بازتاب و شکست موج SH در مرز ناهموار بین دو محیط ایزوتروپ جانبی

نوید شاد منامن[۱] و مرتضی اسکندری قادی[۲]*

[۱]دانشجوی دوره دکتری مؤسسه ژئوفیزیک دانشگاه تهران

[۲]استادیار گروه علوم پایه مهندسی - پردیس دانشکده های فنی - دانشگاه تهران

(تاریخ دریافت ۸۵/۳/۷ , تاریخ دریافت روایت اصلاح شده ۸۷/۲/۸ , تاریخ تصویب ۸۷/۵/۱)

چکیده

بیشتر تئوري هاي موجود در انتشار امواج الاستيك مستقيماً براي محيط هاي واقعي درون زمين قابل كاربرد نيستند، چـرا كـه در ايـن تئوري ها، مرزها يا فصل مشترك بين لايه‌ها تخت و موازي فرض شده‌اند. اهميت بررسي انتشار امواج الاستيك در مرزهاي نـاهموار از آن جـا ناشي مي‌شود كه بيشتر فصل مشترك ها در لايه‌هاي زمين داراي انحنا هستند. در اين مقاله، با استفاده از روش تقريب رايلي بازتاب و شكست موج تخت SH در فصل مشترك موجدار بين دو نيم فضاي ايزوتروپ جانبي مورد بررسي قرار مي‌گيرد. تموج فصل مشترك باعث مي‌شود كه علاوه بر امواج بازتابي و انكساري معمول، بخشي از انرژي موج SH ورودي در عبور از فصل مشترك ناهموار بـه يـك سـري امـواج بازتـابي و انكساري پراشي تبديل گردد. فرمول بندي و محاسبات عددي نشان مي‌دهند كه دامنه اين امواج تابعي از زاويه تابش، فركـانس مـوج ورودي، تموج مرز و خواص ارتجاعي نيم فضاها است. نتايج تحليلي اين مقاله براي حالت ساده‌تر يعني ايزوتروپ بر نتايج آسانو (۱۹۶۰) كاملاً منطبـق بوده و به منظور كنترل محاسبات عددي نتايج اين مقاله براي حالت ايزوتروپ با نتايج آسانو (۱۹۶۰) مقايسه شده است.

واژه های کلیدی : موج SH - بازتاب - شکست - پراش - تموج فصل مشترک - روش رایلی

مقدمه

امواج الاستيك حاوي اطلاعات زيادي درباره محيطي كه از آن عبور مي‌كنند، هستند. به ويژه اين كه عبور امواج لرزه‌اي از درون زمين در اكتشاف مواد پنهان با ارزش و نيز آگاهي از ساختار دروني زمين بسيار مفيد است. از اين رو، مطالعه انتشار امواج الاستيك و بازتـاب و شكسـت آنهـا از مرزهاي مختلف از اهميت به سزايي، به ويژه در زمينه‌هاي مهندسي، ژئوفيزيك و زلزلـه‌شناسـي برخـوردار اسـت. بـه همـين دليـل، مسـائل متعـدي در ايـن ارتبـاط توسـط پژوهشگران بسياري مطرح شـده اسـت كـه از جملـه آنهـا مي‌توان به اوينـگ و همكـاران [۱]، اكـي و ريچـاردز [۲]، شـريف و گلـدارت [۳]، لـي و والاس [۴] و اوديـاس [۵] اشاره كرد.

وجود ناپيوستگي در رفتـار محـيط الاسـتيك باعـث بازتاب و شكست امواج مـي‌شـود و ايـن امـواج بازتابيـده و انكساري علاوه بر ويژگي هاي محـيط، بـه هندسـه فصـل مشترك (ناپيوستگي) و فركانس امواج ورودي نيز بسـتگي دارند. تحقيقات اخير در زمينه انعكاس و انكسـار امـواج از فصل مشـترک دو محـيط بـه چادهـاري و همكـاران [۶]، تومار و گارگ [۷] و سينگ و تومار [۸] مربـوط مـي‌شـود. چادهاري و همكاران [۶] مسئله انكسار مـوج تخـت SH از صفحات مسلح به تقويتي را بررسي كردند. در اين بررسـي صفحات مسلح قابل جايگزيني با محيط ايزوتـروپ جـانبي هستند. تومار و گارگ [۷] انعكاس و انكسار امواج از فصـل مشترك دو نيم فضايي كه هر يک شـامل مـوادي هسـتند كه اصطلاحا جامـد كشسـان در مقيـاس ميكـرو[۱] ناميـده مي‌شوند را بررسي كرده‌اند. در ايـن مـواد ذرات بزرگتـر از نقاط رياضي بوده و وضعيت آنها در هر لحظـه از زمـان بـا بردارهاي تغيير مكان و چرخش و كشـيدگي يـا فشـردگي آن بيان مي‌شوند. سينگ و تومـار [۸] انعكـاس و انكسـار امواج عرضي از فصل مشترك دو نيم فضـاهاي متشـكل از جامد متخلخل را بررسي كرده‌اند.

ناپيوستگي‌هاي موجود در فصل مشـترك لايـه‌هـاي زمين هميشه تخت نيستند و در نتيجه جـايگزيني آن هـا با سطح تخت با تقريـب همـراه مـي باشـد. در واقـع، ايـن ناپيوستگي‌ها معمولاً ناصاف و يـا مـوج‌دار بـوده و طبيعـت ناهموار آنها، بازتاب و شكست امواج الاستيك را تحت تاثير قرار مي‌دهد. به عبارت ديگر، هنگامي كه امواج حجمي بـه سطح آزاد غير تخت مي‌رسند، ناهمواري هاي سطح باعـث ايجاد پراش مي‌شوند.

* نویسنده مسئول : تلفن : ۶۱۱۱۲۱۷۱ , فاکس : ۶۶۴۶۹۸۰۹ , Email: ghadi@ut.ac.ir

در فرايند گسترش تئوري انتشار امواج و روش هاي به كار رفته در محيط هاي با مرز ناهموار همانند مرزهاي زمين‌شناسي تعريف مشخصي از ناهمواري ضروري مي باشد كه به طور كلي آنها را مي‌توان به سه دسته زير تقسيم نمود:

- لايه نازك با ضخامت متغير؛ هر قطعه‌ايي از چنين لايه‌اي ويژگي هاي فركانسي خاص خود را دارد.
- مرز تيز نابرابر؛ در قطعات مختلف اين گونه از مرزها امپدانس صوتي با حالت هاي گوناگون و با ضخامت هاي متفاوت تغيير مي‌كند.
- مرز ناهموار؛ داراي برآمدگي‌ها و فرورفتگي‌ها و يا ناصافي هاي دلخواه است. براي نمونه مرز سينوسي اين گونه است.

در اين مقاله مرز نوع سوم يعني مرز ناهموار مورد توجه قرار مي گيرد. چنين مرزهايي در مقايسه با مرزهاي تيز به مرزهاي زمين‌شناسي واقعي شبيه‌تر هستند هر چند كه مدل مرزهاي تيز اغلب مبناي مطالعات در زمينه انتشار امواج بوده‌اند [۹].

امواج لرزه‌اي ناشي از زمين لرزه‌ها در مسير خود با حوزه‌هاي كوهستاني و ريشه كوه ها مواجه مي‌شوند، بنابراين اين ناهمواري ها بر بازتاب و عبور امواج الاستيك از محيط تأثير مي‌گذارند. از اين رو، مطالعه ويژگي هاي ديناميكي امواج بازتابيده و انكساري از سطوح ناهموار از اهميت كاربردي زيادي برخوردار مي باشد. چون حل اين گونه مسائل داراي پيچيدگي‌هاي رياضي قابل توجهي است، لذا جواب هاي دقيقي براي آنها تاكنون پيدا نشده است. با اين حال، روشهاي تقريبي براي محاسبه ميدان هاي تنش و تغيير مكان ناشي از پراش در سطوح ناهموار ارائه شده است [۱۰].

