# اندرکنش سد و مخزن در دامنه زمان به وسیله روش انتگرال حلقوی منفرد مجزا (DSC)

کیانوش کریمی ورضا عطارنژاد ۲\*

<sup>۱</sup>دانش آموخته کارشناسی ارشد مهندسی عمران – پردیس دانشکده های فنی – دانشگاه تهران <sup>۲</sup>دانشیار دانشکده مهندسی عمران – پردیس دانشکده های فنی – دانشگاه تهران (تاریخ دریافت ۸۵/۱۱/۲۵ ، تاریخ دریافت روایت اصلاح شده ۸۶/۱۲/۸ ، تاریخ تصویب ۸۷/۱۲/۲۰)

#### چکیدہ

در این مقاله تحلیل دینامیکی از نوع تاریخچه زمانی یک سد با ضخامت ثابت و مخزن نیمه بی نهایت، با یک روش عددی نوین به نام انتگرال حلقوی منفرد مجزا(DSC)، مورد بررسی قرار می گیرد. با توجه به حیاتی بودن مسئله طراحی سد، یافتن یک روش عددی کارا، سریع و دقیق که قابلیت مدل سازی شرائط مرزی پیچیده را داشته باشد، ضروری به نظر می رسد. بدین منظور روش انتگرال حلقوی منفرد مجزا در این مقاله نخستین بار برای تحلیل مسئله اندرکنش سد و مخزن به کار گرفته شده است. در ابتدای مقاله روش مذکور به صورت اجمالی معرفی شده و نحوه اعمال شرائط مرزی در آن، تشریح می گردد. سپس معادله حرکت اندرکنش سازه سد (یک تیر اویلر – برنولی طره ای) با مخزن نیمه بی نهایت در حالت پر و تحت زلزله ال سنترو، به وسیله روش DSC و با به کارگیری هسته دلتای شانون تنظیم شده، مدل سازی شده و با نتایج حاصل از روش Lee & Tsai به عنوان نتایج شاهد مقایسه می شود. در نهایت نشان داده می شود که روش DSC با سایر روش های عددی از نظر دقت و پایداری قابل رقابت می باشد.

واژه های کلیدی: اندرکنش سد و مخزن - تحلیل در حوزه زمان - انتگرال حلقوی منفرد مجزا - هسته دلتای شانون

#### مقدمه

با توجه به اهمیت چشم گیر مسئله اندرکنش سد و مخزن، یافتن یک روش محاسباتی برتر که با مشخصات فیزیکی مسئله تطابق کافی داشته، فرض های ساده کننده در آن کمتر بوده و سرعت و دقت مناسبی داشته باشد، امری ضروری است. به منظور نیل به این هدف در این مقاله روش جدیدی تحت عنوان انتگرال حلقوی منفرد مجزا ا به منظور مدل سازی مسئله اندر کنش معرفی مى گردد. الگوريتم انتگرال حلقوى منفرد مجزا، به عنوان یک روش برای حل عـددی مـسائل تکینـه شـکل گرفتـه است. به طور کلی این روش علاوه بر این که راه حل متفاوتی را برای سایر مسائل ارائه می دهد، قادر است برای حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی به عنوان یک الگوی برتر و مفید مورد استفاده قرار گیرد. در حال حاضر روشDSC، در تعدادی از مسائل علمی و مهندسی به کار گرفته شده است که از آن جمله می توان به مسائل كوانتوم [1]، مسائل فيزيـ كلاسـيك[٢]، شـبيه سـازى جریان سیالات در دامنه های ساده و پیچیده[۳]، اشاره نمود. در تحلیل سازه ها، روش DSC تنها الگوریتم عددی

موجود برای حل آن دسته از مسائلی است که نیاز به پیش بینی فرکانس های بالای ارتعاش دارند [۴]. ساختار ریاضی روش DSC، تئوری تحلیل موجک<sup>۲</sup> [۵] وتئوری پخش<sup>۳</sup>[۶] می باشد. با انتخاب مناسب پارامترهای به کار رفته در هسته DSC، این روش دقت قابل کنترلی را برای مسئله ایجاد نموده و انعطاف پذیری چشمگیری در مدل سازی هندسه های پیچیده و شرایط مرزی به دست می دهد. انواع مختلف هسته های دلتا از جمله هستهٔ دلتای شانون و دیریکله در روش DSC مورد استفاده قرار می گیرند [۱]. قبل از به کارگیری روش DSC درمسئله محورد نظر، ابتدا توضیحاتی در مورد سایر روش های محاسبه فشار هیدرودینامیک و تحلیل اندرکنش سد و مخزن ارائه می شود.

توزیع فشار هیدرورینامیک بر روی سدهای صلب اولین بار توسط وسترگارد در سال ۱۹۳۳ انجام گرفت [۷]. Chopra در سال ۱۹۶۷ یک راه حل تحلیلی برای فشار هیدرودینامیک برای یک سد در حالت صلب و به صورت قائم ارائه نمود [۸]. در سال ۱۹۷۸ فرمولاسیون فشار

هیدرودینامیک برای سدهای صلب با دیواره بالادست مایل با زاویه ثابت و با صرفنظر از تراکم پذیری سیال توسط Chwang ارائه گردید [۹]. Mei در سال ۱۹۷۹ یک روش دقیق برای اندرکنش سیال و سازه در حوزه فرکانس به دست آورد [۱۰] و بالاخره در سال ۱۹۸۶ Liu روش chwang را توسعه داده تا یک روش دقیق برای سدهای صلب و با سطح شیبدار و مخزن مثلثی، دست پیدا نمود [۱۱].

برای تحلیل دو بعدی و سه بعدی در دامنه زمان Lee و Tsai یک روش نیمه تحلیلی برای بیان شرائط انتشار در ناحیه دور در حوزه سیال ارائه کردند [۱۳ و ۱۲]. هم چنین یک روش دقیق تحلیلی برای سدهای صلب با دیواره قائم که تحت نیروهای زلزله قرار می گیرند، پیشنهاد داده و توانستند روشی نیمه تحلیلی در دامنه زمان برای حل مسئله اندرکنش سد و مخزن ارائه نمایند [۱۴]. در این روش سد به صورت یک تیر اویلر برنولی طره ای با مقطع ثابت در نظر گرفته شده است.

