قالب جزء محدود پوسته استوانه ای

محمد رضایی پژند*[1] و رضا خواجوی[2]

[1]استاد گروه عمران - دانشکده مهندسی - دانشگاه فردوسی مشهد

[2]دانش آموخته کارشناسی ارشد گروه عمران - دانشکده مهندسی - دانشگاه فردوسی مشهد

(تاریخ دریافت ۸۴/۸/۱۶ , تاریخ دریافت روایت اصلاح شده ۸۶/۳/۱۹ , تاریخ تصویب ۸۷/۷/۱۵)

چکیده

تاب و خم پوسته‌ها حالت‌های گوناگون کرنشی آنها را در هم می‌تند، و به یک دیگر وابسته می‌سازد. این رفتار اندرکنشی، فرآیند ساخت قالب‌های پوسته‌ای را تا کنون ناکام گذارده است. برای برپایی قالب‌های جزء محدود بر پایه رابطه‌سازی آزاد، باید آزمون جزء تکین سامان یابد. این آزمون برای جزءهای پوسته‌ای ناکار بوده و نیاز به بازآرایی دارد. در این مقاله، رفتار اندرکنشی پوسته‌ها و درگیری‌های کرنشی با رویکردی ریزبینانه بررسی می‌شوند. چنین دیدگاهی از رفتار پوسته‌ها، راهکاری ساده را برای ساخت قالب‌های پوسته‌ای پیش رو می‌گذارد. بر پایه آن، بی‌نیاز از سامان‌دهی آزمون جزء تکین، قالب پوسته‌ای با پاره‌سازی ماتریس سختی یک جزء نمونه برپا می‌شود. این جزء می‌بایست در کاربرد، توانمندی خود را در همگراسازی تحلیل سازه‌های گوناگون نشان داده باشد. ویژگی‌های این گونه قالب‌سازی با برپایی قالب جزء پوسته استوانه‌ای بررسی می‌شود.

واژه‌های کلیدی: پاره‌سازی - پوسته استوانه‌ای - پوسته متقارن محوری - تابع پایه - حالت کرنشی - قالب اصلی - قالب جزء محدود - ماتریس سختی اصلی - ماتریس سختی حالت کرنشی - نشانگان شیب کرنش - ویژه‌سختی

مقدمه

دشواری تحلیل پوسته‌ها بر کسی پوشیده نبوده و هندسه خمیده این سازه‌ها، رابطه‌سازی آنها را بسیار پیچیده کرده است. از سوی دیگر، توانایی‌های سازه‌های پوسته‌ای قرن‌هاست که شناخته شده‌اند. ویژگی‌های نهفته در خم و تاب پوسته‌ها، کاربردهای زیادی به آنها می‌دهد. لذا بدین جهت تنها پس از چند سال از پایه‌ریزی روش اجزای محدود، پژوهشگران به الگوسازی جزءهای پوسته‌ای روی آورده به طوری که در چهل سال اخیر، تلاش‌های بسیاری برای این کار انجام گرفته است. ضمن این که هم اکنون نیز پوسته‌ها زمینه پژوهشی بسیاری از دانشمندان و دانشجویان می‌باشد. در نخستین تلاش‌ها، پیچیدگی رفتار پوسته‌ها تحلیلگران را وا داشت تا این ساختارهای خمدار را با جزءهای تخت پوسته‌ای بپوشانند. در این جزءها، رفتار غشایی و خمشی جداگانه الگوسازی می‌شود، و جزء از برهم‌نهی آن دو بر پا می‌گردد. بدین گونه، از پیچیدگی‌های رفتاری پوسته‌ها، که پیامدی از اندرکنش این دو کارکرد است، جلوگیری می گردد [۱].

هرچند ساماندهی جزءهای پوسته‌ای تخت آسان می باشد. با این حال، کارآیی آن ها چندان دلخواه و شایسته نیست. آزمون‌های بسیار نشان داده‌اند که برای رسیدن به پاسخ‌های خوب در تحلیل با چنین جزءهایی، باید شبکه‌بندی‌های بسیار ریزی را بر روی سازه پوسته‌ای گستراند. این جزءها کاستی‌ها و نارسایی‌های دیگری هم دارند که کاربرد آنها را با دشواری همراه می‌کنند [۲]. لذا، در گام دیگر، دانشمندان به آفرینش جزءهای پوسته‌ای خمدار روی آورده و رابطه‌سازی‌های گوناگونی برای آن پیشنهاد نمودند که شناخته‌شده‌ترین آنها را با نام ارائه کنندگان آن یعنی «کویتر» و «نقدی» می‌شناسند [۳] .

جزء استوانه ای نمونه‌ای بسیار ساده از جزءهای پوسته‌ای خمدار هستند که سادگی هندسه آنها از کاربرد گسترده آنها در تحلیل سازه‌ها نمی‌کاهد و روند الگوسازی آنها بسیار نزدیک به همان فرآیندی است که برای جزءهای تنش یا کرنش مستوی انجام می‌گیرد، و به هیچ رابطه‌سازی پیچیده‌ای نیاز ندارد.

قالب جزء محدود، یک ماتریس سختی عامل دار است که با مقداردهی عامل های آن، نمونه جزء های گوناگون قالب به دست می آیند. عامل ها را می توان در جهت کاراسازی جزء، بهینه کرد [۴]. در چند سال گذشته، تلاش‌هایی برای ساخت قالب‌های پوسته‌ای انجام پذیرفته که می توان از قالب‌های جزءهای پوسته‌ای تخت به عنوان اولین لاش ها نام برد. در حال حاضر روش ساخت قالب، که بر رابطه‌سازی آزاد و آزمون جزء تکین

* نویسنده مسئول : تلفن : ۰۹۱۵۳۱۳۰۳۴۰ , فاکس : ۰۵۴۱ - ۸۴۱۲۹۱۲ Email: mrpajand@yahoo.com

Archive of SID
www.SID.ir

استوار می‌باشد، در ساماندهی قالب‌های پوسته‌ای خمدار کارآئی نداشته و دشواری‌های زیادی فراروی به انجام رسیدن آن وجود دارد، که در آینده به آن ها پرداخته خواهد شد. یادآوری می‌شود، بررسی‌های این مقاله برای پوسته استوانه ای است، و گسترش آن برای دیگر گونه‌های پوسته خمدار نیاز به پژوهش‌های بیشتری دارد.

