi
- △ Eulerian-Triad
- Jaumann
- ▽ Lagrangian-Triad
- ▽ Truesdell
- ▽ Cotter-Rivlin



شکل ۲: نتایج تحلیلی و اجزاء محدود حل مسئله برش ساده برای نرخهای مختلف و نمو کرنش ۰/۱.

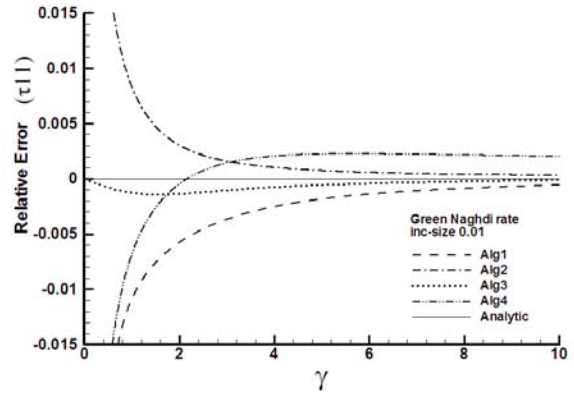
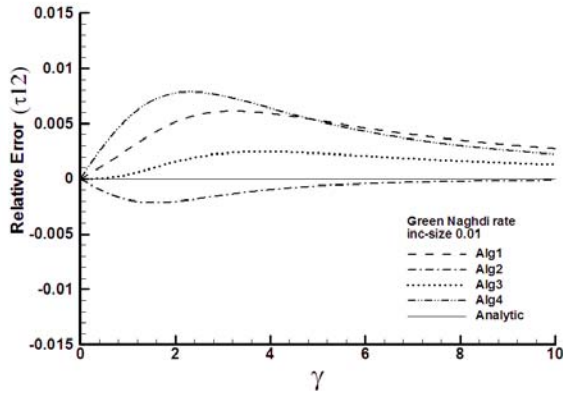


شکل ۳: نتایج روشهای مختلف بهنگام کردن تنش در مسئله برش ساده برای نرخ لگاریتمی و نمو کرنش ۰/۱.



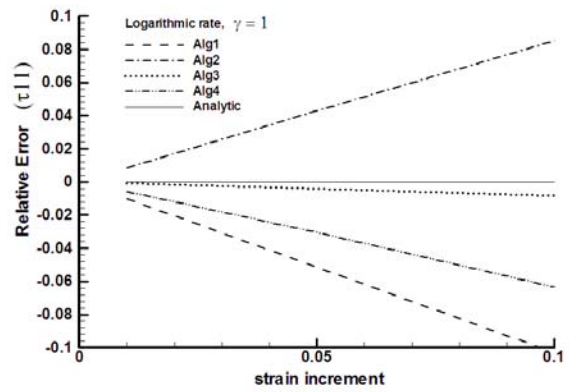
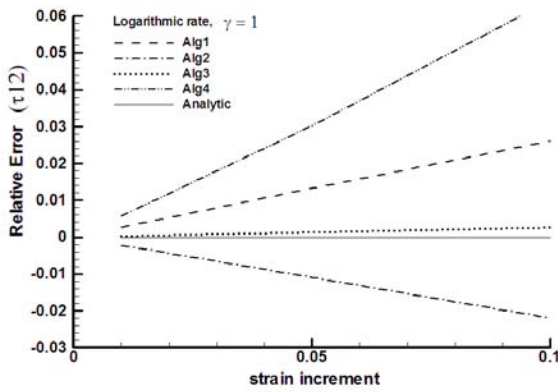
#### الف - نرخ لگاریتمی

شکل ۴: مقدار خطای نسبی انتگرالگیری برای نرخهای الف (لگاریتمی، ب) گرین نقدی.