در مقاله حاضر ابتدا فرمولاسیون ارائه شده توسط Lee و Tsai [۱۴] برای مسئله اندرکنش به منظور مقایسه DSC و نحوه DSC ارائه می شود. سپس روش DSC و نحوه مدل سازی شرائط مرزی در آن تشریح می گردد. در ادامه، مسئله اندرکنش با فرضیات مشابه روش Kai & Lee ، به وسیله DSC و با انتخاب سه دستهٔ مختلف از پارامترهای مؤثر بر این روش، تحلیل و پاسخ تغییر مکان تاج سد و نیز فشار هیدرودینامیک در حالت مخزن پر و تحت اثر زلزله فشار هیدرودینامیک در حالت مخزن پر و تحت اثر زلزله در روش Lee مقایسه می شود، تا میزان تأثیر پارامترهای DSC بر دقت و پایداری جواب ها بررسی شود.

## فرمولاسيون Lee & Tsai

معادله حرکت انعطاف پذیر سد در اثر شتاب زمین ناشی از زلزله و فشار هیدرودینامیک ناشی از تأثیر مخزن (شکل۱) به صورت رابطه زیر(۱) نوشته می شود [۱۴]:



شکل ۱: سیستم سد انعطاف پذیر و مخزن پر نیمه بی نهایت، تحت اثر ارتعاش زمین با شتاب  $\ddot{u}_g$  .

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( EI \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -m \ddot{u}_g - P(0, z, t)$$
(1)  

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + m \ddot{u}_g - P(0, z, t)$$
(1)  

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + m \ddot{u}_g - P(0, z, t)$$
(1)  

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + m \ddot{u}_g - P(0, z, t)$$
(1)  

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + m \ddot{u}_g - P(0, z, t)$$
(1)  

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + m \ddot{u}_g - P(0, z, t)$$
(1)  

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + m \ddot{u}_g - P(0, z, t)$$
(1)  

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + m \ddot{u}_g - P(0, z, t)$$
(1)  

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + m \ddot{u}_g - P(0, z, t)$$
(1)  

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + m \ddot{u}_g - P(0, z, t)$$
(1)  

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + m \ddot{u}_g - P(0, z, t)$$
(1)  

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + m \ddot{u}_g - P(0, z, t)$$
(1)  

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + m \ddot{u}_g - P(0, z, t)$$
(1)  

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + m \ddot{u}_g - P(0, z, t)$$
(1)  

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + m \ddot{u}_g - P(0, z, t)$$
(1)  

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + m \ddot{u}_g - P(0, z, t)$$
(1)  

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + m \ddot{u}_g - m \ddot{u}_g$$

مکان های سازه نسبت به تکیه گاه زمین،  $\mathbf{i}_{g}^{g}$  شتاب های زلزله که در راستای محور x بر سازه اعمال می شود و p فشار هیدرودینامیک (مازاد بر فشار هیدرواستاتیک) میباشد. در رابطهٔ مذکور m و EI را می توان نسبت به z متغیر و پاسخ سازه به تأثیر نیروهای سیال و زلزله را به صورت ترکیب خطی از اشکال مودی  $\phi_{n}(z)$  و تابع کلی زمان  $Y_{n}(t)$  فرض نمود. بنابراین خواهیمداشت:

$$u(z,t) = \sum_{n=1}^{N} \phi_n(z) Y_n(t)$$
 (7)

که در آن  $\phi$  شکل مود ارتعاش و Y مختصه کلی است. در این صورت معادله (۱) به صورت زیر نوشته می شود:  $M_n \ddot{Y}_n(t) + \omega_n^2 M_n Y_n(t) = -V_n(t) - P_n(t)$  (۳)  $n = 1, 2, 3, \dots, \infty$ 

که در آن:  

$$M_n = \int_0^h m(x) [\phi_n(x)]^2 dx$$
 (f)  
بار عمومی ناشی از لرزش زمین، V<sub>n</sub> ، طبق رابطهٔ زیر  
بدست میآید:  
 $V_n(t) = \int_0^h m(z) \ddot{u}_g(t) \phi_n(z) dz$  (۵)  
(۵)  
 $p_n(t) = \int_0^h p(x = 0, z, t) \phi_n(z) dz$  (۶)  
 $P_n(t) = \int_0^h p(x = 0, z, t) \phi_n(z) dz$  (۶)  
 $\Delta n = 0$  فرکانس طبیعی سازه بدون مخزن در مود n ام  
می باشد.  
فشار هیدرودینامیک در حوزه سیال در سیستم

سد و مخزن از معادله فشار موج پیروی می کند:  

$$abla^2 P(x,z,t) = rac{1}{c^2} \dot{P}(x,z,t)$$
(۷)

در رابطهٔ فوق c سرعت انتشار صوت در سیال بوده و پارامتر p فشار هیدرودینامیک موجود در حوزه سیال میباشد.

شرائط مرزی و اولیه در ناحیه تماسی سازه و سیال:  $\frac{\partial p}{\partial x}\Big|_{x=0} = -\rho \bigg[ \ddot{u}_g(t) + \sum_{n=1}^N \phi_n(z) \ddot{Y}_n(t) \bigg]$ (٨)

www.SID.ir

اندرکنش سد و مخزن .....