نخستين بار، لرد رايلي [۱۱] بازتاب و شكست امواج نور و صوت از سطوح ناهموار را مورد بررسي قرار داد. بررسي‌هاي رايلي در ساير رشته‌هاي مرتبط با تئوري انتشار امواج نيز مورد كاربرد وسيعي واقع گرديد. در روش رايلي معادله مرز موج‌دار و در نتيجه شرايط مرزي در مرز موج‌دار با سريهاي فوريه بيان مي‌شوند و ضرايب مجهول در اين روش براي هر درجه‌اي از تقريب برحسب مشخصات مرز تعيين مي گردند. آسانو [۱۲، ۱۳ و ۱۴] بازتاب و شكست امواج الاستيك در مرز موج‌دار را با استفاده از روش رايلي مورد مطالعه قرار داد. ابوباكر [۱۵]، دونكين و ارينگن [۱۶] از تكنيك آشفتگي رايس [۱۷] جهت بررسي بازتاب و شكست امواج الاستيك در سطوح ناهموار استفاده كردند كه پس از آن، مطالعات گسترده‌اي در زمينه بازتاب و شكست امواج الاستيك، از جمله امواج SH در فصل مشترك موج‌دار بين دو نيم فضاي ارتجاعي صورت گرفته است.

در اين مقاله، بازتاب و شكست امواج SH در فصل مشترك موجدار بين دو نيم فضاي ارتجاعي هر يك با رفتار ايزوتروپ جانبي مورد بررسي قرار مي‌گيرد. در واقع، اين تحقيق در ادامه كارهاي صورت گرفته در اين زمينه، به ويژه توسط آسانو [۱۲] و تومار و سايني [۱۸] و تومار و همكاران [۱۹] است، با اين تفاوت كه معادله فصل مشترك موج‌دار براي مرتبه‌هاي بالاتري از بسط فوريه نيز گسترش داده مي‌شود. از روش تقريب رايلي جهت پيدا كردن ضرايب بازتاب و عبور براي تقريب درجه اول از تموج فصل مشترك استفاده گرديده است. لازم به ذكر است كه تومار و همكاران [۱۹] فرمولاسيون مسئله را با بسط فصل مشترک دو محيط به صورت فوريه تا مرتبه يک انجام داده‌اند، در حالي كه در اين مقاله تابع فصل مشترک دو محيط به شكل كلي سري فوريه بسط داده شده و ضرايب بازتاب تا مرتبه ۳ به صورت تحليلي به دست آمده‌اند. ضرايب بازتاب تابعي از زاويه تابش، فركانس موج ورودي، تموج مرز و خواص ارتجاعي نيم فضاها است. هم چنين ضرايب به طور عددي و تئوري براي مرزي با معادله

$$z=\zeta(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(\zeta_n e^{inpx}+\zeta_{-n}e^{-inpx})$$

(به شكل ۱ رجوع شود)، مورد بحث قرار مي‌گيرد كه در آن ζ_n و ζ_{-n} ضرايب سري فوريه، p عدد موج، $i=\sqrt{-1}$ و n مرتبه بسط فوريه است. در اين مقاله دامنه هاي امواج بازتابي، انكساري و پراشي بر حسب دامنه موج ورودي به صورت تحليلي تا n برابر ۳ به دست مي آيد. محاسبات عددي مربوط نيز انجام شده و نتايج آن به صورت گراف ارائه مي گردد.

معادلات اساسي

بر اساس قانون هوك، اگر تنش هاي وارده بر محيط الاستيك، τ_{ij}، كوچك باشند، كرنش هاي ناشي از آن ها، ε_{ij}، رابطه خطي با اين تنش ها دارند. در اين

حالـت، رابطه تنش-کرنش به صورت زير نوشته مي‌شود:

$$\tau_{ij} = C_{ijkl}\,\varepsilon_{kl} \qquad i,j,k,l=1,2,3 \qquad (۱)$$

معادله فوق به قـانون عموميـت داده شـده هـوك معـروف است كه در آن ε_{kl} تانسور كرنش خطي اسـت كـه توسـط مشتقات پاره‌اي ميدان جابجايي، $\mathbf{u}$ ، تعريف مي‌شود:

$$\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k}\right) = \frac{1}{2}(u_{k,l} + u_{l,k}) \qquad (۲)$$

C_{ijkl}، بيانگر تانسور ضرايب الاستيك است. در حالت كلي، τ_{ij} و ε_{kl} داراي ۹ عضو و بنابراين تانسور مرتبه ۴ رابطـه (۱)، C_{ijkl}، داراي ۸۱ عضو جداگانه است. ولـي بـه دليـل تقارن تانسورهاي تنش و كـرنش و بـا فـرض وجـود تـابع انرژي كرنشي، تعداد اعضاي ماتريس ضرايب بـه ۲۱ عضـو جداگانه كاهش مي‌يابد.

داراي تقارن محوري باشد محـيط ايزوتـروپ جـانبي ناميده مي‌شود. در اين حالت، مواد نسـبت بـه يـك محـور خاص متقارن بوده و خصوصيات مكانيكي آن هـا در تمـام جهات در صفحه عمود بر اين محور يكسان هسـتند، ولـي خواص مكانيكي در اين صفحه با ايـن خـواص در راسـتاي محور تقارن متفاوت مي باشند. مواد ايزوتـروپ جـانبي در صـفحه عمـود بـر محـور تقـارن داراي خاصـيت همسـاني مي‌باشند. تانسور ضرايب الاستيك بـراي حالـت ايزوتـروپ جانبي به شكل زير در مي‌آيد:

$$C_{ijkl} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ C_{1122} & C_{1111} & C_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ C_{1133} & C_{1133} & C_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{1212} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{1313} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{1313} \end{bmatrix} \qquad (۳)$$

و $C_{1212} = (C_{1111} - C_{1122})/2$.

همان گونه كه در روابط اخيـر ملاحظـه مـي‌شـود تنها ۵ ضريب ارتجاعي مستقل از هم در حالـت ايزوتـروپ جانبي وجود دارد. در عمل رابطه تنش-كـرنش بـر حسـب مدول يانگ، نسبت پوآسون و مدول برشي تعريف مي‌شود. بدين منظور، اين ضرايب ارتجاعي برحسب ۵ ثابت مستقل E_x، E_z، υ_x، υ_z و μ_z كـه توسـط لخنيتسـكي [۲۰] معرفي شده‌اند، مشخص مي‌شوند:

- E_x و E_z، به ترتيب مدول يانگ در صفحه ايزوتروپ جانبي و در جهـت عمـود بـر آن، يعنـي در راسـتاي محور تقارن z هستند.
- υ_x، ثابت پوآسون بيانگر پاسخ كرنشـي فشـاري يـا كششي در يك امتداد در صفحه ايزوتروپ به كشـش يا فشار در امتداد عمود بر آن در همان صفحه است و به همين ترتيب، υ_z نشان‌دهنده پاسخ كرنش جـانبي در صـفحات عمـود بـر صـفحه ايزوتـروپ بـه كـرنش محوري در صفحه ايزوتروپ مي‌باشد.
- μ_z، مدول برشي سطوح عمود بر سـطوح ايزوتـروپ جانبي است. مدول برشي در صفحات موازي با سطوح ايزوتـروپ بـه ثابتهـاي مـذكور در بـالا مطـابق رابطه $\mu_x = E_x / 2(1+\upsilon_x)$ بستگي دارد.

بـا معرفـي متغيـر جديـد λ، روابـط بـين ثوابـت C_{ijkl} و مهندسي به شكل ساده زير نشان داده مي‌شوند:

$$C_{1111} = \frac{E_x(\eta - \upsilon_z^2)}{\lambda(1+\upsilon_x)}, C_{1122} = \frac{E_x(\eta\upsilon_x + \upsilon_z^2)}{\lambda(1+\upsilon_x)}, C_{1212} = \mu_x,$$
$$C_{1133} = \frac{E_x\upsilon_z}{\lambda}, C_{3333} = \frac{E_x(1-\upsilon_x)}{\lambda}, C_{1313} = \mu_z \qquad (۴)$$

كـــه در آن $\eta = E_x/E_z$ و $\lambda = \eta(1-\upsilon_x) - 2\upsilon_z^2$ [لؤلؤيي، ۲۱].