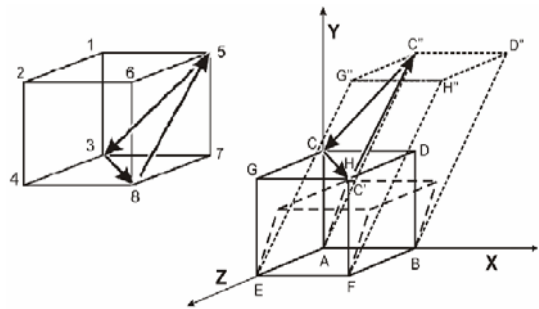
ب- نرخ گرین نقدی

ادامه شکل ۴: مقدار خطای نسبی انتگرالگیری برای نرخهای الف) لگاریتمی، ب) گرین نقدی.

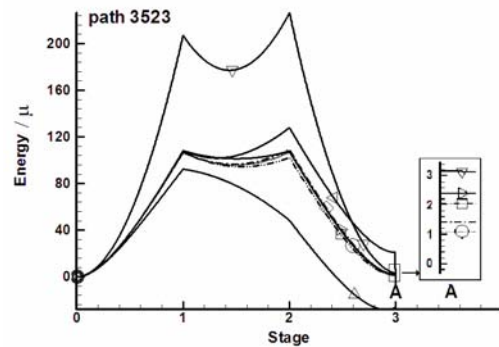
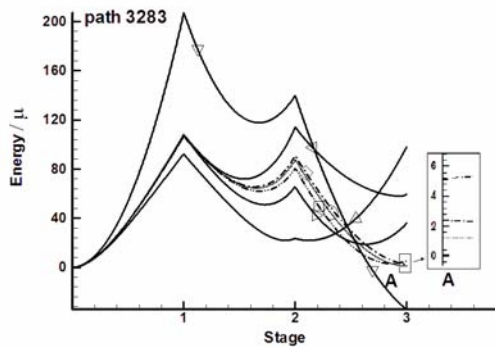


شکل ۵: تغییرات خطای انتگرالگیری با افزایش نمو کرنش.

- Logarithmic
- Green-Naghdi
- Eulerian-Triad
- Jaumann
- Lagrangian-Triad
- Truesdell
- Cotter-Rivlin

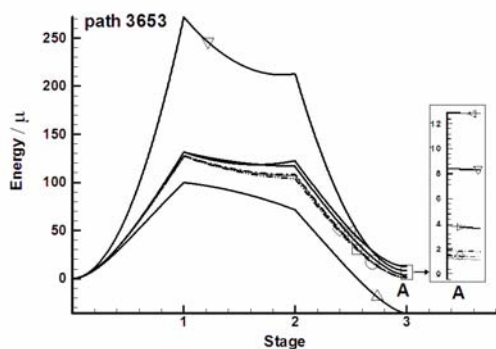


شکل ۶: مسیرهای بسته تغییر شکل (C'C''C) و ۳۸۵۳.