 $\frac{\partial p}{\partial z}\Big|_{z=0} = 0 \tag{9}$ 

در سطح آزاد مخزن: با صرفنظر از امواج سطحی داریم:

 $\left.p\right|_{z=h}=0$  (۱۰) با فرض این که مخزن در زمان صفر در شرائط آزاد باشد،

$$p\big|_{t=0} = 0 \tag{(11)}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0 \tag{11}$$

در این روش فرض شده است که امواج آب هنگام پخش شدن از سد تنها دور می شوند. توزیع فشار هیدرودینامیک به کمک حل معادله (۷) با اعمال شرائط مرزی فوق و تبدیلات لاپلاس به دست می آید. جمله مربوط به آن به دو جزء مربوط به حرکت جسم صلب سد و تغییر مکان سد تجزیه شده و به صورت زیر نوشته می شود [۱۴]:

$$p_{n}(t) = p_{n}^{r}(t) + p_{n}^{f}(t)$$
(17)  
$$I_{n}(t) = \frac{4\rho c}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2} Q_{n} \int_{0}^{t} \frac{1}{2} \left( (-1)^{k+1} - 1 - 1 \right) dt$$

$$p_{n}^{f}(t) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{N} Q_{nk} \int_{0}^{t} u_{g}(\tau) J_{0}[\lambda_{k}.c(t-\tau)] d\tau$$

$$P_{n}^{f}(t) = \frac{2\rho c}{h} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{N} Q_{nk} Q_{mk} \int_{0}^{t} \ddot{Y}_{m}(\tau) J_{0}[\lambda_{k}c(t-\tau)] d\tau$$
(14)

با فرض تغییرات خطی شتاب زمین در دو گام زمانی متوالی و با فرض شتاب میانگین ثابت برای سازه در نهایت معادله زیر حاصل می شود:

$$\begin{split} M_{n}\ddot{Y}_{n}(t) + \omega_{n}^{2}M_{n}Y_{n}(t) &= -V_{n}(t) - \\ P_{n}^{r}(t) - F_{n}(t) - \sum_{m=1}^{N} W_{mn}\ddot{Y}_{n}. \end{split} \tag{10}$$

$$l = \frac{N}{2} M_{mn}\dot{Y}_{n}(t) = \frac{N}{2} M_{mn}\ddot{Y}_{n}(t) \quad l = -V_{n}(t) - \\ l = \frac{N}{2} M_{mn}\dot{Y}_{n}(t) \quad l = -V_{n}(t) - \\ l = \frac{N}{2} M_{mn}\dot{Y}_{n}(t) \quad l = -V_{n}(t) - \\ l = \frac{N}{2} M_{mn}\dot{Y}_{n}(t) \quad l = -V_{n}(t) - \\ l = \frac{N}{2} M_{mn}\dot{Y}_{n}(t) \quad l = -V_{n}(t) - \\ l = \frac{N}{2} M_{mn}\dot{Y}_{n}(t) \quad l = -V_{n}(t) - \\ l = \frac{N}{2} M_{mn}\dot{Y}_{n}(t) \quad l = -V_{n}(t) - \\ l = \frac{N}{2} M_{mn}\dot{Y}_{n}(t) \quad l = -V_{n}(t) - \\ l = -V_{n}(t) -$$

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1N} \\ m_{21} & m_{22} & \dots & m_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{N1} & m_{N2} & \dots & m_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{Y}_{1}(t) \\ \vdots \\ \vdots \\ \ddot{Y}_{N}(t) \end{bmatrix} + \\ \begin{bmatrix} K_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & K_{22} & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & K_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_{1}(t) \\ Y_{2}(t) \\ \vdots \\ \vdots \\ Y_{N}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{1}(t) \\ L_{2}(t) \\ \vdots \\ \vdots \\ L_{N}(t) \end{bmatrix}$$
(19)

که در رابطه فوق خواهیم داشت:

$$\label{eq:min} m_{_{ii}} = \begin{cases} W_{_{ij}} & i \neq j \\ W_{_{ij}} + M_{_i} & i = j \end{cases} \tag{1Y}$$

$$\mathbf{K}_{ii} = \boldsymbol{\omega}_i^2 \mathbf{M}_i \tag{1}$$

$$L_{i}(t) = -V_{i}(t) - P_{i}^{r}(t) - F_{i}(t)$$
(19)

# معرفی روش انتگرال حلقوی منفرد مجزا (DSC)

DSC یک روش عمومی برای حل عددی کانولوشن منفرد می باشد. با به کارگیری و اختصاص دادن یا تقریب ساختار یک هسته منفرد، DSC می تواند یک الگوریتم کاملاً مؤثر، با دقت و قابل اعتماد برای کاربردهای مختلف باشد[۲]. از آن جا که پایه و مبنای این روش تئوری پخش می باشد، لذا تابع T را به عنوان تابع توزیع(پخش) در نظر گرفته و(x) یک المان از فضای تابع آزمون خواهد بود. در این صورت انتگرال حلقوی منفرد به صورت زیر تعریف می شود:

$$F(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} T(t-x)\eta(x)dx$$
 (۲۰)  
در این رابطه (T(t-x) یک هسته منفرد بوده و بر اساس  
شکل و اجزای هسته T، انتگرال حلقوی منفرد(F(t)) یک  
توزیع مرکزی برای بسیاری از مسائل علمی و مهندسی  
میباشد. انواع هسته های منفرد که در مسائل مختلف  
می باشند که نوع هسته های منفرد ر مسائل انتشار امواج،  
کاربرد دارند، هسته های هیلبرت و هست مهای نوع دلتا  
می باشند که نوع هیلبرت بیشتر در مسائل انتشار امواج،  
پرتو- نگاری و ... کاربرد داشته ضمن این که نوع دلتا در  
حل عددی معادلات دیفرانسیل کاربرد فراوانی دارد و

 $T(x) = \delta^{(n)}(x)(n = 0, 1, 2, ...)$  (11)

به علت تکینگی هستهها و غیر قابل محاسبه بودن آنها با رایانه و توزیع مستقیم هستهها، یک تقریب T<sub>α</sub> بـرای تـابع توزیع T مورد استفاده قرار میگیرد:

$$\lim_{\substack{\alpha \to \alpha_{\circ}}} T_{\alpha}(x) \to T(x)$$
 (YW)

که در آن  $\alpha_0$  یک حد عمومی میباشد. به منظور حل معادلات دیفرانسیل در مسائل مهندسی، که موضوع تحقیق حاضر میباشد، پس از بررسیهای فراوان، هستههای نوع دلتای دیراک به عنوان هستههای DSC انتخاب شدهاند. بنابراین اگر  $T(x)=\delta(x)$  باشد،  $T_a(x)$  نیز از نوع دلتا بوده و خواهیم داشت:

$$F_{\alpha}\left(t\right) = \sum_{k} T\left(t - x_{k}\right) f\left(x_{k}\right)$$
(Yf)