معادلات حاكم بر انتشار آشفتگي‌هاي كوچك در محيط ارتجاعي توسط معادله زير بيان مي‌شود:

$$\nabla.\boldsymbol{\tau} = \rho\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \qquad (۵)$$

كـه در آن $\nabla.\boldsymbol{\tau}$، ديـورژانس تانسـور تـنش و ρ چگـالي محـيط مـي‌باشـند. مؤلفـه‌هـاي بـردار جـا بـه جـايي بـه صـورت $\mathbf{u} = (u,v,w)$ در نظـر گرفتـه شـده اسـت. لـذا معادله (۵) به صورت زير بازنويسي مي‌شود:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\tau_{xx}}{\partial x} + \dfrac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} + \dfrac{\partial\tau_{xz}}{\partial z} = \rho\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \dfrac{\partial\tau_{yx}}{\partial x} + \dfrac{\partial\tau_{yy}}{\partial y} + \dfrac{\partial\tau_{yz}}{\partial z} = \rho\dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\ \dfrac{\partial\tau_{zx}}{\partial x} + \dfrac{\partial\tau_{zy}}{\partial y} + \dfrac{\partial\tau_{zz}}{\partial z} = \rho\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{cases} \qquad (۶)$$

براي امواج تخت SH كه در صفحه $x-z$ انتشار مي‌يابند، جا به جايي ذرات تنها يـك مؤلفـه در امتـداد y دارد. بـه عبـارت ديگـر، $u = w = 0$ و $v = v(x,z,t)$ هستند. بنابراين، مجموعـه معـادلات (۶) بـه يـك معادلـه كاهش پيدا مي نمايد:

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z}=\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \qquad (۷)$$

مؤلفه‌هاي غير صفر تنش بـا اسـتفاده از روابـط (۱)، (۳) و (۴) به صورت زير بر حسب تغيير مكان **u** بيان مي‌شوند:

$$\tau_{yx}=\mu_x\frac{\partial v}{\partial x}\ ; \quad \tau_{yz}=\mu_z\frac{\partial v}{\partial z} \qquad (۸)$$

با جايگزيني معادلات (۸) در معادله (۷)، معادله زير بـراي جا به جايي ذرات محيط بر اثر انتشار موج SH به دسـت مي‌آيد:

$$\mu_x\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\mu_z\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}=\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \qquad (۹)$$

معادله فصل مشترك مـوج دار بـين دو نـيم فضـاي ايزوتروپ جانبي با خواص ارتجاعي متفاوت به صورت زيـر نوشته مي‌شود:

$$z=\zeta(x) \qquad (۱۰)$$

كـه در آن ζ مسـتقل از y در نظـر گرفتـه شـده اسـت. محورهاي x و y روي سطح افقي و محـور z در راسـتاي عمودي به طرف پايين اختيار شده‌اند (شكل ۱). M_1 نـيم فضاي بالايي در محدوده $-\infty < z \le \zeta(x)$ و M_2 نـيم فضـاي پـاييني در محـدوده $\zeta(x) \le z < \infty$ اسـت. از آنجايي كه هر تابع با استفاده از سري فوريه قابل بيـان بـه شـكل تنـاوبي (بـا پريـود محـدود يـا نامحـدود) اسـت، تابع $\zeta(x)$ را به صورت سري مختلط زير نوشته مي شود:

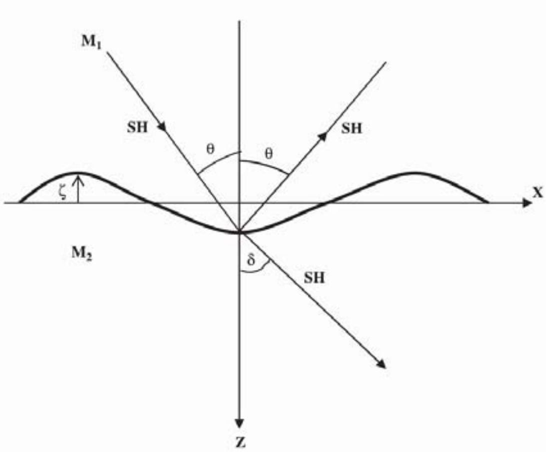
$$\zeta(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(\zeta_n e^{inpx}+\zeta_{-n} e^{-inpx}) \qquad (۱۱)$$

كه در آن ζ_n و ζ_{-n} ضرايب بسط فوريه، p عدد موج، n مرتبه بسط ايـن سـري و $i=\sqrt{-1}$ هسـتند. بـا تعريـف ثابتهاي d، c_n و s_n به صورت زير:

$$\zeta_1=\zeta_{-1}=\frac{d}{2}, \quad \zeta_{\pm n}=\frac{(c_n \mp i s_n)}{2}, \quad n=2,3,4,... \qquad (۱۲)$$

معادله (۱۱) به شكل (۱۳) نوشته مي‌شود:

$$\begin{aligned}\zeta &= d\cos(px)+c_2\cos(2px)+s_2\sin(2px)\\ &\cdots+c_n\cos(npx)+s_n\sin(npx)+\cdots \qquad (۱۳)\\ &=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\cos npx+\sum_{n=2}^{\infty}s_n\sin npx\end{aligned}$$



شكل ۱: هندسه فصل مشترک موج دار.

اگـر فصـل مشـترك مـوج دار تنهـا بـا جملـه اول كسينوسي نشان داده شود، $\zeta=d\cos(px)$، آنگاه طول موج فصل مشترك برابر $\frac{2\pi}{p}$ و دامنه تموج d مي‌باشند.

جواب مسئله

معادله انتشار موج SH در محيط $M_m(m=1,2)$ توسط رابطه زير داده مي‌شود:

$$\mu_x\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}+\mu_z\frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2}=\rho_1\frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} \qquad (۱۴\text{- الف})$$

$$\mu'_x\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2}+\mu'_z\frac{\partial^2 v_2}{\partial z^2}=\rho_2\frac{\partial^2 v_2}{\partial t^2} \qquad (۱۴\text{- ب})$$

كـه در آن v_m مؤلفـه جـا بـه جـايي در امتـداد y در محيط M_m است. مدول برشي سطوح موازي و عمـود بـر سطح ايزوتروپ جـانبي در محـيط اول بـه ترتيـب بـا μ_x و μ_z و در محيط دوم بـا μ'_x و μ'_z نشـان داده شـده‌انـد. حـل معادلـه (۱۴) در فضـاي فركانسـي مـوج تخـت SH مي‌باشد كه در صفحه $x-z$ منتشر مي‌شود. معادلـه ايـن مـوج در حـالتي كـه انتشـار مـوج در راسـتاي مثبـت محورهاي x و z باشد به صورت زير است:

$$v_m(x,z,t)=A\exp\{-i(k_x x+k_z z-\omega t)\}, \ ; m=1,2 \qquad (۱۵)$$

كـه در آن، A دامنـه مـوج SH، k_x و k_z عـدد مـوج در راستاي محورهاي x و z هستند. k_z براي محـيط اول بـا $q=k_x\sqrt{\frac{\mu_x}{\mu_z}\left(\frac{1}{\sin^2\theta}-1\right)}$ و در محـــيط دوم بـــا $r=k_x\sqrt{\frac{\mu'_x}{\mu'_z}\left(\frac{1}{\sin^2\delta}-1\right)}$ نشان داده مي‌شـوند كـه در آن θ و δ به ترتيب زواياي تـابش و شكسـت مـوج SH

بـوده و ω، فركـانس زاويـه‌اي اسـت كـه مقـدار آن برابـر $\omega = k_x c$ مي باشد به طوري كه c سرعت فاز است.