در این مقاله، با بهره‌جویی از ماتریس سختی اصلی یک نمونه جزء پوسته‌ای استوانه ای، قالب آن برپا می‌شود. این نمونه جزء باید توانایی خود را در همگرا کردن تحلیل به پاسخ‌های درست، در کاربرد نشان دهد. ماتریس سختی اصلی جزء‌های پوسته‌ای متقارن محوری قطری نیست. با شکستن ماتریس سختی اصلی به زیرماتریس‌هایی، بخش‌های همتای حالت های کرنشی مرتبه بالا از بخش‌های همتای جابه‌جایی‌های جسم سخت و حالت‌های کرنشی ثابت، و نیز بخش نماینده اندرکنش میان آن دو جدا می‌شود. برای ساخت قالب تنها باید زیرماتریس سختی وابسته به حالت‌های کرنشی مرتبه بالا عامل دار گردد.

پاره‌سازی ماتریس سختی و ساخت قالب اصلی

در رابطه‌سازی جزء محدود، تغییرشکل جزء از برهم‌نهی چند تغییرشکل پایه به دست می‌آید. یک پایه سودمند که کاربردهایی درخور توجه دارد، پایه حالت‌های کرنشی جزء است [۵] که دربرگیرنده جابه‌جایی‌های جسم سخت، حالت‌های کرنشی ثابت، و حالت‌های کرنشی مرتبه بالا می‌باشد. هر حالت کرنشی یک تابع پایه داشته که رفتار تغییرشکل جزء را در آن حالت کرنشی نشان می‌دهد. تغییرشکل جزء از برهم‌نهی تغییرشکل‌های پایه همتای حالت‌های کرنشی به دست می‌آید [۶]:

$$\boldsymbol{u} = \sum_{i=0}^{n} \boldsymbol{N}_{qi}\, \boldsymbol{q}_i \qquad (۱)$$

در رابطه فوق، q_i حالت کرنشی i ، و Nq_i تابع پایه همتای آن، u تابع تغییرشکل جزء، و n شمار درجه‌های آزادی آن می‌باشد. برای یافتن تابع‌های پایه یک جزء، از رابطه‌سازی با نشانگان شیب کرنش بهره گرفته می‌شود. با به کارگیری تابع‌های پایه، ماتریس سختی در دستگاه بردارهای همتای حالت‌های کرنشی جزء، $\boldsymbol{Kq}$ ، برپا می‌شود. از این ماتریس در فرآیند پاره‌سازی ماتریس سختی بهره می‌جویند، که به ساخت قالب‌های جزء محدود کمک شایانی می نماید. ماتریس کرنش ـ حالت کرنشی، $\boldsymbol{Bq}$، از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\boldsymbol{B}_q = \Delta\, \boldsymbol{N}_q \qquad (۲)$$

که در آن، $\boldsymbol{Nq}$ ماتریس تابع‌های پایه، و Δ ماتریس عملگر دیفرانسیلی است. گسترش این ماتریس به صورت ذیل خواهد بود:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{B}_q &= \left[\boldsymbol{B}_{q_1}\ \ \boldsymbol{B}_{q_2}\ \ \cdots\ \ \boldsymbol{B}_{q_n}\right] \\ \boldsymbol{B}_{q_i} &= \Delta\, \boldsymbol{N}_{q_i} \end{aligned} \qquad (۳)$$

و زیرماتریس $\boldsymbol{Bq_i}$ ، ماتریس کرنش ـ حالت کرنشی q_i می‌باشد. با داشتن ماتریس $\boldsymbol{Bq}$ ، می‌توان به سادگی ماتریس سختی $\boldsymbol{Kq}$ را از رابطه زیر به دست آورد:

$$\boldsymbol{K}_q = \int_V \boldsymbol{B}_q^{\,T}\, \boldsymbol{D}_m\, \boldsymbol{B}_q\, dV \qquad (۴)$$

که در آن، $\boldsymbol{D}_m$ ، ماتریس مواد بوده [۱] و با بهره‌گیری از یک ماتریس نگاشت، می‌توان ماتریس سختی جزء، $\boldsymbol{K}$ ، را از $\boldsymbol{Kq}$ به دست آورد. این ماتریس، نگاشتی است که حالت‌های کرنشی را با جابه‌جایی‌های گرهی جایگزین می‌نماید. برای ساخت آن، نخست ماتریسی را با نام ماتریس نگاشت حالت کرنشی ـ جابه‌جایی گرهی، $\boldsymbol{G}$ ، سامان می‌دهند. چنین ماتریسی با جایگذاری مختصات گرهی در تابع‌های پایه $\boldsymbol{Nq}$ ، برپا خواهد شد:

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{G}\,\boldsymbol{q}$$
$$\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{N}_q(1) \\ \vdots \\ \boldsymbol{N}_q(n) \end{bmatrix} \qquad (۵)$$

در رابطه فوق، $\boldsymbol{D}$ بردار جابه‌جایی‌های گرهی بوده و نمایش گسترش‌یافته آن مطابق ماتریس زیر می‌باشد:

$$\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{N}_{q1}(1) & \boldsymbol{N}_{q2}(1) & \cdots & \boldsymbol{N}_{qn}(1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{N}_{q1}(n) & \boldsymbol{N}_{q2}(n) & \cdots & \boldsymbol{N}_{qn}(n) \end{bmatrix} = \left[\ \boldsymbol{g}_1\ \ \boldsymbol{g}_2\ \ \cdots\ \ \boldsymbol{g}_n\ \right] \qquad (۶)$$

ستون‌های این ماتریس، $\boldsymbol{g}_1$ ، ... ، $\boldsymbol{g}_n$ ، نمایشگر بردارهای جابه‌جایی‌های گرهی حالت‌های کرنشی هستند که در شماری از جزء‌ها، همان بردارهای ویژه ماتریس سختی جزء می‌باشند و باید آگاه بود که در جزء پوسته‌ای استوانه ای چنین مسئله ای صادق نمی باشد. وارون $\boldsymbol{G}$ ، ماتریس نگاشت جابه‌جایی‌های گرهی به حالت‌های کرنشی است، که با $\boldsymbol{H}$ نشان داده می‌شود:

Archive of SID

www.SID.ir

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{H} = \boldsymbol{G}^{-1} \\
&\boldsymbol{q} = \boldsymbol{H}\,\boldsymbol{D}
\end{aligned} \qquad (۷)
$$

و با انجام نگاشت زیر، می‌توان ماتریس سختی جزء ، $\boldsymbol{K}$ ، را از $\boldsymbol{Kq}$ به دست آورد:

$$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{H}^T\,\boldsymbol{K}_q\;\boldsymbol{H} \qquad (۸)$$