 $\{x_k\}$ یک مجموعه مناسب از نقاط مجزای شبکه است که این تقریب بر روی آنها تعریف میشود و $F_{\alpha}(t)$ یک تقریب برای F(t) میباشد. نمونه مختلف هسته دلتا که در مسائل مختلف کاربرد دارند، در ادامه معرفی میشوند:

$$\lim_{\alpha \to \infty} < \frac{\sin \alpha x}{\pi x}, \ \eta(x) > = \eta(\circ) \tag{70}$$

$$\frac{\sin\left[\left(1+\frac{1}{2}\right)(x-x')\right]}{2\pi\sin\left[\frac{1}{2}(x-x')\right]}$$
(79)

نتایج بررسی بر روی معادلات به کار رفته در مسائل مهندسی و موضوعات مورد تحقیق این مقاله نـشان میدهد که اسـتفاده از هـسته دلتای شـانون<sup>۴</sup> با اعمـال تغییراتی، نتایج بسیار مطلوبی را بـه دسـت مـیدهـد. با استفاده از الگوریتم نمونـه گیـری درون یـابی در فرکانس استفاده از الگوریتم مونـه گیـری درون یابی در فرکانس supuist یعنی  $\frac{\pi}{\Delta}$ 

$$\frac{\sin\left[\alpha\left(x-x'\right)\right]}{\pi\left(x-x'\right)} \rightarrow \frac{\sin\frac{\pi}{\Delta}\left(x-x_{k}\right)}{\frac{\pi}{\Delta}\left(x-x_{k}\right)}$$
(YY)

اهمیت تئوری نمونه گیری شانون این است که با جداسازی و شبکه بندی مجموعه نامحدودی از مقادیر {f(x<sub>k</sub>)}، می توان یک تابع <sup>2</sup> (نوار محدود) را روی یک خط افقی پوشش داد. توالی و تناوب و نظم این هسته به کمک یک تنظیم کننده (Regulator)، بهبود می یابد:

$$\lim_{\sigma \to \infty} R_{\sigma} = 1 \tag{(YA)}$$

برای تناوب دلتا، بر اساس رابطـه (۲۳)، خـواهیم

$$\int \lim_{\alpha \to \alpha} T_{\alpha}(x) R_{\sigma}(x) dx = R_{\sigma}(\circ) = 1$$
 (19)

شرط 1=(0,  $R_{\sigma}(0)$ ، یکی از نیازهای اختصاصی برای نظم دهنده از نوع دلتا میباشد. یک تنظیم کننده عمومی و تیپ که در این مقاله و تحقیقات دیگر [۴ و ۵] مورد استفاده قرار می گیرد،  $(2\sigma^2)^{-x^2/2}$  میباشد. این تنظیم کننده، یک تابع از کلاس Schwartz بوده و با استفاده از آن هسته دلتای شانون به صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{\Delta}\right)(x-x_{k})}{\left(\frac{\pi}{\Delta}\right)(x-x_{k})} \longrightarrow \frac{\sin\left(\frac{\pi}{\Delta}\right)(x-x_{k})}{\left(\frac{\pi}{\Delta}\right)(x-x_{k})} e^{-\left((x-x_{k})^{2}/2\sigma^{2}\right)}$$
(\mathbf{(Y+)})

این تنظیم کننده سبب می شود که هسته شانون، قابلیت توزیع ملایم تری داشته و از نظر عددی برای استفاده در روش محلی برای حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی، عملکرد بسیار مناسبی نشان دهد. به منظور تقریب زدن مشتقات یک تابع نسبت به متغیرهای فضایی در یک نقطه مجزای مشخص، DSC معمولا از یک فضایی در یک نقطه مجزای مشخص، DSC معمولا از یک نقطه در سمت چپ و M نقطه در سمت راست نقطه مورد نقطه در سمت چپ و M نقطه در سمت راست نقطه مورد نظر) در جهت متغیرهای فضایی استفاده می کند، که M نیمه عرض نوار محاسباتی می باشد. m امین مشتق تابع نیمه عرض نوار محاسباتی می باشد. m امین مشتق تابع

$$f^{(m)}(x_i) \approx \sum_{k=-M}^{M} C_k^{(m)} \cdot f(x_i + k) \quad i = 0, 1, ..., N-1$$
(T1)

که در آن  $C_k^{(m)}$ : m امین مشتق هسته دلتای شانون تنظیم شده در نقطه k و N تعداد کل نقاط شبکه در دامنه محاسباتی می باشد. با نوشتن رابطه فوق به صورت ماتریسی، بخش دیفرانسیلی ماتریس فوق به صورت زیرتعریف می شود:

 $:D_q^{(m)}$  j=-M,...,N-1+M ,  $i=\circ,...,N-1$  است و q یک ماتریس دیفرانسیلی  $N \times (2M+N)$  است و q مرتب مشتق گیری است. توسعه و گسترش به ابعاد بالاتر (دو بعد) می تواند به صورت محصولات تنسوری تحقق یابد. مقدار  $C_k^{(m)}$  به صورت تحلیلی قابل محاسبه بوده که تا مشتقات مرتبه چهارم آن به دست آمده است، به عنوان

داشت:

۵۰۱

مثال برای حالت x ≠ x و با فرض هسته دلتای شانون تنظیم شده دارِیم:

$$\delta_{\frac{\pi}{\Delta}\sigma}^{(1)}(x_m - x_k) = \frac{\cos\frac{\pi}{\Delta}(x - x_k)}{(x - x_k)} \times \exp\left(\frac{-(x - x_k)^2}{2\sigma^2}\right) - \frac{\sin\frac{\pi}{\Delta}(x - x_k)}{\frac{\pi}{\Delta}(x - x_k)^2} \times \exp\left(\frac{-(x - x_k)^2}{2\sigma^2}\right) - \frac{\sin\frac{\pi}{\Delta}(x - x_k)}{\frac{\pi}{\Delta}\sigma^2} \exp\left(\frac{-(x - x_k)^2}{2\sigma^2}\right)$$
(YY)