همان طور كه گفته شـد، تمـوج فصـل مشـترك بـر بازتاب و شكست امواج SH اثرگذار است. ناهمواري فصـل مشترك دو محيط باعث مـي‌شـود كـه مـوج SH تابشـي علاوه بر امواج بازتابي و انكساري معمول، به امواج بازتابي و انكساري پراشي تبديل شـود [آسـانو، ۱۲]. جـا بـه جـايي ذرات در محـيط اول ناشـي از تـابش و بازتـاب معمـولي موج SH توسط رابطه زير بيان مي‌شود:

$$v_1^{inci+reg\_refl} = \left\{Ae^{-iqz} + Be^{iqz}\right\} e^{-i\omega\left(\frac{x\sin\theta}{\beta_1}-t\right)} \quad (۱۶)$$

كه در آن A و B بـه ترتيـب دامنـه مـوج SH تابشـي و بازتابي معمولي هستند. β_1 سـرعت مـوج SH در محـيط اول است كه از رابطه $\beta_1 = \sqrt{\mu_x / \rho_1}$ به دست مي‌آيد. بـه طور مشابه، جابه جايي در محيط دوم، M_2، ناشي از مـوج انكساري معمولي به صورت زير است:

$$v_2^{reg\_refr} = De^{-irz} e^{-i\omega\left(\frac{x\sin\delta}{\beta_2}-t\right)} \quad (۱۷)$$

كــه در آن D دامنــه مــوج انكســاري معمــولي اســت و $\beta_2 = \sqrt{\frac{\mu_x'}{\rho_2}}$. مطابق قانون اسنل زاويـه شكسـت δ بـه صورت زير با زاويه تابش θ ارتباط دارد:

$$\frac{\sin\theta}{\beta_1} = \frac{\sin\delta}{\beta_2} = \frac{k_x}{\omega} \quad (۱۸)$$

يادآوري مي‌شود كه بر اساس قانون اسنل، مقدار k_x بـراي دو محيط يكسان است.

طيف مرتبه n امواج بازتابي پراشـي ناشـي از تمـوج فصل مشترك به صورت زير تعريف مي‌شود:

$$v_1^{ir\_refl} = B_n e^{iq_n z} \exp\left\{-i\omega\left((x\sin\theta_n)/\beta_1 - t\right)\right\} + B_n' e^{iq_n' z} \exp\left\{-i\omega\left((x\sin\theta_n')/\beta_1 - t\right)\right\} \quad (۱۹)$$

كه در آن

$$q_n = k\sqrt{\mu_x\left(1/\sin^2\theta_n - 1\right)/\mu_z}$$

و

$$q_n' = k\sqrt{\mu_x\left(1/\sin^2\theta_n' - 1\right)/\mu_z}$$

B_n و B_n' دامنــه‌هـا و θ_n و θ_n' زوايـاي امـواج بازتـابي پراشي نسبت به محور z هستند. بـه طـور مشـابه، طيـف مرتبه n امـواج انكسـاري پراشـي ناشـي از تمـوج فصـل مشترك به صورت زير مي‌باشد:

$$v_2^{ir\_refr} = D_n e^{-ir_n z} \exp\left\{-i\omega\left(\frac{x\sin\delta_n}{\beta_2} - t\right)\right\} + D_n' e^{-ir_n' z}\left\{-i\omega\left(\frac{x\sin\delta_n'}{\beta_2} - t\right)\right\} \quad (۲۰)$$

كه در آن

$$r_n = k\sqrt{\mu_x'\left(1/\sin^2\delta_n - 1\right)/\mu_z'}$$

و

$$r_n' = k\sqrt{\mu_x'\left(1/\sin^2\delta_n' - 1\right)/\mu_z'}$$

D_n، D_n' دامنــه‌هـا و δ_n و δ_n' زوايـاي امـواج انكسـاري پراشي نسبت بـه محـور z هسـتند. زوايـاي θ_n، θ_n'، δ_n و δ_n' توسط تئوري طيفي بـه صـورت زيـر بـا يـك ديگـر ارتباط دارند [آسانو، ۱۲]:

$$\sin\theta_n - \sin\theta = \frac{np\beta_1}{\omega}, \sin\theta_n' - \sin\theta = -\frac{np\beta_1}{\omega},$$
$$\sin\delta_n - \sin\delta = \frac{np\beta_2}{\omega}, \sin\delta_n' - \sin\delta = -\frac{np\beta_2}{\omega} \quad (۲۱)$$

بنابراين، جا به جـايي كـل v_1 در محـيط اول، M_1، برابـر مجموع جا به جايي‌هـاي ناشي از امـواج تابشـي، بازتـابي معمولي و بازتابي پراشي در اين محيط است:

$$v_1 = \left\{Ae^{-iqz} + Be^{iqz}\right\}\exp\left[-i\omega\left(\frac{x\sin\theta}{\beta_1} - t\right)\right] + \sum_n B_n e^{iq_n z}\exp\left\{-i\omega\left(\frac{x\sin\theta_n}{\beta_1} - t\right)\right\} + \sum_n B_n' e^{iq_n' z}\exp\left\{-i\omega\left(\frac{x\sin\theta_n'}{\beta_1} - t\right)\right\} \quad (۲۲)$$

بـه طـور مشـابه، جابجـايي كـل v_2 در محـيط پاييني M_2 برابر مجمـوع جابجـايي‌هـاي ناشي از امـواج انكساري معمولي و انكساري پراشي است:

$$v_2 = De^{-irz}\exp\left[-i\omega\left(\frac{x\sin\delta}{\beta_2} - t\right)\right] + \sum_n D_n e^{-ir_n z}\exp\left\{-i\omega\left(\frac{x\sin\delta_n}{\beta_2} - t\right)\right\} + \sum_n D_n' e^{-ir_n' z}\exp\left\{-i\omega\left(\frac{x\sin\delta_n'}{\beta_2} - t\right)\right\} \quad (۲۳)$$

دامنه‌هاي B_n، B_n'، D، D_n و D_n' با اسـتفاده از برقـراري شرايط مرزی بر حسب A تعيين می‌شوند.

شرايط مرزي

كسينوس هاي هادي خطوط مماس و عمود بر هر نقطه در فصل مشترك موجدار $z=\zeta(x)$ به ترتيب عبارتند از (شكل ۱):

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1+\zeta'^2(x)}},0,\frac{\zeta'(x)}{\sqrt{1+\zeta'^2(x)}}\right),\quad \left(\frac{-\zeta'(x)}{\sqrt{1+\zeta'^2(x)}},0,\frac{1}{\sqrt{1+\zeta'^2(x)}}\right), \tag{۲۴}$$

و بردار تنش در محيط M_m روي فصل مشترك عبارت است از:

$$[\tau_{ij}]\begin{bmatrix}-\zeta'/\sqrt{1+\zeta'^2}\\ 0\\ 1/\sqrt{1+\zeta'^2}\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{1+\zeta'^2}}(\tau^m_{yz}-\zeta'\tau^m_{yx})$$

كه در آن ζ' مشتق ζ نسبت به x و انديس بالانهاد m نشان دهنده شماره محيط است. در روش رايلي فرض بر اين است كه دامنه تموج فصل مشترك به حد كافي كوچك است، يعني دامنه تموج فصل مشترك نسبت به طول موج آن قابل اغماض است. شرايط مرزي در فصل مشترك موج دار عبارتند از پيوستگي جا به جايي و تنش كه از نظر رياضي به صورت زير بيان مي‌شوند:

$$z=\zeta(x),\quad \text{where}\ \ v_1=v_2 \tag{۲۵}$$

$$z=\zeta(x),\ \text{where}\ \ \tau^1_{yz}-\zeta'\tau^1_{yx}=\tau^2_{yz}-\zeta'\tau^2_{yx} \tag{۲۶}$$

با بهره‌گيري از معادلات (۸)، مولفه‌هاي تنش موجود در محيط M_1 عبارتند از:

$$\tau^1_{yx}=\mu_x\frac{\partial v_1}{\partial x}\ ;\quad \tau^1_{yz}=\mu_z\frac{\partial v_1}{\partial z} \tag{۲۷}$$

و در محيط M_2 عبارتند از:

$$\tau^2_{yx}=\mu'_x\frac{\partial v_2}{\partial x}\ ;\quad \tau^2_{yz}=\mu'_z\frac{\partial v_2}{\partial z} \tag{۲۸}$$

با استفاده از معادلات (۲۷) و (۲۸) در رابطه (۲۶)، مي‌توان نوشت:

$$\mu_z\frac{\partial v_1}{\partial z}-\zeta'\mu_x\frac{\partial v_1}{\partial x}=\mu'_z\frac{\partial v_2}{\partial z}-\zeta'\mu'_x\frac{\partial v_2}{\partial x} \tag{۲۹}$$