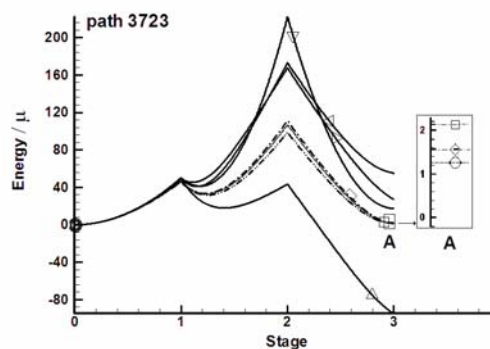


ج

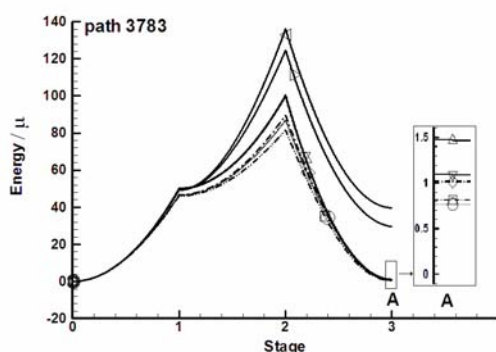
الف



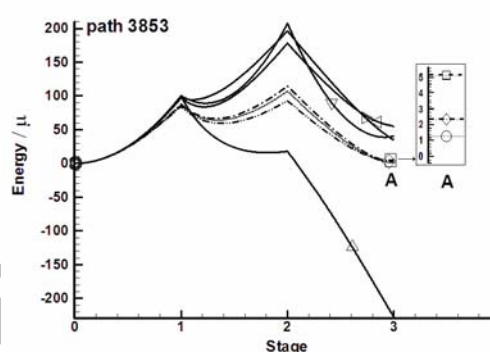
ت



پ



د



ج

شکل ۷: تغییرات انرژی طی تغییر شکل المان مکعبی شکل (۶) مطابق مسیرهای مختلف تغییر شکل.

مورد انتظار می توان مناسبترین اندازه نمو کرنش را انتخاب نمود.

شکل (۵) نشان می دهد که الگوریتم پیشنهاد شده حداقل حساسیت را نسبت به اندازه نمو کرنش دارد. به عبارت دیگر برای الگوریتم پیشنهاد شده می توان از اندازه نمو کرنش بزرگتر استفاده نمود. این موضوع موجب کاهش هزینه های محاسباتی می شود.

یک نکته با اهمیت از نظر عملی، زمان مورد نیاز برای بهنگام کردن تنش (زمان محاسبات بوسیله کامپیوتر) است. اگر زمان حل یک مسئله مشخص مانند برش ساده به وسیله کامپیوتر برای ساده ترین روش انتگرالگیری یعنی الگوریتم ۱ را ۱۰۰ فرض کنیم، این زمان برای الگوریتم ها ۲،۳ و ۴ به ترتیب برابر ۱۰۱/۸، ۱۰۱/۹ و ۱۶۷/۳ بدست می آید. دیده می شود که زمان لازم برای انتگرال گیری برای الگوریتم پیشنهادی تنها ۱/۹ درصد بیش از الگوریتم ۱ است در حالی که این مقدار برای الگوریتم ۴، برابر ۶۷/۳ درصد است.

شکل (۳) دقت روشهای مختلف بهنگام کردن تنش را برای اندازه نمو کرنش ۰/۱ برای نرخ لگاریتمی نشان می دهد. مقایسه شکلهای (۲) و (۳) نشان می دهد که با بزرگ شدن اندازه نمو کرنش، انطباق نتایج عددی و تحلیلی کاهش می یابد. به منظور مقایسه بهتر نتایج بدست آمده از روش های مختلف بهنگام کردن تنش، کمیت خطای نسبی انتگرال گیری به صورت نسبت اختلاف نتایج تحلیلی و اجزاء محدود بر نتایج تحلیلی تعریف شده است. شکل (۴) مقدار خطای نسبی روشهای مختلف بهنگام کردن تنش را برای نمو های کرنش ۰/۱ و برای نرخهای لگاریتمی و گرین نقدی نشان می دهد. همان طوری که از این شکل ها پیداست در محدوده کرنش  $2 \leq \gamma$ ، الگوریتم پیشنهاد شده برای این نرخ ها حداقل خطای نسبی (قدر مطلق) را ارائه می دهد.

اثر اندازه نمو کرنش بر خطای انتگرال گیری برای نرخ لگاریتمی در شکل (۵) نشان داده شده است. همان طوری که دیده می شود با افزایش نمو کرنش، خطای نسبی بطور خطی افزایش می یابد. این موضوع از نقطه نظر عملی می تواند مفید باشد. به طوری که بر اساس مقدار خطای



می پذیرند. علامت پیکان، مسیر حرکت مربع CDHG را نشان می دهد.