### نحوه اعمال شرائط مرزی معادل تکیه گاه ساده و گیردار

در زمینه مدل سازی شرایط مرزی تحقیقات گسترده ای انجام گرفته است. در واقع یک الگوی عددی کامل باید روشی برای مدل کردن شرایط مرزی داشته باشد. برای شرایط مرزی معادل تکیه گاه ساده و گیردار، استفاده از تابع یک بعدی مفروض (x)f به همراه فرض رابطه ای مشخص و سپس افزودن الگوریتم DSC بر آن، می تواند زمینه مدل سازی آنها را فراهم آورد. مثلاً در مرز می تواند زمینه مدل سازی آنها را فراهم آورد. مثلاً در مرز پچ رابطه بین نقاط جعلی (خارج از دامنه) و نقاط درونی (داخل دامنه)، به صورت زیر فرض می شود [۲]: (داخل دامنه)، به صورت زیر فرض می شود [۲]: که در آن م نقطه مرز چپ می باشد و با استفاده از

تقریب DSC برای اولین و دومین مشتقات تابع f(x) به صورت زیر و استفاده از یک سری تکنیک های خاص، شرایط مرزی ساده و گیردار به صورت زیر مدل سازی می شوند:

$$f(x_{-i}) = a_i f(x_i) + (1 - a_i) f(x_\circ)$$
(°A)  

$$f'(x_\circ) = \sum_{i=-M}^{M} C_i^1 f(x_i) = \left[ C_\circ^1 - \sum_{i=1}^{M} (1 - a_i) C_i^1 \right] f(x_\circ)$$
(°A)  

$$+ \sum_{i=1}^{M} (1 - a_i) C_i^1 f(x_i)$$
(°A)  

$$f''(x_\circ) = \sum_{i=-M}^{M} C_i^2 f(x_i) = \left[ C_\circ^2 + \sum_{i=1}^{M} (1 - a_i) C_i^2 \right] f(x_\circ)$$
(°A)  

$$+ \sum_{i=1}^{M} (1 + a_i) C_i^2 f(x_i)$$
(°A)

 $f(x_0)=0$ : برای تکیه گاه ساده، شرایط مرزی معادل  $f(x_0)=0$ : برای معادل استفاده از یک تکنیک  $a_i = -1$  استفاده از  $a_i = -1$  برای محاسباتی، مشخص می شود که با انتخاب  $a_i = -1$  برای ارضاء  $a_i = 1,2,...,M$  می شوند. در واقع شرایط مرزی ساده با بسط غیر متقارن مدل شده اند. برای تکیه گاه گیردار مشخص می گردد که

با انتخاب  $a_i = 1$  برای i=1,2,...,M، معادلات مربـوط بـه این شرط مرزی ارضاء می شوند.

### نحوه اعمال شرائط مرزى معادل لبه آزاد

برای تکیه گاه لبه آزاد، شرایط مرزی معادل f''(x) = 0 و f''(x) = 0 خواهد بود. برای شرط مرزی سرآزاد از یک روش مرز تطبیق یافته تکرار شونده استفاده می شود. در این روش به صورت پی در پی از شرط مرزی داده شده استفاده گردیده، تا یک تعداد به اندازه کافی زیاد از نقاط جعلی ایجاد شده تا یک هسته یکسان انتقالی DSC بتواند بطور صحیح نزدیک لبه آزاد اجرا شود.این روش (IMB<sup>5</sup>) از یک الگوی مشابه با نام روش سطح مشترک تطبیق یافته تکراری که اخیراً توسعه يافته [16] الگو برداری می کند. روش IMB، یک دامنه ساختگی (جعلی) خارج از مرزها را در نظر می گیرد و شرائط مرزی را در امتداد مرز برقرار می سازد.در شکل (۲) این روند به وضوح نشان داده می شود. در مرحله اول از آنجا که دو شرط مرزی در دسترس است، فقط دو نقطه جعلی تعیین گردند. به منظور دستیابی به درجات بالای دقت برای شرایط مرزی، تقریب تفاضلات محدود(FD)  ${
m L}$  یک طرفه به کار گرفته می شود که شامل ضرائب روی نقطه شبکه روی وجه داخلی مرز می باشد. بنابراین شرط مرزی بوسیله روش تفاضلات محدود یک طرفه (L+3 نقطه ای) تقریب زده می شود.

$$\overset{(k)}{W_1} f_2 + \overset{(k)}{W_2} f_1 + \sum_{i=3}^{L+3} \overset{(k)}{W_i} g_{i-2} = 0$$
 (°A)

با بازنویسی رابطه (۳۸) برای هردو رابطه شرط مرزی لبه آزاد ( f''(x) = 0 و f''(x) = 0) به کمک روش فوق،

برای مشتق مرتبه دوم و مشتق مرتبه سوم داریم:  

$$\begin{cases}
W_1 f_2 + W_2 f_1 + \sum_{i=3}^{L+3} W_i g_{i-2} = 0 \\
W_1 f_2 + W_2 f_1 + \sum_{i=3}^{L+3} W_i g_{i-2} = 0
\end{cases}$$
(٣٩)

k = 2,3 و  $i = 1,2,\dots,L+3$  و  $W_i^{(k)}$  برای  $f_2$  و  $f_1$  و  $f_1$  و  $f_2$  و  $f_1$  برای  $g_i$  وزنهای روش تفاضلات محدود یک طرفه میباشند.  $g_i$  و  $g_i$  برای مقادیر نامعلوم تابع روی نقاط جعلی و  $g_i$  برای  $i = 1,2,\dots,L+1$  ممت راست مرز می باشند. با حل دستگاه (۳۹) مقادیر ا و  $f_1$  و  $f_1$  بر حسب مقادیر معلوم داخل مرز تعیین می شوند. حال با جا به جایی مرز واعمال کردن شرط مرزی در نقطه  $f_2$  ،مقادیر

# تحلیل انـدرکنش سـد و مخـزن بـه وسـیله روشDSC

در این بخش با توجه به فرضیات مشابه روش Lee و Tsai، سازه سد مانند گذشته به صورت یک تیر طره ای با مقطع ثابت در نظر گرفته می شود. سپس در معادلـه حرکت مربوطه، تابع و مشتقات آن نسبت بـه متغیرهـای فضایی به کمک الگـوریتم انتگـرال حلقـوی منفـرد مجـزا، فضایی به کمک الگـوریتم انتگـرال حلقـوی منفـرد مجـزا، تقریب زده می شود. معادلات فشار هیدرودینامیک مجدداً با رویکرد به روش DSC از ابتـدا تعیـین شـده و تغییـرات لازم اعمال می گـردد. در حـل مـسئله انـدرکنش سـد ـ مخزن به کمک الگوریتم DSC معادله (۱) به طور مستقیم مورد تحلیل قرار می گیرد.