با قرار دادن معادلات (۲۲) و (۲۳) در شرايط مرزي (۲۵) و (۲۹) و ساده كردن نتايج به دست آمده، داريم:

$$\begin{aligned}&Ae^{-iq\zeta}+Be^{iq\zeta}+\\&\sum_n\left\{B_ne^{iq_n\zeta}\,\mathbf{exp}(-inpx)+\sum_nB'_ne^{iq'_n\zeta}\,\mathbf{exp}(inpx)\right\}=\\&De^{-ir\zeta}+\sum_n\left\{D_ne^{-ir_n\zeta}\,\mathbf{exp}(-inpx)+\sum_nD'_ne^{-ir'_n\zeta}\,\mathbf{exp}(inpx)\right\}\end{aligned} \tag{۳۰}$$

$$\begin{aligned}&A\{\mu_zq-\zeta'\mu_x(\omega\frac{\sin\theta}{\beta_1})\}e^{-iq\zeta}+B\{-\mu_zq-\zeta'\mu_x(\omega\frac{\sin\theta}{\beta_1})\}\\&\times e^{iq\zeta}-\sum_nB_n\{\mu_zq_n+\zeta'\mu_x(\omega\frac{\sin\theta}{\beta_1}+np)\}e^{-inpx}e^{iq_n\zeta}\\&-\sum_nB'_n\{\mu_zq'_n+\zeta'\mu_x(\omega\frac{\sin\theta}{\beta_1}-np)\}e^{inpx}e^{iq'_n\zeta}\\&=D\{\mu'_zr-\zeta'\mu'_x(\omega\frac{\sin\theta}{\beta_1})\}e^{-ir\zeta}+\\&\sum_nD_n\{\mu'_zr_n-\zeta'\mu'_x(\omega\frac{\sin\theta}{\beta_1}+np)\}e^{-inpx}e^{-ir_n\zeta}\\&+\sum_nD'_n\{\mu'_zr'_n-\zeta'\mu'_x(\omega\frac{\sin\theta}{\beta_1}-np)\}e^{inpx}e^{-ir'_n\zeta}\end{aligned} \tag{۳۱}$$

معادلات (۳۰) و (۳۱)، فرمول بندي ضرايب بازتاب و عبور براي هر درجه‌اي از تقريب تموج فصل مشترك را بيان مي‌كنند.

جواب براي تقريب اول

با اين فرض كه دامنه موج فصل مشترك $z=\zeta(x)$ خيلي كوچك است، و استفاده از تقريب درجه اول مي‌توان نوشت: $\exp(\pm iq\zeta)=1\pm iq\zeta$. با وارد كردن معادله (۱۱) و استفاده از معادلات (۱۸) و (۲۱) در معادلات (۳۰) و (۳۱) و تقريب فوق از تموج مي‌توان B و D را با جداسازي جملات مستقل از x و ζ بر حسب A به دست آورد:

$$A+B=D \tag{۳۲}$$

$$A\mu_zq-B\mu_zq=D\mu'_zr \tag{۳۳}$$

براي يافتن جواب تقريب اول از تموج براي B_n و D_n، ضرايب $\exp(-inpx)$ در دو طرف معادلات (۳۰) و (۳۱) مساوي هم قرار داده مي‌شوند:

$$B_n-D_n=i\zeta_{-n}\left[Aq-Bq-Dr\right] \tag{۳۴}$$

$$\begin{aligned}B_n\mu_zq_n+D_n\mu'_zr_n=i\zeta_{-n}\Big\{&(A+B)[np\mu_x\frac{\omega\sin\theta}{\beta_1}\\&-q^2\mu_z]-D[np\mu'_x\frac{\omega\sin\theta}{\beta_1}-r^2\mu'_z]\Big\}\end{aligned} \tag{۳۵}$$

به طور مشابه، براي يافتن جواب تقريب اول از تموج B'_n و D'_n، ضرايب $\exp(inpx)$ در دو طرف معادله مساوي هم قرار داده مي‌شوند:

$$B'_n - D'_n = i\zeta_n\left[Aq - Bq - Dr\right] \tag{۳۶}$$

$$B'_n\mu_z q'_n + D'_n\mu'_z r'_n = i\zeta_{-n}\left\{(A+B)[np\mu_x \times\frac{\omega\sin\theta}{\beta_1} + q^2\mu_z] - D[np\mu'_x\frac{\omega\sin\theta}{\beta_1} + r^2\mu'_z]\right\} \tag{۳۷}$$

با حل معادلات (۳۲) و (۳۳)، ضـرايب بازتـاب و عبـور بـر حسب دامنه موج ورودي به دست مي‌آيند:

$$B = A\,\frac{\mu_z q - \mu'_z r}{\mu_z q + \mu'_z r} \quad D = A\,\frac{2\mu_z q}{\mu_z q + \mu'_z r} \tag{۳۸}$$

اين ضرايب مساوي ضرايب موجـود بـراي فصـل مشـترك تخت بين دو محـيط ايزوتـروپ جـانبي هسـتند. بـا حـل معادلات (۳۴)، (۳۵)، (۳۶) و (۳۷) دامنه‌هاي امواج بازتابي و شكستي ناشي از تموج فصل مشترك دو محيط به دست مي‌آيند:

$$B_n = \frac{\Delta B_n}{\Delta_n},\ D_n = \frac{\Delta D_n}{\Delta_n},\ B'_n = \frac{\Delta B'_n}{\Delta'_n},\ D'_n = \frac{\Delta D'_n}{\Delta'_n} \tag{۳۹}$$

كه در آن

$$\Delta_n = \gamma_1^n + \frac{\mu'_z\,\gamma_2^n}{\mu_z}, \quad \Delta'_n = \gamma_1'^n + \frac{\mu'_z\,\gamma_2'^n}{\mu_z}$$

$$\Delta B_n = i\zeta_{-n}k\left\{(A+B)[-\gamma_1^2 + \frac{\mu_x np}{\mu_z k}] + (A-B) \times[\frac{\gamma_1\mu'_z\gamma_2^n}{\mu_z}] + D[\frac{\gamma_2^2\mu'_z}{\mu_z} - \frac{\gamma_2^n\gamma_2\mu'_z}{\mu_z} - \frac{\mu'_x np}{k\,\mu_z}]\right\}$$

$$\Delta D_n = i\zeta_{-n}k\left\{(A+B)[-\gamma_1^2 + \frac{\mu_x np}{\mu_z k}] + (A-B) \times[-\gamma_1\gamma_1^n] + D[\frac{\gamma_2^{2n}\mu'_z}{\mu_z} + \gamma_1^n\gamma_2 - \frac{\mu'_x np}{k\,\mu_z}]\right\}$$

$$\Delta B'_n = i\zeta_n k\left\{(A+B)[-\gamma_1^2 - \frac{\mu_x np}{\mu_z k}] + (A-B) \times[\frac{\gamma_1\mu'_z\gamma_2'^n}{\mu_z}] + D[\frac{\gamma_2^2\mu'_z}{\mu_z} - \frac{\gamma_2'^n\gamma_2\mu'_z}{\mu_z} + \frac{\mu'_x np}{k\,\mu_z}]\right\}$$

$$\Delta D'_n = i\zeta_n k\left\{(A+B)[-\gamma_1^2 - \frac{\mu_x np}{\mu_z k}] + (A-B) \times[-\gamma_1\gamma_1'^n] + D[\frac{\gamma_2^2\mu'_z}{\mu_z} + \gamma_1'^n\gamma_2 + \frac{\mu'_x np}{k\,\mu_z}]\right\}$$

$$\gamma_1 = \sqrt{\mu_x\left(1/\sin^2\theta - 1\right)/\mu_z},$$
$$\gamma_2 = \sqrt{\mu'_x\left(1/\sin^2\delta - 1\right)/\mu'_z},$$

$$\gamma_1^n = \sqrt{\mu_x\left(1/\sin^2\theta_n - 1\right)/\mu_z},$$
$$\gamma_1'^n = \sqrt{\mu_x\left(1/\sin^2\theta'_n - 1\right)/\mu_z},$$
$$\gamma_2^n = \sqrt{\mu'_x\left(1/\sin^2\delta_n - 1\right)/\mu'_z},$$
$$\gamma_2'^n = \sqrt{\mu'_x\left(1/\sin^2\delta'_n - 1\right)/\mu'_z}. \tag{۴۰}$$

روابط (۳۹) بيانگر ضرايب بازتاب و عبور براي تقريب درجه اول از تموج است.