دشواری‌های ساخت قالب‌های پوسته‌ای

تلاش‌های زیادی برای ساخت قالب‌های پوسته‌ای انجام می‌گیرد. پژوهشگران تاکنون قالب‌های جزءهای پوسته‌ای تخت را با پیکره‌های گوناگون به خوبی برپا کرده‌اند. نمونه آن ها، قالب‌های سه و نیز چهارپهلو می باشد که افزون بر جابه‌جایی‌های گرهی، درجه‌های آزادی دورانی نیز دارند. برای ساخت این گونه قالب‌های تخت، دو قالب غشایی و خمشی، جداگانه برپا می‌شوند. فرآیند ساخت این دو، همان روش آشنای برپایی قالب‌هاست. با برهم‌نهی قالب‌های غشایی و خمشی، قالب پوسته‌ای تخت به دست می‌آید و علت جایز بودن این روش آن است که الگوهای غشایی و خمشی در جزءهای پوسته‌ای تخت، هیچ گونه اندرکنشی با یک دیگر پیدا نمی‌کنند. به سخن گویاتر، حالت‌های پایه کرنشی برای دو الگوسازی غشایی (در صفحه) و خمشی (برصفحه) از هم جدا می باشند. افزون بر این، حالت‌های کرنشی این دو الگوسازی اندرکنش کارمایه ندارند.

جزءهای پوسته‌ای تخت کاستی‌هایی در کاربرد دارند. آن ها در تحلیل‌های خطی، و به ویژه در تحلیل‌های غیرخطی، چندان کارآمد نبوده و گاه به کارگیری آنها در تحلیل پوسته بسیار دشوار می باشد که یک نمونه از آن، پوشش پوسته دارای خم دوگانه، با شبکه‌ای از جزءهای تخت می‌باشد [۲]. در تحلیل‌های غیرخطی با تغییر شکل‌های بزرگ، ناتوانی این جزءها نمود بیشتری دارد. در این گونه تحلیل‌ها، چنانچه شبکه‌بندی نخستین هم به خوبی گسترده شود، جابه‌جایی‌ها گاه چنان بزرگ خواهند بود که جزء تخت دچار تابیدگی خواهد می گردد.

کاستی‌های جزءها و قالب‌های پوسته‌ای تخت، پژوهشگران را بر آن داشته است تا راهی برای برپاسازی قالب‌های پیکره‌های پوسته‌ای خمدار بیندیشند. این کار چندان آسان نیست. خمیدگی و تاب هندسه این پیکره‌ها فرآیند آشنای ساخت قالب‌ها را ناکارا می‌کند. اکنون دانشمندان پذیرفته‌اند که برای برپا کردن چنین قالب‌هایی باید فرآیند پیشین را به کناری نهاد و یا به گونه‌ای آن را بازآرایی نمود. بیشترین دشواری کار، در ساماندهی پاره نخست قالب بوده و تاکنون ماتریس سختی پایه‌ای که بتواند ویژگی‌های ایستایی جزء پوسته‌ای را برآورده سازد پیدا نشده است. روش آشنای ساخت قالب، که بر رابطه‌سازی آزاد استوار می باشد، نیاز به برپایی ماتریس انباشتگر نیرو دارد. این ماتریس نمایشی از فرآیند انباشت نیروهای لبه‌ای در گره‌ها می باشد که از یک میدان تنش ثابت پدید می‌آید و فرآیند آن با ساماندهی آزمون جزء تکین انجام می‌پذیرد. اکنون ساخت قالب جزء پوسته‌ای خمدار دو پرسش بنیادین مواجه می باشد: نخست آن که میدان تنش ثابت برای پیکره پوسته خمدار چیست؟ و دوم آن که چگونه این میدان تنش برای همه ساختارهای هندسی یک پیکره، ویژگی‌های ایستایی را برقرار می‌سازد؟ بی‌گمان برای ساخت قالب جزءهای پوسته‌ای خمدار بر پایه رابطه‌سازی آزاد باید برای این پرسش‌ها پاسخی یافت. آزمون جزء تکین، با ساختار ویژه خود، برای جزءهای خمدار به هیچ روی پاسخگو نبوده و نیاز به بازآرایی دارد.

یکی دیگر از دشواری‌های کار با پوسته‌ها، اندرکنش پیچیده رفتارهای سازه‌ای آنها می باشد و در بیشتر نوشته‌ها، از اندرکنش میان اثرهای غشایی و خمشی یاد می‌شود. در این جا، این ویژگی، با شناسایی چگونگی اندرکنش حالت‌های کرنشی بررسی می گردد. در بیشتر جزءهای محدود، جابه‌جایی‌های جسم سخت و حالت‌های کرنشی ثابت با حالت‌های کرنشی مرتبه بالا درگیری کارمایه ندارند. لذا از همین جهت می باشد که اگر ماتریس سختی جزء در دستگاه پایه حالت‌های کرنشی آن برپا شود، درایه‌های درگیر آن، که اندرکنش کارمایه را میان این دو دسته حالت‌های کرنشی نشان می‌دهند، صفر خواهند بود. به سخن دیگر، تابع‌های پایه همتای آن ها متعامد کارمایه می باشند [۷]. نمایش ریاضی این گزاره همانند روابط زیر است:

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{B}_{q_{rc}} = \boldsymbol{\Delta}\,\boldsymbol{N}_{q_{rc}} = \left\lfloor \boldsymbol{B}_{q_r}\;\; \boldsymbol{B}_{q_c} \right\rfloor \\
&\boldsymbol{B}_{q_h} = \boldsymbol{\Delta}\,\boldsymbol{N}_{q_h} \\
&\boldsymbol{K}_{qrch} = \int_V \boldsymbol{B}_{qrc}{}^T\,\boldsymbol{D}_m\,\boldsymbol{B}_{qh}\,dV = 0
\end{aligned} \qquad (۹)
$$

در روابط فوق، زیرنویس q ، همانند قبل، اشاره به پایه حالت های کرنشی جزء دارد. همچنین، زیرنویس rc کوتاه شده r=*rigid body* و c=*constant strain* ، و نیز، زیرنویس h، کوتاه شده h=*higher order* می باشد. در جزءهای

Archive of SID
www.SID.ir

پوسته‌ای خمدار، ویژگی تعامد کارمایه، آن گونه که در رابطه (۹) آمده است، پدید نمی‌آید. معادله‌های حاکم بر پوسته، عملگر دیفرانسیلی Δ را چنان سامان می‌دهند که دیگر رابطه (۹) برپا نخواهد بود. از این رو، شماری درایه‌های درگیر از ماتریس سختی در پایه حالت‌های کرنشی، Kq ، ناصفر می‌گردند. این نشانگر آن است که حالت‌های کرنشی rc در اندرکنش با حالت‌های کرنشی h ، کارمایه می‌انبارند. با درگیری کارمایه میان این دو دسته حالت کرنشی، جداسازی آن ها از یک دیگر ناشدنی خواهد بود. چنین جداسازی برای ساخت قالب با روش پاره‌سازی به ماتریس‌های سختی حالت‌های کرنشی از آن جهت ضروری می باشد که عامل‌های آزاد تنها باید در پاره‌های همتای حالت‌های کرنشی مرتبه بالا گذارده شوند.