به منظور تقریب مشتقات مرتبه چهارم تابع u(z,t) نسبت به متغیر مکانی z به کمک روش DSC، با توجه به مطالب مطرح شده در بخش ۳ مقاله و با استناد به این نکته که طی بررسی های انجام گرفته، هسته تنظیم شده دلتای شانون هماهنگی و سازگاری بیشتری با مسئله اندرکنش دارد، لذا از رابطه تقریب کانولوشن منفرد مجزا با هسته تنظیم شده دلتای شانون استفاده می شود و خواهیم داشت:

$$\frac{\partial^4 u}{\partial z^4} = \frac{\partial^4 u(z,t)}{\partial z^4} \bigg|_{x=i} = \sum_{K=-M}^M \delta_{\frac{\pi}{\Delta},\sigma}^{(4)} (z_i - z_k) u_{i+k}(z,t)$$
(\*\*)

در واقع طول تیر (ارتفاع سد) به نحوی شبکه بندی می گردد که N نود (نقطه) روی سازه قرار گرفته و M نقطه جعلی<sup>2</sup>، به طور متقارن از هر مرز به سمت خارج دامنه و با فاصله یکسان نسبت به نقاط داخل دامنه، در نظر گرفته می شود. فاصله نقاط شبکه یکسان بوده و از رابطه زیر به دست می آید:

$$\Delta = \frac{(N-1)}{h} \tag{F1}$$

u(z,t) با تقریب زدن مشتقات چهارم تابع (z,t) با تقریب زدن مشتقات چهارم تابع وسیله رابط ه نسبت به z در تمام نقاط شبکه (N نقطه) به وسیله رابط های (۴۰) ماتریس ضرائب DSC حاصل می شود. درایـه های (۴۰) ماتریس، ضرائب  $\left(\frac{4}{\Delta}, \sigma(z_i - z_k)\right)$  می باشـند کـه (۹) مشابه رابطه (۳۳) به صورت تحلیلی محاسـبه می شوند. (N+2M) یاین ماتریس مستطیلی بوده و دارای N سـطر و (N+2M) ستون می باشد. با توجه به این که سازه سد به صورت یک تیر طره ای مدل شـده است، دارای شـرائط تکیـه گـاهی تیر طره ای مدل شـده است، دارای شـرائط تکیـه گـاهی گیردار و سر آزاد در دو انتهای خود می باشد:

$$Z = 0 : u(z,t) = 0 , \quad \frac{\partial u(z,t)}{\partial z} = 0 \quad (\texttt{FT})$$

$$Z = h : \frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial z^2} = 0 , \quad \frac{\partial^3 u(z,t)}{\partial z^3} = 0 \quad (\texttt{FT})$$

$$u_{10} \text{ act uld} \quad u_{10} \text{ act uld} \quad u_{10} \text{ act uld}$$

$$u_{10} \text{ act uld} \quad u_{10} \text{ act uld} \quad u_{10} \text{ act uld}$$

$$u_{10} \text{ act uld} \quad u_{10} \text{ act uld}$$

$$u_{-k}(z,t) = u_k(z,t) \quad , k = 1,2,\cdots, M \quad (\texttt{FT})$$



شکل۲: مرز تطبیق یافته تکرار شونده.

در واقع می توان M معادله به فرم کلی N در واقع می تربی (z,t) -  $u_k(z,t) = 0$  , k = 1,2,...,Mمعادله قبلی اضافه نمود. از آن جا که در محاسبات عددی همواره سعی می شود که با کاهش ابعاد یک ماتریس سرعت عملیات را افزایش دهند، لذا با اعمال تکنیک های عددی، اعمال شرط مرزی گیردار سبب کاهش ابعاد ماتریس خواهد شد. برای سر آزاد نیز مطابق بخش قبل، با استفاده از روش IMB و کاربرد یک تکنیک عددی خاص، استفاده از روش BMI و کاربرد یک تکنیک مدی عددی خاص، ماتریس به یک ماتریس ضرائب کاهش یافته و در نهایت این ماتریس به یک ماتریس  $N \times N$  تبدیل می شود که با فشار هیدرودینامیک در حوزه سیال با رویکرد به روش فشار هیدرودینامیک در حوزه سیال با رویکرد به روش فشار هیدرودینامیک در حوزه سیال با رویکرد به روش فشار هیدرودینامیک در حوزه سیال با رویکرد به روش ماتری می باشد، فقط شرط مرزی و اولیه مطابق بخش سازه و قبل می باشد، فقط شرط مرزی در ناحیه تماسی سازه و

$$\left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_{x=0} = -\rho \left[ \ddot{u}_g(t) + \ddot{u}(z,t) \right] \tag{4}$$

با اعمال تبدیل لاپلاس و روش جداسازی متغیرها و نیز برقراری شرائط مرزی، توزیع فشار هیـدرودینامیک را با رویکرد به روش DSC، می توان به صورت زیر نوشت:

$$p(0, z, t) = p_k^r(z, t) + p_k^f(z, t)$$

$$(\$ \$)$$

$$r(-) \frac{4\rho C \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}}{2} \int_{-\infty}^{\infty} t_{k+1}^r(z, t) \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \int_{-\infty}^{\infty} t_{k+1}^r(z, t) \sum_{k=1}^{\infty} t_{k+1}^r(z, t) \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \int_{-\infty}^{\infty} t_{k+1}^r(z, t) \sum_{k=1}^{\infty} t_{k+1}^r(z, t) \sum_{k=1}^{\infty$$

$$p_{k}^{r}(z,t) = \frac{-\gamma}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)} \cos \lambda_{k} z \int_{0}^{0} \ddot{u}_{g}(\tau) J_{0}[\lambda_{k} c(t-\tau)] d\tau$$
(FV)