همان طوری که پیداست، بینهایت مسیر بسته تغییر شکل می توان یافت که از نقطه ۳ شروع و به همان نقطه ختم شود. در این تحقیق مسیرهای بسته ۳۲۸۳، ۳۷۲۳، ۳۵۲۳، ۳۷۸۳، ۳۶۵۳ و ۳۸۵۳ مورد بررسی قرار گرفته اند. نمودار تغییرات انرژی تغییر شکل (بر مدول برشی تقسیم شده است) بر حسب زمان برای مدل‌های مختلف هیپوالاستیسیته و مسیرهای بسته مورد تحقیق در شکل (۷) آورده شده است. نتایج بدست آمده برای کلیه مسیرهای بسته نشان می دهد که انرژی باقیمانده در انتهای مسیر برای مدل لگاریتمی از سایر مدل‌ها کمتر است. پس از آن مدل‌های گرین نقدی و جامن کمترین مقدار انرژی باقیمانده (و در حقیقت خطا) را ارائه می دهند. در حالی که بیشترین مقدار انرژی باقیمانده، مربوط به مدل‌هایی بر پایه اسپین حاصل از چرخش محورهای اولری و لاگرانژی و نیز مدل‌های کاتر-ریولین و تروزدل می باشد.

### نتیجه گیری

نتایج مهم بدست آمده از این تحقیق عبارتند از الگوریتم پیشنهاد شده (الگوریتم ۳) برای بهنگام کردن تنش، حداقل انحراف را از نتایج تحلیلی در مسئله برش ساده بدست می دهد.

- رشد خطا با افزایش نمو کرنش برای الگوریتم پیشنهاد شده کمتر از سایر الگوریتم‌ها است.
- الگوریتم ۴ بیشترین زمان لازم را برای انتگرال گیری به خود اختصاص داده در حالی که الگوریتم پیشنهاد شده زمان کمتری را به خود اختصاص می دهد.
- مقدار انرژی باقیمانده در انتهای مسیرهای بسته تغییر شکل مورد مطالعه برای مدل لگاریتمی از سایر مدل‌های هیپوالاستیسیته شامل مدل جامن، گرین-نقدی، مدل‌هایی بر پایه اسپین حاصل از چرخش محورهای اولری و لاگرانژی و نیز مدل‌های کاتر-ریولین و تروزدل، کمتر است

### تقدیر و تشکر

نویسنده اول این مقاله بر خود لازم می داند از معاونت محترم پژوهشی دانشگاه رازی بخاطر حمایت از این تحقیق تشکر و قدر دانی نماید.

## مثال ۲: محاسبه انرژی باقیمانده در انتهای مسیرهای بسته تغییر شکل در حالت سه بعدی

براساس تئوری الاستیسیته تانسور تنش در محدوده تغییر شکل الاستیک تابع حالت است و نه مسیر. به عبارت دیگر هرگاه در یک مسیر بسته تغییر شکل، مقدار تنشها و نیز انرژی نهفته همراه آن در ابتدای مسیر صفر باشد، مقدار آن در انتهای مسیر بسته نیز صفر خواهد بود. تحت این شرایط سیستم معادلات دیفرانسیل هیپوالاستیسیته انتگرال پذیر بوده و با انتگرالگیری از آن، رابطه الاستیسیته بدست می آید. در این بخش برای بررسی انتگرال پذیری مدل‌های مختلف هیپوالاستیسیته، مقدار انرژی در انتهای سیکل‌های بسته تغییر شکل محاسبه شده است. مثال‌های ارائه شده در این بخش از سه جهت قابل توجه هستند: اولاً اینکه به نظر می رسد تا کنون این موضوع در حالت سه بعدی بررسی نشده است، ثانیاً بررسی انجام شده در اینجا برخلاف روش محققین پیشین که بر پایه تنش‌های باقیمانده استوار بوده، بر انرژی باقیمانده استوار است. ثالثاً مسیرهای مختلفی در این تحقیق برای اولین بار پیشنهاد و مورد بررسی قرار گرفته است.