جوابها به ازاي $n = 1, 2, 3$

همان طور كه قبلا نيز ذكر شد، با فرض اين كه

$$\zeta_{-n} = \zeta_n = \begin{cases} 0 & \text{if } n \neq 1 \\ d/2 & \text{if } n = 1 \end{cases}$$

معادله فصل مشترك موجدار بـه صـورت $z = d\cos px$ اسـت. در ايـن حالـت، ضـرايب بازتـاب و شكسـت B_1، D_1، B'_1 و D'_1 بـراي تقريـب درجـه اول از فصـل مشـترك بـا قـرار دادن $n = 1$ در معـادلات (۳۹) بدسـت مي‌آيند:

$$B_1 = \frac{\Delta B_1}{\Delta_1},\ D_1 = \frac{\Delta D_1}{\Delta_1},\ B'_1 = \frac{\Delta B'_1}{\Delta'_1},\ D'_1 = \frac{\Delta D'_1}{\Delta'_1} \tag{۴۱}$$

كه در آن

$$\Delta_1 = \gamma_1^1 + \frac{\mu'_z\,\gamma_2^1}{\mu_z}, \quad \Delta'_1 = \gamma_1'^1 + \frac{\mu'_z\,\gamma_2'^1}{\mu_z}$$

$$\Delta B_1 = i\,\frac{kd}{2}\left\{(A+B)[-\gamma_1^2 + \frac{\mu_x p}{\mu_z k}] + (A-B) \times[\frac{\gamma_1\mu'_z\gamma_2^1}{\mu_z}] + D[\frac{\gamma_2^2\mu'_z}{\mu_z} - \frac{\gamma_2^1\gamma_2\mu'_z}{\mu_z} - \frac{\mu'_x p}{k\,\mu_z}]\right\}$$

$$\Delta D_1 = i\,\frac{kd}{2}\left\{(A+B)[-\gamma_1^2 + \frac{\mu_x p}{\mu_z k}] + (A-B) \times[-\gamma_1\gamma_1^1] + D[\frac{(\gamma_2^1)^2\mu'_z}{\mu_z} + \gamma_1^1\gamma_2 - \frac{\mu'_x p}{k\,\mu_z}]\right\}$$

$$\Delta B'_1 = i\,\frac{kd}{2}\left\{(A+B)[-\gamma_1^2 - \frac{\mu_x p}{\mu_z k}] + (A-B) \times[\frac{\gamma_1\mu'_z\gamma_2'^1}{\mu_z}] + D[\frac{\gamma_2^2\mu'_z}{\mu_z} - \frac{\gamma_2'^1\gamma_2\mu'_z}{\mu_z} + \frac{\mu'_x p}{k\,\mu_z}]\right\}$$

$$\Delta D'_1 = i\,\frac{kd}{2}\left\{(A+B)[-\gamma_1^2 - \frac{\mu_x p}{\mu_z k}] + (A-B) \times[-\gamma_1\gamma_1'^1] + D[\frac{\gamma_2^2\mu'_z}{\mu_z} + \gamma_1'^1\gamma_2 + \frac{\mu'_x p}{k\,\mu_z}]\right\}$$

(۴۲)

معادله (۱۱) يا معادل آن معادلات (۱۲) و (۱۳) شكل فصل مشترك دو محيط را در اختيار قرار مي‌دهند. اگر دو نيم‌فضا ايزوتروپ كامل باشند، يعني $\mu_x = \mu_z = \mu_1$ و $\mu'_x = \mu'_z = \mu_2$، در اين صورت با فرض شرايط بالا و در نظر گرفتن تابش عمودي داريم:

$$\begin{cases}\theta=\delta=0\\ \zeta_1=\zeta_{-1}=d/2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\cos\theta_1=\cos\theta'_1\\ \cos\delta_1=\cos\delta'_1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}B_1=B'_1\\ D_1=D'_1\end{cases}$$

كه در آن B_1 و D_1 از روابط زير به دست مي‌آيند:

$$B_1-D_1=i\,\zeta_1\omega\left[\frac{A-B}{\beta_1}-\frac{D}{\beta_2}\right],$$

$$B_1\mu_1 q_1+D_1\mu_2 r_1=i\,\zeta_1\omega^2\left\{-\mu_1\frac{A+B}{\beta_1^2}+\mu_2\frac{D}{\beta_2^2}\right\}$$

اين روابط منطبق بر روابطي هستند كه آسانو [۱۲] براي دو نيم‌فضاي ايزوتروپ با فصل مشترك ناهموار با فرض تقريب اول به دست آورد. بدين ترتيب نشان داده شده است كه جواب به دست آمده به صورت تحليلي درست مي‌باشد. براي نشان دادن صحت محاسبات عددي در جدول (۱)، مقادير B_1 و D_1 از روابط بالا براي تقريب اول با مقادير مشابه به دست آمده توسط آسانو با تقريب درجه دوم، $\exp(\pm iq\zeta)=1\pm iq\zeta-iq^2\frac{\zeta^2}{2!}$، مقايسه شده اند. آشكار است كه نتايج به دست آمده بسيار نزديك به مقادير آسانو هستند و اختلاف ناچيز بين آن ها ناشي از تفاوت در تقريب هاي در نظر گرفته شده براي فصل مشترك است. اگر در معادلات ۳۴ الي ۳۷، n برابر ۲ در نظر گرفته شود، معادله فصل مشترك به صورت زير بازنويسي مي‌شود:

$$\zeta=d\,\cos(px)+c_2\cos(2px)+s_2\sin(2px)\quad(۴۳)$$

كه در آن $\zeta_1=\zeta_{-1}=d/2$، $\zeta_2=(c_2-is_2)/2$ و $\zeta_{-2}=(c_2+is_2)/2$. براي $n=2$ ضرايب بازتاب و شكست پراشي در تقريب درجه اول از فصل مشترك عبارت از B_1، B_2، D_1، D_2، B'_1، B'_2، D'_1 و D'_2 بوده كه در آن B_1، D_1، B'_1 و D'_1 از معادلات (۴۱) و مابقي از معادلات زير به دست مي‌آيند:

$$B_2=\frac{\Delta B_2}{\Delta_2},\ D_2=\frac{\Delta D_2}{\Delta_2},\ B'_2=\frac{\Delta B'_2}{\Delta'_2},\ D'_2=\frac{\Delta D'_2}{\Delta'_2}\quad(۴۴)$$

در اين جا

$$\Delta_2=\gamma_1^2+\frac{\mu'_z\gamma_2^2}{\mu_z}\quad \text{و}\quad \Delta'_2=\gamma_1'^2+\frac{\mu'_z\gamma_2'^2}{\mu_z}$$

$$\Delta B_2=i\,\frac{k(c_2+is_2)}{2}\left\{(A+B)[-\gamma_1^2+\frac{2\mu_x p}{\mu_z k}]+(A-B)[\frac{\gamma_1\mu'_z\gamma_2^2}{\mu_z}]+D\,[\frac{\gamma_2^2\mu'_z}{\mu_z}-\frac{\gamma_2^2\gamma_2\mu'_z}{\mu_z}-\frac{2\mu'_x p}{k\,\mu_z}]\right\}$$

$$\Delta D_2=i\,\frac{k(c_2+is_2)}{2}\left\{(A+B)[-\gamma_1^2+\frac{2\mu_x p}{\mu_z k}]+(A-B)[-\gamma_1\gamma_1^2]+D\,[\frac{(\gamma_2^2)^2\mu'_z}{\mu_z}+\gamma_1^2\gamma_2-\frac{2\mu'_x p}{k\,\mu_z}]\right\}$$

$$\Delta B'_2=i\,\frac{k(c_2-is_2)}{2}\left\{(A+B)[-\gamma_1^2-\frac{2\mu_x p}{\mu_z k}]+(A-B)[\frac{\gamma_1\mu'_z\gamma_2'^2}{\mu_z}]+D\,[\frac{\gamma_2^2\mu'_z}{\mu_z}-\frac{\gamma_2'^2\gamma_2\mu'_z}{\mu_z}+\frac{2\mu'_x p}{k\,\mu_z}]\right\}$$

$$\Delta D'_2=i\,\frac{k(c_2-is_2)}{2}\left\{(A+B)[-\gamma_1^2-\frac{2\mu_x p}{\mu_z k}]+(A-B)[-\gamma_1\gamma_1'^2]+D\,[\frac{\gamma_2^2\mu'_z}{\mu_z}+\gamma_1'^2\gamma_2+\frac{2\mu'_x p}{k\,\mu_z}]\right\}$$

(۴۵)

به طور مشابه، در حالتي كه $n=3$ در نظر گرفته شود، معادله فصل مشترك به صورت زير بازنويسي مي‌شود:

$$\zeta=d\cos(px)+c_2\cos(2px)+s_2\sin(2px)+c_3\cos(3px)+s_3\sin(3px)$$

كه در آن $\zeta_{\pm3}=(c_3\mp is_3)/2$. براي $n=3$، ضرايب بازتاب و شكست پراشي، علاوه بر ضرايب موجود در $n=2$، ضرايب B_3، D_3، B'_3 و D'_3 را نيز شامل مي‌شود و مقادير آنها، مشابه حالت $n=2$، از معادلات (۳۹) به دست مي‌آيند.