که در آن  $[K]_{N imes N}$  ماتریس ضرائب DSC پس از اعمال شرائط مرزی و کاهش آن به ماتریس N imes N مربعے و ماتریس  $[m]_{N \times N}$  ماتریس جرم متمرکز در محل نقاط اصلی شبکه می باشد که یک ماتریس قطری بوده و به شکل زیر تعریف می شود:  $\begin{cases} m_{ii} = m \times \Delta & for \quad i = 2, 3, \cdots, N-1 \end{cases}$ (۵۱)  $[m]_{N\times N} = \begin{cases} \dots & \dots \\ m_{ii} = m \times \frac{\Delta}{2} & \text{for } i = 1, N \end{cases}$ که در آن m جرم واحد طول سازه می باشد. با توجه به رابطه (۴۹)، و با انتقال قسمت  $W_{k}(z,t)$  از سمت چپ به سمت راست معادله(۵۰) ، این معادله را در نهایت به شکل ماتریسی زیر می توان باز نویسی نمود:  $\left[\ddot{u}(z_1,t)\right]$  $\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & \dots & M_{1N} \end{bmatrix} \ddot{u}(z_2,t)$  $M_{N1}$   $M_{N2}$   $\cdots$   $M_{NN}$  $\ddot{u}(z_N,t)$  $\left( u(z_1,t) \right)$  $\int L(z_1,t)$  $\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \cdots & K_{1N} \end{bmatrix} u(z_2,t)$  $L(z_2,t)$  $EI \times$ =  $K_{N1}$  ··· ··  $K_{NN}$  $L(z_N,t)$  $u(z_N,t)$ (27) در رابطه ماتریسی فوق داریم:  $L(z_i,t) = -[m_i]_{N \times N} \times [\ddot{u}_g(t)]_{N \times I} - [P_k^r(z_i,t)]_{N \times I} - [F_k(z_i,t)]_{N \times I}$ (۵۳)

$$W_k(z,t) = \sum_{k=1}^{\infty} [P]_{N \times N} \times \ddot{u}(z,t)$$
 ( $\Delta$ f)

$$[M]_{N\times N} = \sum_{k=1}^{\infty} [P]_{N\times N} + [m]_{N\times N}$$
 ( $\Delta\Delta$ )

بدین ترتیب معادله حاکم تغییر یافته به صورت فوق، از طریق روش نیومارک، مجزا سازی زمانی شده و پاسخ تغییر مکان سازه سد در هر نقطه و در هر گام زمانی محاسبه می شود. از آن جا که ماتریس های سای  $[K]_{N \times N}$  و محاسبه می شود. از آن جا که ماتریس های مای  $[M]_{N \times N}$ مساله به طور کامل با شرائط روش حل نیومارک در مسائل خطی مطابقت دارد.

مقایسه و بررسی نتایج در این قسمت نتایج حاصل از اندرکنش سد و

مخزن نیمه بی نهایت با فرض تراکم پذیری سیال و صرف نظر از امواج سطحی، بوسیله روش DSC ارائـه مـی شـود. سپس نتایج حاصله با نتایج و گراف های حاصل از روش Lee & Tsai مقایسه می شود. مطابق شکل (۳)، سیستمی شامل یک تیر منشوری با مقطع ثابت به ارتفاع ۱۸۰ متر و بـه ضـخامت ۱۵ متـر در نظـر گرفتـه مـی شـود، مـدول الاستيسيته اين تير EI=3/5E7 تن بر مترمربع و وزن مخصوص آن ۲/۴ تن بر مترمکعب می باشد. سرعت صوت در آب C=1438/656 متر بر ثانیه در نظر گرفته شده است. جرم حجمی آب  $\rho = 1$  تن بر مترمکعب می باشد. سازه فوق در هـر دو روش، تحـت مؤلف و افقـی شـمالی – جنوبی زلزله ال سنترو (۱۹۴۰) و به مدت ۶ ثانیه، مورد تحلیل قرار می گیرد. در تحلیل Tsai و ۵، Lee مود برای سازه و ۳۵ جمله اول حد مجموعها در نظر گرفته شده است. نتایج مربوط به روش Tsai و Lee در شکل های (۴) و (۵) ارائه گردیده است. در روش DSC به جهت مقایسه و بررسی میزان تأثیر پارامترها، سه حالت مختلف در تحلیـل مدنظر قرار گرفته است:

حالت اول:

N = 100, M = 26, r = 3, L = 17

حالت دوم:

$$N=150,\ M=36,\ r=4,\ L=27$$
حالت سوم:

N = 250, M = 56, r = 4.2, L = 41

لازم به یادآوری است که پارامتر N تعداد نقاط شبکه اصلی ، M تعداد نقاط جعلی ،  $\sigma.\Delta$  تنظیم کننده و L تعداد نقاط داخل دامنه می باشد که در مدل سازی لبه آزاد به کار گرفته می شود. تغییر مکان تاج سد در هر سه حالت تحت اثر زلزله ال سنترو، به دست آمده است (شکل ۶ تا ۸). نتایج هر سه حالت با مقدار تغییر مکان حاصل از روش Tsai و عاط مقایسه شده و بهترین و دقیق ترین جواب ممکن و پارامترهای نظیر آن تعیین می شوند (شکل ۹). در شکل (۱۰)، بهترین جواب به دست آمده برای روش DSC در حالت سوم با روش Tsai و عا مقایسه شده است. سپس برای این پارامترها فشار مقایسه شده است. سپس برای این پارامترها فشار مقایسه می و با در کف مخزن به دست آمده و با فشار نظیر آن در روش Tsai و Lee مقایسه می گردد شکل های ۱۱ و ۲۵.