درگیری کارمایه‌های این دو دسته بررسی ویژگی همگرایی را نیز دشوار می‌کند. همگرا نشدن به پاسخ درست گاه وابسته به درگیری‌های کارمایه‌ای میان حالت‌های کرنشی rc و h است. در روش آشنای برپایی قالب‌های جزء محدود، که بر پایه رابطه‌سازی آزاد می‌باشد، تعامد کارمایه‌ها لازم نیست. در این روش، ساختار قالب به گونه‌ای ریخته می‌شود که کارمایه‌های درگیر به ویژگی همگرایی آسیبی نمی‌رسانند. اما در جزءهای پوسته‌ای، پیاده‌سازی این ساختار، دست کم در این زمان، شدنی نبوده و نیاز به بازآرایی آزمون جزء تکین و فرآیند سامان‌یابی ماتریس انباشتگر نیرو دارد. لذا، در برپاسازی قالب‌های پوسته‌های خمدار ناگزیر باید از این ساختار شایسته نگهدار همگرایی چشم پوشید.

یکی دیگر از ویژگی‌های جزءهای پوسته‌ای متقارن محوری آن است که شماری از حالت‌های کرنشی صفر آنها، یا همان جابه‌جایی‌های جسم سخت، کارمایه می‌انبارند. این ویژگی را می‌توان به سادگی، با شناسایی مقدارهای ویژه ماتریس‌های سختی چنین جزءهایی بررسی نمود. این ماتریس‌های سختی مقدار ویژه صفر ندارند، و یا شمار مقدارهای ویژه تهی آنها کمتر از شمار جابه‌جایی‌های جسم سخت است. از این رو، شماری از پژوهشگران جابه‌جایی‌های جسم سخت را برای جزءهای پوسته‌ای تعریف ننموده لذا بهتر آن است که آن ها را حالت‌های کرنشی صفر جزء با ویژه‌سختی‌های ناتهی دانست.

اکنون می‌توان دشواری‌های ساخت قالب‌های پوسته‌ای خم دار را چنین برشمرد: ساختار کنونی آزمون جزء تکین برای به کارگیری در جزءهای پوسته‌ای خمدار ناتوان بوده و نیاز به بازآرایی دارد. بر این پایه، قالب این گونه جزءها را نمی‌توان با روش کنونی برپا نمود. از سوی دیگر، جابه‌جایی‌های جسم سخت و حالت‌های کرنشی ثابت این جزءها با حالت‌های کرنشی مرتبه بالا درگیری کارمایه دارند. این درگیری و اندرکنش، در نبود ساختار ماتریس سختی رابطه‌سازی آزاد، به همگرایی آسیب خواهد رسانید. همچنین، فرآیند عامل دارسازی را که تنها برای سختی‌های همتای حالت‌های کرنشی مرتبه بالا انجام می‌گیرد، ناکام می‌گذارد.

راهکار ساخت قالب پوسته

بنیانگذاران دانش قالب‌های جزء محدود، چهار ویژگی همگرایی، پایداری، عامل داری، و همسان گردی را برای آنها برشمرده‌اند [۸]. ویژگی‌های همگرایی و پایداری با ساماندهی آزمون جزء تکین و ساختار ویژه ماتریس سختی برپا خواهد شد. هم چنین، عامل داری با وارد کردن عامل‌های آزاد در ماتریس سختی مرتبه بالا به انجام می‌رسد. این ویژگی‌ها در روش پاره‌سازی نیز به آسانی پیاده می‌شوند. در این روش، ماتریس سختی یک جزء نمونه را به ماتریس‌های سختی حالت‌های کرنشی آن می‌شکنند. آن گاه پاره‌های همتای حالت‌های کرنشی مرتبه بالا را عامل دار می‌سازند. عامل دار کردن چنان انجام می‌پذیرد که قالب همسان گرد هندسی باشد. روشن است، برای آن که بایسته همگرایی برقرار گردد، جزء نمونه نخستین باید آزمون وصله یا جزء تکین را به درستی پاسخ گوید، و یا در تحلیل، توانایی خود را در همگرایی به پاسخ درست نشان دهد. در فراگیری قالب به دست آمده از فرآیند پاره‌سازی ماتریس سختی نمونه، جای سئوال دارد. هر قدر رابطه‌سازی جزء نمونه نخستین فراگیرتر باشد، قالب ساخته شده نیز برتر خواهد بود. با این رو، باید به یاد داشت که شیوه نخست ساخت قالب‌ها نیز همیشه قالب فراگیر را به دست نمی‌دهد، و پژوهش‌ها در این زمینه هم چنان ادامه دارد.

پیش از پرداختن به فرآیند ساخت قالب پوسته استوانه ای، شایسته است چند مفهوم از رابطه‌سازی آزاد یادآوری شود. این رابطه‌سازی، گونه ویژه‌ای از ماتریس سختی را با نام ماتریس سختی گسترش‌یافته شناسایی

Archive of SID

www.SID.ir

می‌کند [۷]. این همان ماتریس سختی است کـه در پایـه حالت‌های کرنشی جزء برپا می‌شود. این ماتریس هر چنـد کاربرد تحلیلی ندارد، در فرآیند رابطه‌سازی آزاد و سـاخت قالب‌های جزء محدود بـه کـار مـی‌آیـد. مـاتریس سـختی گسترش‌یافته را می‌توان بـر پایـه جابـه‌جـایی‌هـای جسـم سخت و حالت‌های کرنشی ثابت، rc ، و حالت‌های کرنشی مرتبه بالا، h ، همانند روابط ذیل بخش‌بندی نمود:

$$\boldsymbol{K}_q = \begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_{qrc} & \boldsymbol{K}_{qrch} \\ \boldsymbol{K}_{qrch}^T & \boldsymbol{K}_{qh} \end{bmatrix} \qquad (۱۰)$$

که زیرماتریس‌های آن از روابط ذیل به دست می آیند:

$$\boldsymbol{K}_{qrc} = \int_V \boldsymbol{B}_{qrc}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{D}_m \boldsymbol{B}_{qrc}\, \mathrm{dV} = \mathrm{V}\, \boldsymbol{B}_{qrc}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{D}_m \boldsymbol{B}_{qrc}$$

$$\boldsymbol{K}_{qrch} = \int_V \boldsymbol{B}_{qrc}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{D}_m \boldsymbol{B}_{qh}\, \mathrm{dV}$$

$$\boldsymbol{K}_{qh} = \int_V \boldsymbol{B}_{qh}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{D}_m \boldsymbol{B}_{qh}\, \mathrm{dV} \qquad (۱۱)$$