نتايج عددي

براي مطالعه اثر تموج فصل مشترك، ضرايب بازتاب و شكست به طور عددي بر حسب زواياي تابش مختلف محاسبه و رسم مي‌شوند. به منظور محاسبات عددي، مقادير زير براي مشخصه هاي مربوطه در نظر گرفته شده است:

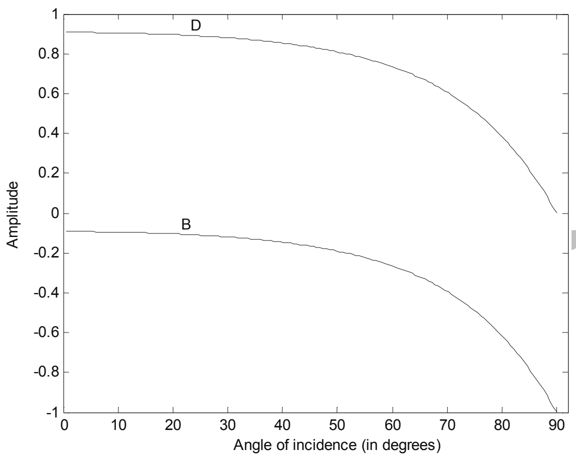
- در نيم‌فضاي M_1: $\rho_1=2.2\times10^3\ kg/m^3$، $\mu_z=2.68\times10^9\ N/m^2$، $\mu_x=5.68\times10^9\ N/m^2$.
- در نيم‌فضاي M_2: $\rho_2=2.9\times10^3\ kg/m^3$، $\mu'_z=2.95\times10^9\ N/m^2$، $\mu'_x=4.88\times10^9\ N/m^2$.

با این فرض که $d\omega / \beta_1 = 0.1$، مقدار pd برابر 0.001 و 0.0001 در نظر گرفته می‌شود. $d\omega / \beta_1$ مشخصه فرکانسي نامیده می‌شود محاسبات براي به دست آوردن ضرایب بازتاب و شکست در $n = 1, 2, 3$ صورت گرفته است.

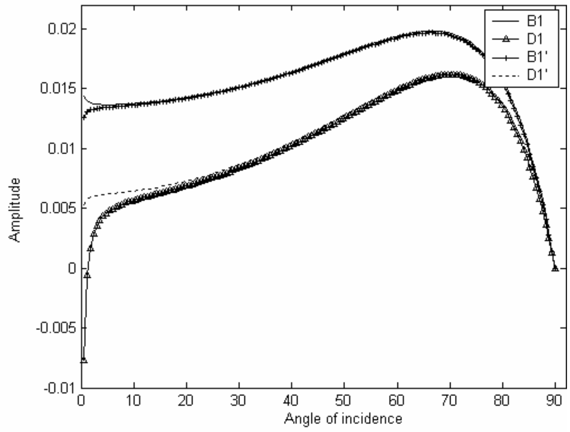
جدول ۱: مقایسه مقادیر B_1 و D_1 حاصل از تقریب اول با نتایج به دست آمده توسط آسانو از تقریب دوم برای دو نیم‌فضای ایزوتروپ با فصل مشترک ناهموار. B_{1A} و D_{1A} نشان‌دهنده مقادیر به دست آمده توسط آسانو (۱۹۶۰) هستند. مشخصه های مورد نیاز برای محاسبه این ضرایب همان مشخصه های پیش‌فرض در مقاله آسانو می باشند.

B_1	B_{1A}	D_1	D_{1A}
0.043	0.042	0.017	0.019
0.043	0.042	0.018	0.019
0.043	0.041	0.018	0.019
0.041	0.039	0.020	0.022
0.039	0.036	0.021	0.025
0.034	0.020	0.026	0.040
0.027	0.031	0.036	0.036
0.038	0.040	0.031	0.032
0.046	0.046	0.025	0.026
0.051	0.051	0.020	0.021
0.058	0.057	0.009	0.010
0.059	0.059	0.005	0.007
0.061	0.060	0.001	0.003
0.061	0.061	0.004	0.002
0.062	0.061	0.011	0.010
0.054	0.054	0.012	0.011
0.052	0.051	0.013	0.012
0.049	0.049	0.014	0.014
0.049	0.049	0.015	0.014
0.048	0.048	0.015	0.014
0.048	0.048	0.015	0.014
0.048	0.048	0.015	0.015
0.046	0.046	0.016	0.016
0.045	0.045	0.017	0.017
0.042	0.042	0.019	0.019
0.041	0.041	0.019	0.019

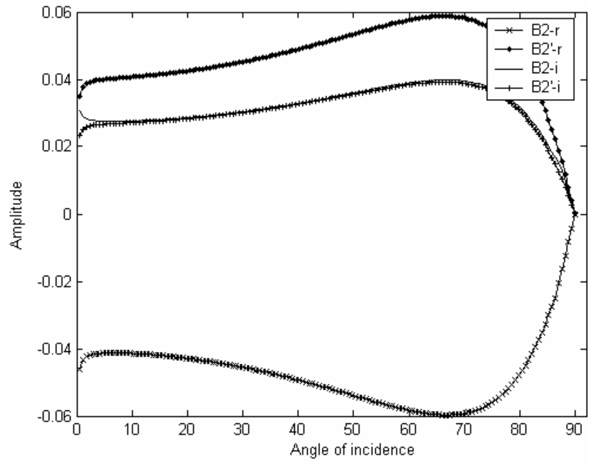
شکل (۲)، تغییرات ضرایب بازتاب و شکست معمولي، B و D بر حسب زاویه تابش، θ، در فصل مشترك بین نیم‌فضاهاي M_1 و M_2 را نشان مي‌دهد. با افزایش زاویه تابش، مقدار مطلق دامنه ضریب بازتاب B به طور نمایي افزایش مي‌یابد به طوري که در $\theta = 90^0$، تابش مماس با فصل مشترك، به بیشینه مقدار خود مي‌رسد. بر عکس، ضریب شکست D با افزایش زاویه تابش کاهش یافته تا به کمترین مقدار خود در $\theta = 90^0$ برسد. شکل (۳)، تغییرات ضرایب بازتاب و شکست پراشي B_1، D_1، B_1' و D_1' را بر حسب θ نشان مي‌دهد. تغییرات دامنه این ضرایب نشان مي‌دهد که تمامي آنها تقریباً پس از $\theta = 3^0$ روند صعودي به خود گرفته تا این که در حدود $\theta = 70^0$ به مقدار بیشینه خود رسیده و پس از آن کاهش مي‌یابند. براي $n = 2, 3$ نیز که در شکل هاي (۴) تا (۷) رسم شده‌اند، تقریباً همان روند مشاهده مي‌شود، با این تفاوت که در اندیس هاي بالاتر دامنه ضرایب کمتر است. در این شکل ها دامنه‌هاي قسمت هاي حقیقي ضرایب بازتاب و شکست B_2، D_2، B_3 و D_3 نسبت به قسمت هاي موهومي آنها حالت تقارن دارند. مقایسه تغییرات دامنه امواج بازتابي و انکساري معمولي (شکل ۲) با تغییرات دامنه امواج پراشي (شکل هاي ۳ الي ۷) بر حسب زاویه تابش به وضوح نشان مي‌دهد که بخش اعظمي از انرژي تبدیل شده موج ورودي، سهم امواج بازتابي و انکساري معمولي است. دامنه امواج بازتابي و انکساري معمولي بین صفر تا يك در نوسان است در حالي که این تغییرات براي امواج پراشي حداکثر بین صفر تا ۰/۰۸ است.