شکل (۶) المان مکعبی قبل و بعد از تغییر شکل را نشان می دهد. در اینجا یک مسیر بسته تغییر شکل بدینصورت تعریف شده است که موقعیت گره‌های ABEF قبل و بعد از تغییر شکل همواره ثابت بوده و گره C مسیر بسته  $C \rightarrow C' \rightarrow C'' \rightarrow C$  را طوری طی می کند که چهارگوش CDHG همواره به شکل مربع و موازی صفحه XZ باقی می ماند. به عبارت دیگر مربع CDHG به مربع C'D'H'G' و بعد به مربع C''D''H''G'' منتقل شده و سپس به نقطه آغازین خود باز می گردد. مسیر حرکت مربع CDHG به طور شماتیک در سمت چپ شکل (۷) نشان داده شده است. به طوری که مربع مذکور به طور صلب از نقطه ۳ به ۸ و سپس به نقطه ۵ و نهایتاً به مبدا خود باز می گردد. در این تحقیق مسیر بسته مذکور را با عدد ۳۸۵۳ نامگذاری می کنیم، به طوری که مسیر تغییر شکل از گره ۳ آغاز و بعد به ترتیب به موقعیت‌های ۸ و ۵ رفته و سپس به موقعیت ۳ باز می گردد. در اینجا تمام مسیرهای تغییر شکل در موقعیت ۳ شروع و پایان

- 1- Xiao, H., Bruhns, O. T. and Meyers, A. (2006). "Elastoplasticity beyond small deformation: Basic variables, essential structures, and constitutive and computational implication." *Acta Mechanica*, No. 182, PP. 31-111.
- 2 - Dienes, J. K. (1979). "On the analysis of rotation and stress rate in deforming bodies." *Acta Mechanica*, No. 32, PP. 217-232.
- 3 - Pinsky, P. M., Ortiz, M. and Pister, K. S. (1983). "Numerical integration of rate constitutive equations in finite deformation analysis." *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, No. 40, PP. 137-158.
- 4 - Simo, J. C. and Pister, K. S. (1984). "Remarks on rate constitutive equations for finite deformation problem, Computational implications." *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, No. 46, PP. 201-215
- 5 - Atluri, J. K. (1984). "On constitutive equations at finite strain: Hypoelasticity and elasto-plasticity with isotropic or kinematic hardening." *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, No. 43, PP. 137-171.
- 6 - Szabo, L., Balla, M. (1989). "Comparison of some stress rates." *International Journal of Solid and Structures*, No. 25, PP. 279-297.
- 7 - Kojic, M. and Bathe, K. J. (1987). "Studies of finite element procedures - stress solution of a closed elastic strain path with stretching and shearing using updated Lagrangean - Jaumann formulation." *Journal of Computers and Structures*, No. 26, PP. 175-179.
- 8 - Truesdell, C. and Noll, W. (1965). "The nonlinear field theories of mechanics." *Handbuch der Physik*, volume III/3. Springer, Berlin, PP.447-441.
- 9 - Lehmann, T., Guo, Z. and Liang, H. (1991). "The conjugacy between Cauchy stress and logarithm of the left stretch tensor." *European Journal of Mechanics- A/solids*, No. 10, PP. 395-404.
- 10 - Reinhardt, W. D. and Dubey, R. N. (1995). "Eulerian strain-rate as a rate of logarithmic strain." *Mechanics Research Communications*, No. 22, PP. 165-170.
- 11 - Reinhardt, W. D. and Dubey, R. N. (1996). "Coordinate-independent representation of spin tensors in continuum mechanics." *Journal of Elasticity*, No. 42, PP. 133-144.
- 12 - Xiao, H. (1995). "Unified explicit basis-free expressions for time rate and conjugate stress of an arbitrary Hill's strain." *International Journal of Solid and Structures*, No. 32, PP. 3327-3347.
- 13 - Xiao, H., Bruhns, O. T. and Meyers, A. (1997). "Logarithmic strain, logarithmic spin and logarithmic rate." *Acta Mechanica*, No. 124, PP. 89-105.
- 14 - Xiao, H., Bruhns, O. T. and Meyers, A. (1997). "Hypo-elasticity model based upon the logarithmic stress rate." *Journal of Elasticity*, No. 47, PP. 51-68.
- 15 - Xiao, H., Bruhns, O. T. and Meyers, A. (1998). "Strain rates and material spins." **Journal of Elasticity**, No. 52, PP.1-42.
- 16 - Xiao, H., Bruhns, O. T. and Meyers, A. (1995). "On objective corotational rates and their defining spin tensors." *International Journal of Solid and Structures*, No. 35, PP. 4001-4014.