در روابـط فـوق، $\boldsymbol{Kq}_{rc}$ زیرمـاتریس سـختی مربـوط بـه حالت های جا به جایی جسم سخت و کرنش ثابت، و $\boldsymbol{Kq}_h$ زیرماتریس سختی مربوط به حالت های کرنشی مرتبه بالا می باشند. $\boldsymbol{Kq}_{rch}$ زیرماتریسی است که درایه‌هـای سـختی درگیر را در خود جای می‌دهد. رابطه‌سـازی آزاد، سـاختار ویژه‌ای همانند رابطه زیر را برای ماتریس سختی پیشـنهاد می‌کند، که هیچ شرطی را بر زیرماتریس سختی درگیر بار نمی‌نماید [۷]:

$$\boldsymbol{K} = \frac{1}{V} \boldsymbol{L} \boldsymbol{D}_m \boldsymbol{L}^T + \boldsymbol{H}_h^T \boldsymbol{K}_{qh} \boldsymbol{H}_h \qquad (۱۲)$$

که در آن، $\boldsymbol{L}$ ماتریس انباشتگر نیـرو اسـت، کـه از آزمـون جزء تکین به دست می آید [7]. همچنـین، $\boldsymbol{H}_h$ ، مـاتریس نگاشت جابه‌جایی‌های گرهی به حالت‌های کرنشـی مرتبـه بالا، و وارون ماتریس $\boldsymbol{G}_h$ می باشد. همتای گسـترش‌یافتـه ماتریس سختی رابطه (۱۲) برابر روابط زیر است:

$$\boldsymbol{K}_q = \begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_{qrc} & \boldsymbol{P}_{rc}^T \boldsymbol{G}_h \\ \boldsymbol{G}_h^T \boldsymbol{P}_{rc} & \overline{\boldsymbol{K}}_{qh} \end{bmatrix} \qquad (۱۳)$$

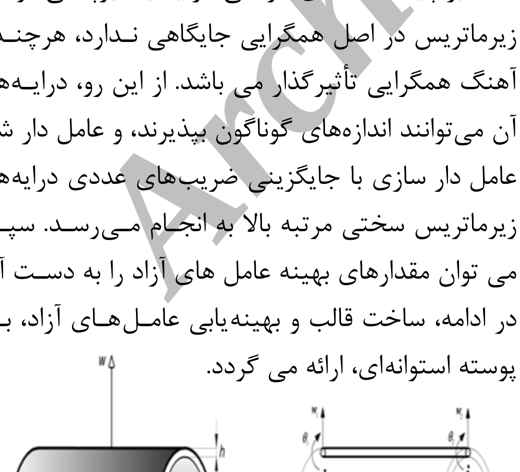
$$\overline{\boldsymbol{K}}_{qh} = \boldsymbol{K}_{qh} + \frac{1}{V} \boldsymbol{G}_h^T \boldsymbol{L} \boldsymbol{D}_m \boldsymbol{L}^T \boldsymbol{G}_h \qquad (۱۴)$$

که در آن هـا، $\boldsymbol{Kq}_{rc}$ ، $\boldsymbol{P}_{rc}$ ، و $\boldsymbol{L}$ از آزمـون جـزء تکـین بـه دست می‌آیند. $\boldsymbol{Kq}_{rc}$ ماتریس سختی گسـترش‌یافتـه بـرای جابه‌جایی‌های جسم سخت و حالت‌های کرنشی ثابت بوده و ماتریس $\boldsymbol{P}_{rc}$ نیز از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\boldsymbol{P}_{rc} = \boldsymbol{L} \boldsymbol{D}_m \boldsymbol{B}_{qrc} \qquad (۱۵)$$

در این مقاله، برای برپاسـازی قالـب جـزء محـدود پوسته استوانه ای از روش بازسازی‌شـده پـاره‌سـازی بهـره گرفته می‌شود. این گونه پاره‌سازی با بهره‌جـویی از رابطـه (۱۰) انجام می‌پذیرد. در این روش یک جزء نمونه بـه کـار می‌رود. از آن جا که برای جزء پوسته‌ای، آزمـون وصـله یـا جزء تکین انجام ناشدنی است، ویژگـی همگرایی بایـد در کاربرد بررسی شود. باید آگاه بود، جـزء پوسـته‌ای اسـتوانه ای به کار رفتـه، تحلیـل بـا روش جـزء محـدود را همگـرا می‌کند. از این رو، می‌توان آنها را در فرآیند قالب‌سازی، بـا آسودگی به کار بست. از آن جا که آزمون جزء تکین بـرای پوسته‌ها کاربرد ندارد، ماتریس‌های $\boldsymbol{L}$ و $\boldsymbol{P}_{rc}$ در دست نبوده لذا نمی‌توان درایه‌های درگیـر مـاتریس سـختی گسـترش یافته، یا همـان زیرمـاتریس $\boldsymbol{Kq}_{rch}$ را هماننـد رابطـه (۱۳) سامان داد. اما در روش پاره‌سازی کنونی، که از رابطه‌سازی یـک جـزء شایسـته شـناخته‌شـده بهـره مـی‌جویـد، ایـن زیرماتریس خود به خود پدیدار می‌شود. از آن جا که جـزء نمونه، شرط همگرایی را برقرار می‌سازد، ایـن زیرمـاتریس، چنان چه عامل دار نشـود، بـه همگرایـی آسـیب نخواهـد رسـانید. زیـرا عامـل دار کـردن آن، افـزون بـر آشـفتگی همگرایی، گاه بـه پیـدایش مقـدارهای ویـژه منفـی بـرای ماتریس سختی جزء خواهد انجامید. این پدیـده، بـه ویـژه هنگامی رخ می‌دهد که عامل‌های آزاد بزرگ انتخاب شوند.

از سوی دیگر، زیرمـاتریس سـختی مرتبـه بـالا، $\boldsymbol{Kq}_h$، بر پایه حالت‌های کرنشی مرتبه بالا برپا می‌شود. این زیرماتریس در اصل همگرایی جایگاهی نـدارد، هرچنـد در آهنگ همگرایی تأثیرگذار می باشد. از این رو، درایـه‌هـای آن می‌توانند اندازه‌های گوناگون بپذیرند، و عامل دار شوند. عامل دار سازی با جایگزینی ضریب‌های عددی درایه‌هـای زیرماتریس سختی مرتبه بالا به انجام مـی‌رسـد. سـپـس می توان مقدارهای بهینه عامل های آزاد را به دسـت آورد. در ادامه، ساخت قالب و بهینه‌یابی عامـل‌هـای آزاد، بـرای پوسته استوانه‌ای، ارائه می گردد.