نتيجه گيري

- از مقایسه نتایج و شکلها، این نتیجه حاصل می شود که مقادیر پاسخ تغییر مکان تاج سد و فشار هیدرودینامیک، به شدت متأثر از پارامترهای DSC می باشند، و انتخاب نادرست این پارامترها سبب غیر واقعی بودن جوابها و تنزل دقت آنها می گردد.
- افزایش N، یعنی افزایش تعداد نقاط شبکه به طور کلی سبب کوچکتر شدن Δمی شود و این امر سبب نمونه گیری مناسب تر هسته شده و دقت آن و در نتیجه دقت جواب ها را افزایش می دهد. از طرفی افزایش N سبب افزایش زمان تحلیل و هزینه محاسباتی می گردد.
- افزایش پارامتر M تا یک حد معین به شدت بر جواب ها و دقت آنها مؤثر است. پس از رسیدن مقدار M به این حد تجربی تأثیر آن بر جواب ها کمترشده، اما از دست نمی رود، در حالی که برای مقادیر کمتر از M بهینه دقت جواب ها در بعضی موارد بسیار تنزل می کند. در مسئله مورد بحث معمولاً برای N=250 مقادیر M بیش از ۵۰ اثر کمتری برافزایش دقت جواب ها دارد.
- $\Delta$  در مسئله مورد بحث، متناسب با اندازه شبکه یعنی و نیز مقدار M به منظور تنظیم هسته، یک پارامتر بهینه r وجود دارد که:  $\sigma.\Delta : r = \sigma.$  بر اساس بررسی های انجام شده با تحلیل های مختلف، r بهینه در این مسئله معمولاً عددی بین (4/1-5) به دست می آید.
- افزایش L، همان طور که ازمقایسه شکل های (۶) تا (۹) به وضوح قابل مشاهده می باشد، سبب افزایش دقت روش IMB در مدل سازی شرط مرزی می شود. اما برای هر M نیز می توان L بهینه ای یافت که به ازای آن دقت مورد نظر حاصل شود.
- بررسی شکل های (۶) تا (۹)، نشان می دهند که عمده خطای ایجاد شده در این روش، خطای ناشی از استفاده از روش های عددی انتگرال گیری در محاسبه فشار هیدرودینامیک با رویکرد به روش DSC، می باشد. این خطا به صورت تجمعی و با افزایش گام زمانی از دقت جواب ها می کاهد و خطای ناشی از روش DSC در مقایسه با این خطا کوچکتر است. به همین دلیل تطابق جواب ها در مورد جا به جای نسبتاً مناسب ولی در مورد فشار هیدرودینامیک تطابق کمتری وجود دارد.



شکل۴ : تغییر مکان تاج سد (بر حسب متر) در حالت مخزن پر، تحت زلزله ال سنترو به روش Lee & Tsai بر حسب زمان.



www.SID.ir



www.SID.ir



DSC شکل ۱۱: فشار هیدرودینامیک (بر حسب تن بر متر مربع) در کف مخزن بر اساس روش (N = 250, M = 56, r = 4.2, L = 41).



شکل ۱۲: مقایسه فشار هیدرودینامیک در کف (بر حسب تن بر متر مربع) مخزن بر اساس روش DSC در حالت . Lee & Tsai با روش N = 250, M = 56, r = 4.2, L = 41

مراجع

- 1 Wei, G. W. (2000). "Solving quantum eigenvalue problems by discrete singular convolution." *J. Phys.* Vol. B33, PP. 343-352
- 2 Wei, G. W. (2001). "A new algorithm for solving some mechanical problems." Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. Vol. 190, PP. 2017-2030.
- 3 Wan, D. C. and Wei, G. W. (2002). "Discrete singular convolution-finite subdomain method for the solution of incompressible viscous flows." *J. Comput.Phys.* Vol. 180, PP. 229-255.
- 4 Wei, G. W. (2001). "Vibration analysis by discrete singular convolution." *J. Sound Vibration*, Vol. 244, PP. 535-553.
- 5 Wei, G. W. (1998). "Quasi wavelets and quasi interpolating wavelets." *Chem. Phys. Lett.*, Vol. 296, PP. 215-222.
- 6 Wei, G. W., Zhang, D. S., Kouri, D. G. and Hoffman, D. K. (1997). "Lagrange distributed approximating functionals." *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 79, PP. 775-77.
- 7 Westergaard, H. M. (1933). "Water pressures on dams during earthquakes." ASCE. Vol. 98, PP. 418-433
- 8 Chopra, A.K. (1967). "Hydrodynamic pressures on dams during earthquakes." *Journal of engineering Mechanics, ASCE*, Vol. 93, No. 6, PP. 205-223.
- 9 Chwang, A. T. (1978). "Hydrodynamic pressures on sloping dam during earthquake. Part2.Exact theory." *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 87, PP. 343-348.

- 10 Mei, C. C., Foda, M. A. and Tong, P. (1979). "Exact and hybrid -element solution for the vibration of a thin elastic structure seated on the sea floor." Appl. Ocean Res., Vol. 1, No. 2, PP. 79-88.
- 11 Liu, P. L. F (1986). "Hydrodynamic pressures on rigid dams during earthquake." J. Fluid Mech., Vol. 165, PP. 131-145.
- 12 Tsai, C. S., and Lee, G. C. (1990). "Method for the transient analysis of three-dimensional dam-reservoir interactions." Journal of Engineering Mechanics, ASCE, Vol. 116, No. 10, PP. 2151-2172.
- 13 Tsai, C. S., Lee, G. C. and Ketter, R. L. (1990a). "A semi-analytical method for time-domain analysis of dam-reservoir interaction ." International J. for Numerical Methods in Engineering, Vol. 29, No. 5, PP. 913-933.
- 14 Lee, G. S. and Tsai, C. S. (1991). "Time-domain analysis of dam-reservoir system part 1; exact solution." Journal of Engineering Mechanics, ASCE, Vol. 117, No. 9, PP. 1990-2006.
- 15 Zhao, S., Wei, G. W. and Xiang, Y. (2005). "DSC analysis of free-edged beams by an iteratively matched boundary method." (Short Communication). Journal of Sound and Vibration, Vol. 284, PP. 487-493.

واژه های انگلیسی به ترتیب استفاده در م

- 1 Discrete Singular Convolution
- 2 Wavelet theory
- 3 Distribution Theory
- 4 Shannon Kernel
- 5 - Iteratively Matched Boundary
- 6 Fictious Point