- 17 - Xiao, H., Bruhns, O. T. and Meyers, A. (1998). "Direct relationship between the Lagrangean logarithmic strain and the Lagrangean stretching and the Lagrangean Kirchhoff stress." *Mechanics Research Communications*, No. 25, PP.59-67.
- 18 - Xiao, H., Bruhns, O. T. and Meyers, A. (2000). "A consistent finite elasto-plasticity theory combining additive and multiplicative decomposition of the stretching and the deformation gradient." *International Journal of Plasticity*, No. 16, PP. 143-177.
- 19 - Xiao, H., Bruhns, O. T. and Meyers, A. (2005). "Objective stress rates, Path-dependence properties and non-integrability problems." *Acta Mechanica*, No. 176, PP. 135-151.
- 20 - Bruhns, O. T., Xiao, H. and Meyers, A. (1999). "Self-consistent eulerian rate type elasto-plasticity models based upon the logarithmic stress rate." *International Journal of Plasticity*, No. 15, PP. 479-520.
- 21 - Bruhns, O. T., Xiao, H. and Meyers, A. (2001). "Large simple shear and torsion problems in kinematic hardening elasto-plasticity with logarithmic rate." *International Journal of Solid and Structures*, No. 38, PP. 8701-8722.
- 22 - Bruhns, O. T., Meyers, A. and Xiao, H. (2004). "On the non-corotational rates of Oldroyd's type and relevant, issues in rate constitutive formulations." *Proceedings of the Royal Society*, London Series B, No. 460, PP. 909-928.
- 23 - Bernstein, B. (1960). "Hypo-elasticity and elasticity." *Archives for Rational Mechanics and Analysis*, No. 6, PP. 90-104.
- 24 - Lin, R. C. (2002). "Numerical study of consistency of rate constitutive equations with elasticity at finite deformation." *International Journals for Numerical Methods in Engineering*, No. 55, PP. 1053-1057.
- 25 - Lin, R. C., Schomburg, U. and Kletschkowski, T. (2003). "Analytical stress solutions of a closed deformation path with stretching and shearing using the hypo-elastic formulations." *European Journal of Mechanics- A/solids*, No. 22, PP. 443-461.
- 26 - Hughes, T. J. R. and Winget, J. (1980). "Finite rotation effects in numerical integration of rate constitutive equations arising in large-deformation analysis." *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, No. 15, PP. 1862-1867.
- 27 - Belytschko, T., Liu, W. K. and Moran, B. (2001). *Nonlinear finite elements for continua and structures*. New York: John Wiley & Sons.
- 28 - Zhou, X. and Tamma, K. K. (2003). "On the applicability and stress update formulations for corotational stress rate hypo-elasticity constitutive models." *Finite Element in Analysis and Do*. Vol. 39, PP. 783-816.
- 29 - Jaumann, G. (1911). *Geschlossenes System physikalischer differentialgesetze*. Akad. Wiss. Wien Sitzber. IIa, No. 120, PP. 594-614.
- 30 - Green, A. E. and Naghdi, P. M. (1965). "A general Theory of an elastic-plastic continuum" *Arch. Rat. Mech. Anal.*, No. 18, PP. 251-281.

### واژه های کلیدی به ترتیب استفاده در متن

- |                      |                           |                   |
|----------------------|---------------------------|-------------------|
| 1 - Objective        | 2 - Jaumann rate          | 3 - Corotational  |
| 4 - Non-corotational | 5 - Cotter-Rivlin         | 6 - Oldroyd       |
| 7 - Eigen projection | 8 - Objective stress rate | 9 - Durban-Baruch |