شکل ۱: جزء پوسته استوانه‌ای.

Archive of SID

قالب پوسته استوانه ای

در این بخش، فرآیند برپایی قالب جزء پوسته متقارن محوری استوانه‌ای، با چهار درجه آزادی، بررسی می‌شود. نخست، ویژگی‌های این جزء بررسی می‌گردد، آن گاه، با بهره‌جویی از روش پاره‌سازی و حالت‌های کرنشی جزء، ماتریس سختی اصلی برپا، و عامل دار شده و در پایان، قالب جزء پوسته استوانه‌ای بهینه‌سازی می‌شود. جزء پوسته متقارن محوری استوانه‌ای، دو گره و چهار درجه آزادی، یک جابه‌جایی و یک دوران در هر گره، همانند شکل (۱) دارد. از این رو، چهار حالت کرنشی را الگوسازی می‌کند. این حالت‌های کرنشی، با شیب کرنش‌های زیر نشان داده می‌شوند:

$$q_1 = w_{\circ} \quad q_2 = \theta_{\circ} \quad q_3 = \kappa_{x\circ} \quad q_4 = \kappa_{xx\circ} \qquad (۱۶)$$

این شیب کرنش‌ها، به ترتیب، جابه‌جایی، دوران، انحنای ثابت، و انحنای خطی را در نقطه میانی جزء برآورد می‌کنند. چنانچه این جزء با بهره‌جویی از نشانگان شیب کرنش رابطه‌سازی شود، ماتریس تابع‌های پایه حالت‌های کرنشی آن همانند زیر به دست می‌آیند [۵]:

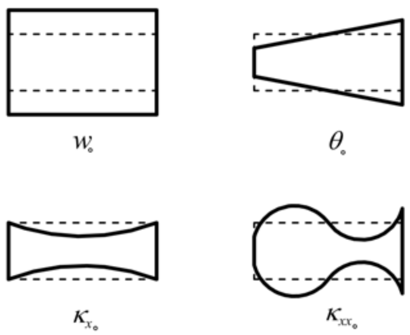
$$N_q = \begin{bmatrix} 1 & x & \frac{x^2}{2} & \frac{x^3}{6} \end{bmatrix} \qquad (۱۷)$$

اکنون، ماتریس نگاشت $\boldsymbol{G}$ با جایگذاری مختصه x دو گره، $L/۲$- و $L/۲$، در تابع‌های پایه و مشتق آن ها ساخته می‌شود:

$$\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{-L}{2} & \frac{L^2}{8} & \frac{-L^3}{48} \\ 0 & 1 & \frac{-L}{2} & \frac{L^2}{8} \\ 1 & \frac{L}{2} & \frac{L^2}{8} & \frac{L^3}{48} \\ 0 & 1 & \frac{L}{2} & \frac{L^2}{8} \end{bmatrix} \qquad (۱۸)$$

هم چنین، وارون این ماتریس چنین خواهد بود:

$$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{L}{8} & \frac{1}{2} & \frac{-L}{8} \\ \frac{-3}{2L} & \frac{-1}{4} & \frac{3}{2L} & \frac{-1}{4} \\ 0 & \frac{-1}{L} & 0 & \frac{1}{L} \\ \frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} & \frac{-12}{L^3} & \frac{6}{L^2} \end{bmatrix} \qquad (۱۹)$$



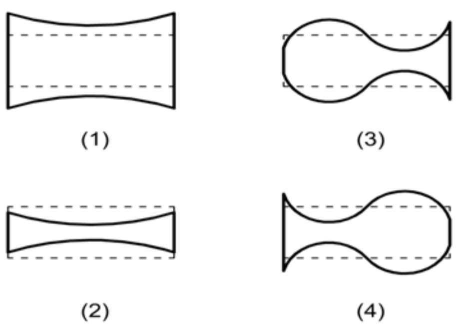
شکل ۲: حالت‌های کرنشی جزء پوسته استوانه‌ای.

ستون‌های ماتریس $\boldsymbol{G}$ بردارهای پایه حالت‌های کرنشی جزء پوسته استوانه‌ای هستند. شکل (۲) حالت‌های کرنشی این جزء را نشان می‌دهد. این بردارها، ویژگی تعامد کارمایه را بر آورده نمی سازند. از این رو، حالت‌های کرنشی مرتبه بالا با جابه‌جایی‌های جسم سخت و حالت‌های کرنشی ثابت اندرکنش دارند. باید آگاه بود که ماتریس سختی جزء در پایه بردارهای ویژه آن قطری می‌شود. این بردارهای ویژه، که با انجام تحلیل مقدار ویژه به دست می آیند، مطابق روابط زیر می باشند:

$$\begin{aligned} &Mode\,1 : \{ \quad \alpha \quad -1 \quad \alpha \quad 1 \} \\ &Mode\,2 : \{ \; -\frac{1}{\alpha} \quad -1 \quad -\frac{1}{\alpha} \quad 1 \} \\ &Mode\,3 : \{ \; -\beta \quad 1 \quad \beta \quad 1 \} \\ &Mode\,4 : \{ \; \frac{1}{\beta} \quad 1 \quad -\frac{1}{\beta} \quad 1 \} \end{aligned} \qquad (۲۰)$$

در روابط فوق، ضریب‌های α و β وابسته به شعاع استوانه، R، و درازای جزء، L، می‌باشند. نمایش این حالت‌های متعامد کارمایه در شکل (۳) ارائه شده است.

حال می توان قالب پوسته استوانه‌ای را برپا نمود. برای این کار، نخست، ماتریس کرنش ـ حالت کرنشی، $\boldsymbol{B}q$، به دست می‌آید. در این جزء پوسته‌ای، کرنش‌ها همانند روابط زیر شناسایی می‌شوند [۱]:



شکل ۳: نمایش بردارها و تابع‌های ویژه جزء پوسته استوانه‌ای.

Archive of SID

www.SID.ir

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\begin{Bmatrix}\varepsilon_\theta\\ \kappa_x\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\dfrac{w}{R}\\ \dfrac{d^2}{dx^2}w\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{\boldsymbol{N}_q}{R}\\ \dfrac{d^2}{dx^2}\boldsymbol{N}_q\end{bmatrix}\boldsymbol{q} \qquad (۲۱)$$

پس، ماتریس $\boldsymbol{B}q$ برابر رابطه زیر خواهد شد:

$$\boldsymbol{B}_q=\begin{bmatrix}\dfrac{\boldsymbol{N}_q}{R}\\ \dfrac{d^2}{dx^2}\boldsymbol{N}_q\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{N_{q1}}{R} & \dfrac{N_{q2}}{R} & \dfrac{N_{q3}}{R} & \dfrac{N_{q4}}{R}\\ \dfrac{d^2}{dx^2}N_{q1} & \dfrac{d^2}{dx^2}N_{q2} & \dfrac{d^2}{dx^2}N_{q3} & \dfrac{d^2}{dx^2}N_{q4}\end{bmatrix} \qquad (۲۲)$$

با جایگذاری $\boldsymbol{N}q$ از رابطه (۱۷)، $\boldsymbol{B}q$ مطابق رابطه زیر به دست خواهد آمد:

$$\boldsymbol{B}_q=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{R} & \dfrac{x}{R} & \dfrac{x^2}{2R} & \dfrac{x^3}{6R}\\ 0 & 0 & 1 & x\end{bmatrix} \qquad (۲۳)$$

اینک، با بهره‌جویی از رابطه (۴)، ماتریس سختی اصلی همانند روابط زیر برپا می‌شود:

$$\boldsymbol{K}_q=\pi Eh\times\begin{bmatrix}\dfrac{2L}{R^2} & & & \\ 0 & \dfrac{L^3}{6R^2} & & \\ \dfrac{L^3}{12R^2} & 0 & (\dfrac{L^5}{160R^2}+\dfrac{h^2L}{6}) & \\ 0 & \dfrac{L^5}{240R^2} & 0 & (\dfrac{L^7}{8064R^2}+\dfrac{h^2L^3}{72})\end{bmatrix} \qquad (۲۴)$$

تنها درایه ناصفر زیرماتریس $\boldsymbol{K}q_{rch}$، درایه ۲×۴، برابر $\dfrac{\pi EhL^5}{240R^2}$ است، که نمایش‌دهنده درگیری کارمایه میان دوران جسم سخت و تنها حالت کرنشی مرتبه بالای این پوسته، $\kappa_{xx_\circ}$، می‌باشد. این درایه نباید عامل دار شود. از سوی دیگر، زیرماتریس $\boldsymbol{K}q_h$ تنها یک درایه برابر $\dfrac{\pi EhL^7}{8064R^2}+\dfrac{\pi Eh^3L^3}{72}$ دارد، که می‌توان آن را عامل دار نمود. برای این کار، دو عامل β_1 و β_2 به کار می‌رود. بدین روی، قالب اصلی جزء پوسته‌ای استوانه‌ای مطابق روابط ذیل شناسایی می گردد:

$$\boldsymbol{K}_q=\pi Eh\times\begin{bmatrix}\dfrac{2L}{R^2} & & & \\ 0 & \dfrac{L^3}{6R^2} & & \\ \dfrac{L^3}{12R^2} & 0 & (\dfrac{L^5}{160R^2}+\dfrac{h^2L}{6}) & \\ 0 & \dfrac{L^5}{240R^2} & 0 & (\beta_1\dfrac{L^7}{R^2}+\beta_2h^2L^3)\end{bmatrix} \qquad (۲۵)$$

قالب جزء پوسته‌ای استوانه‌ای را نیز می‌توان با بهره‌گیری از ماتریس نگاشت $\boldsymbol{H}$ برپا کرد:

$$\boldsymbol{K}(\beta_1,\beta_2)=\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{K}_q\,\boldsymbol{H} \qquad (۲۶)$$

یادآوری می شود، عامل‌های آزاد نباید چنان باشند که ماتریس سختی، مقدار ویژه منفی پیدا نماید.

اکنون، برای درست آزمایی قالب پیشنهادی جزء پوسته‌ای استوانه‌ای، از روش بهینه سازی دگردیسی استفاده می‌شود [۸]. کارمایه خمشی درست انباشته در جزء، با صفر انگاشتن ضریب پوآسون، به صورت رابطه زیر می باشد:

$$U_{Mex}=\frac{1}{2}\int_V\boldsymbol{\varepsilon}_{ex}^T\boldsymbol{D}_m\boldsymbol{\varepsilon}_{ex}\,dV=\frac{Eh}{2}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\begin{Bmatrix}\varepsilon_{\theta ex} & \kappa_{xex}\end{Bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \dfrac{h^2}{12}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_{\theta ex}\\ \kappa_{xex}\end{Bmatrix}(2\pi R)\,dx \qquad (۲۷)$$

از سوی دیگر، تابع درست جابه‌جایی این جزء برابر چندجمله‌ای تیلور، همانند رابطه زیر، می‌باشد:

$$w_{ex}=w_\circ+\theta_\circ x+\kappa_{x\circ}\frac{x^2}{2}+\kappa_{xx\circ}\frac{x^3}{6}+\cdots \qquad (۲۸)$$

از آن جا که هیچ بار گسترده میانی بر جزء وارد نمی‌شود، تنها چهار جمله نخست دنباله تیلور ناتهی می باشند. بردار تابع‌های کرنش درست این جزء برابر رابطه زیر می باشد:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{ex}=\begin{Bmatrix}\varepsilon_{\theta ex}\\ \kappa_{xex}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\dfrac{w_{ex}}{R}\\ \dfrac{d^2}{dx^2}w_{ex}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\dfrac{1}{R}(w_\circ+\theta_\circ x+\kappa_{x\circ}\dfrac{x^2}{2}+\kappa_{xx\circ}\dfrac{x^3}{6})\\ \kappa_{x\circ}+\kappa_{xx\circ}x\end{Bmatrix} \qquad (۲۹)$$

از جایگذاری رابطه (۲۹) در رابطه (۲۷)، تابع کارمایه کرنشی خمشی درست مطابق رابطه (۳۰) به دست می‌آید:

$$U_{Mex}=EhL\pi\,[(\frac{1}{R})w_\circ^2+(\frac{L^2}{12R})\theta_\circ^2+(\frac{L^4}{320R}+\frac{h^2R}{12})\kappa_{x\circ}^2+(\frac{L^2}{12R})w_\circ\kappa_{x\circ}+(\frac{L^4}{240R})\theta_\circ\kappa_{xx\circ}+(\frac{L^6}{16128R}+\frac{h^2L^2R}{144})\kappa_{xx\circ}^2] \qquad (۳۰)$$

Archive of SID

www.SID.ir

کارمایه کرنشی که قالب در جزء انباشت می‌کند، معادله رابطه زیر خواهد بود:

$$U(\beta_1,\beta_2) = EhL\pi\,[(\frac{1}{R})w_\circ^{\,2} + (\frac{L^2}{12R})\theta_\circ^{\,2} + (\frac{L^4}{320R} + \frac{h^2 R}{12})\kappa_{x\circ}^{\,2} + (\frac{L^2}{12R})w_\circ\kappa_{x\circ} + (\frac{L^4}{240R})\theta_\circ\kappa_{xx\circ} + (\beta_1\frac{L^6}{2R} + \beta_2\frac{h^2L^2R}{2})\,\kappa_{xx\circ}^{\,2}] \qquad (۳۱)$$

از سنجش کارمایه قالب در این رابطه، با کارمایه درست از رابطه (۳۰)، اندازه بهینه عامل‌های آزاد مطابق رابطه ذیل پیدا می‌شود:

$$\beta_1 = \frac{1}{8064}\ ,\ \ \beta_2 = \frac{1}{72} \qquad (۳۲)$$

جایگذاری این اندازه‌ها در قالب (۲۶)، همان گونه که انتظار می رفت، ماتریس سختی آشنای جزء پوسته استوانه‌ای را به دست می‌دهد، که در بیشتر کتاب‌های نگره اجزای محدود آمده، و کارآیی خود را در کاربرد نشان داده است.

می‌توان در این فرآیند بهینه‌سازی، کارمایه کرنشی برشی را نیز گنجاند. تابع درست کارمایه برشی جزء پوسته‌ای استوانه‌ای برابر رابطه زیر می‌باشد:

$$U_{Vex} = EhL\pi(\frac{f_s\,h^4\,R}{72}) \qquad (۳۳)$$

کارمایه کرنشی جزء با برهم‌نهی کارمایه‌های خمشی و برشی از رابطه‌های (۳۰) و (۳۳)، مطابقه رابطه (۳۴) به دست می آید:

$$U = U_{Mex} + U_{Vex} = EhL\pi\,[(\frac{1}{R})w_\circ^{\,2} + (\frac{L^2}{12R})\theta_\circ^{\,2} + (\frac{L^4}{320R} + \frac{h^2R}{12})\kappa_{x\circ}^{\,2} + (\frac{L^2}{12R})w_\circ\kappa_{x\circ} + (\frac{L^4}{240R})\theta_\circ\kappa_{xx\circ} + [\frac{L^6}{16128R} + \frac{h^2L^2R}{2}(\frac{1}{72} + \frac{f_s}{36}\ \frac{h^2}{L^2})]\,\kappa_{xx\circ}^{\,2}] \qquad (۳۴)$$

از سنجش کارمایه قالب در رابطه (۳۱) با کارمایه درست از این رابطه اخیر، اندازه بهینه عامل‌های آزاد برابر مقدار زیر خواهد بود:

$$\beta_1 = \frac{1}{8064}\ ,\ \ \beta_2 = \frac{1}{72} + \frac{1}{36}f_S\left(\frac{h}{L}\right)^2 \qquad (۳۵)$$

اندازه (h/L) را می‌توان ضریب کلفتی پوسته دانست. در پوسته‌های نازک با ضریب کلفتی کمتر از ۰/۰۵ ، پاره دوم عامل آزاد β_2 بسیار کوچک خواهد بود، و می‌توان به سادگی از آن چشم‌پوشی نمود.

نتیجه‌گیری

برپاسازی قالب جزءهای پوسته‌ای خم دار با بهره‌جویی از راهکار آشنای قالب‌سازی، که بر رابطه‌سازی آزاد استوار است، امری ناشدنی بوده و نیاز به بازآرایی آزمون جزء تکین دارد، که تاکنون انجام نشده است و پژوهشگران آن را دشوار یافته‌اند. ناشناس بودن میدان کرنش ثابت که شرط‌های ایستایی را برآورد، اندرکنش میان حالت‌های کرنشی جزء و درگیری کارمایه‌های همتای آن ها، و انباشت کارمایه در حالت‌های جابه‌جایی و دوران جسم سخت، از دشواری‌های پیش روی پژوهشگران در ساخت قالب‌های پوسته‌ای خم دار هستند. در این مقاله، برای برپا کردن قالب پوسته استوانه ای، از ماتریس سختی اصلی یک جزء نمونه بهره گرفته شده است. پس از سامان دادن این ماتریس، تنها زیرماتریس سختی همتای حالت‌های کرنشی مرتبه بالا عامل دار می‌شود. با پرهیز از عامل دار کردن زیرماتریس درگیر میان جابه‌جایی‌های جسم سخت و حالت‌های کرنشی ثابت با حالت‌های کرنشی مرتبه بالا، آسیبی به شرط همگرایی قالب نخواهد رسید. در پایان، برای درست آزمایی قالب پیشنهادی، از روش شناخته شده بهینه سازی دگردیسی استفاده شده است.

مراجع

۱- محمد رضایی پژند و محمد مؤیدیان، نگره جزء محدود، دانشگاه آزاد اسلامی مشهد با همکاری انتشارات سخن‌گستر، ۱۳۸۲.

2 - Brebbia, C. A. and Connor, J. J. (1973). *Fundamentals of Finite Element Techniques*, Butterworth & Co (Publishers) Ltd.

3 - Bernadou, M. (1996). *Finite Element Methods for Thin Shell Problems*, John Wiley & Sons.

4 - Felippa, Carlos A. (2000). "Recent Advances in Finite Element Templates." *Computational Mechanics for The 21st Century*, Saxe-Coburn Publications, Edinburgh, PP. 71-98.

Archive of SID

www.SID.ir

5 - Dow, John O. (1999). *A Unified Approach to the Finite Element Method and Error Analysis Procedures*, Academic Press.

6 - Bergan, P. G. (1980). "Finite Elements Based on Energy Orthogonal Functions." *Int. J. Numer. Meth. Engrg.,* Vol. 15, PP. 1541-1555.

7 - Bergan, P. G. and Nygard, M. K. (1984). "Finite elements with increased freedom in choosing shape functions." *Int. J. Numer. Meth. Engrg.,* Vol. 20, PP. 643-664.

8 - Felippa, Carlos A. (2003). "A template tutorial." *Delivered in Centro Internacional de Metodos Numericos en Ingeneria (CIMNE),* Barcelona, Spain.

واژه های انگلیسی به ترتیب استفاده در متن

1 - Individual Element Test
2 - Morphing
3 - Template
4 - Lumping Matrix
5 - Principal Stiffness Matrix
6 - Energy Orthogonal
7 - Strain Gradient Notation
8 - Rotational Invariant

Archive of SID

www.SID.ir