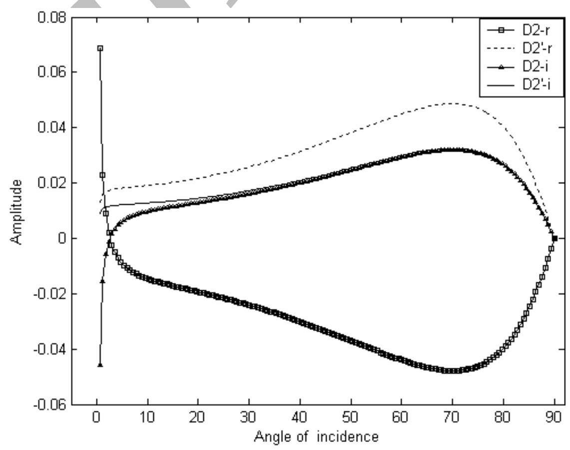
شکل ۲ : تغییرات دامنه‌های بازتاب و شکست معمولی، B و D بر حسب زاویه تابش ($pd = 0.0001$).



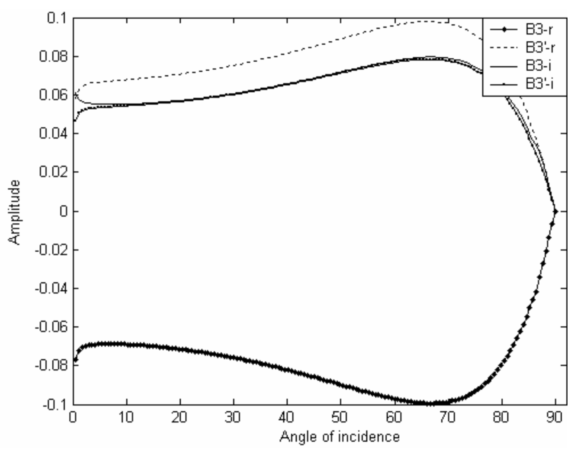
شکل ۳: تغییرات دامنه‌های بازتاب و شکست پراشی، B_1, D_1, B_1', D_1' بر حسب زاویه تابش ($pd = 0.0001$).



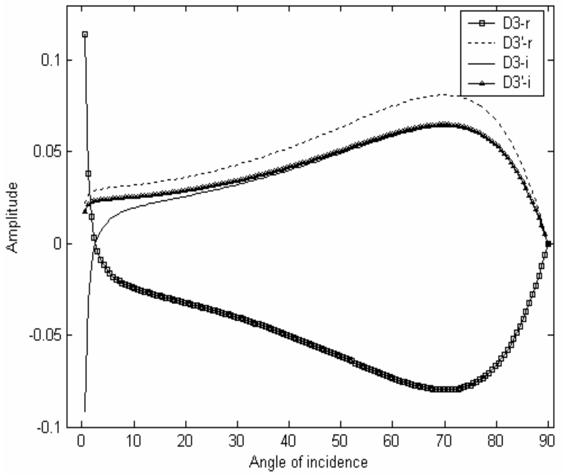
شکل ۴ :تغییرات دامنه‌های بازتاب و شکست پراشی حقیقی و موهومی، B_2, B_2' بر حسب زاویه تابش $(pd = 0.0001)$.



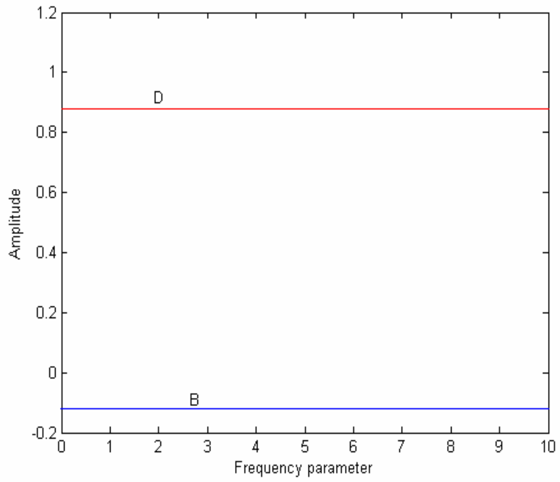
شکل ۵ : تغییرات دامنه‌های بازتاب و شکست پراشی حقیقی و موهومی، D_2, D_2' بر حسب زاویه تابش $(pd = 0.0001)$.



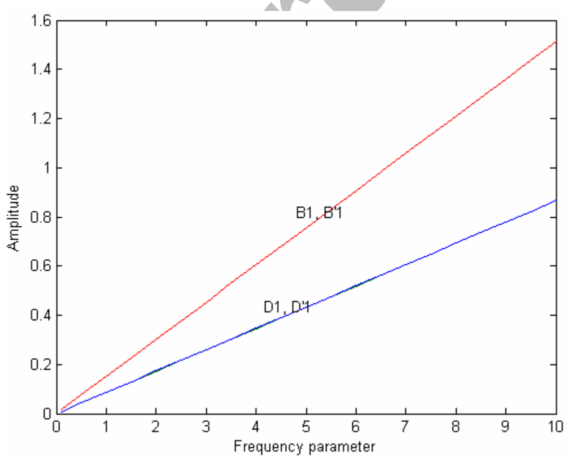
شکل ۶ : تغییرات دامنه‌های بازتاب و شکست پراشی حقیقی و موهومی، B_3, B_3' بر حسب زاویه تابش $(pd = 0.0001)$.



شکل ۷ : تغییرات دامنه‌های بازتاب و شکست پراشی حقیقی و موهومی، D_3, D_3' بر حسب زاویه تابش $(pd = 0.0001)$.

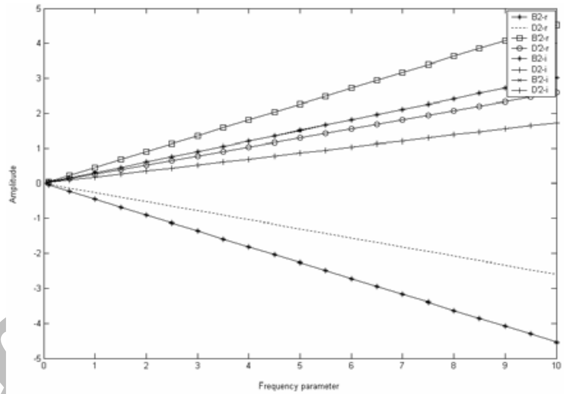


شکل ۸ : تغییرات دامنه‌های بازتاب و شکست عادی، B و D بر حسب مشخصه فرکانس $(pd = 0.0001)$.

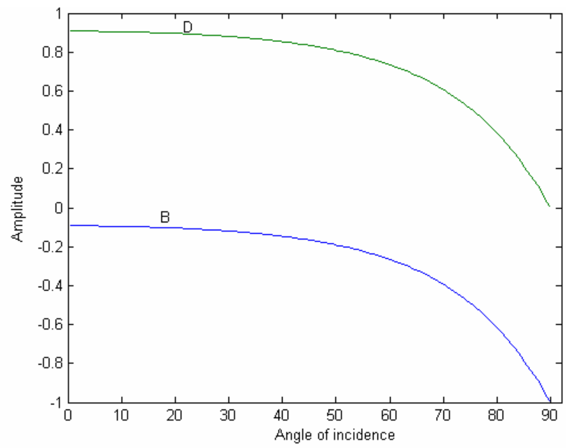


شکل ۹ : تغییرات دامنه‌های بازتاب و شکست پراشی، B_1, D_1, B_1', D_1' بر حسب مشخصه فرکانس $(pd = 0.0001)$.

شـكل هـاي (۸)، (۹) و (۱۰)، تغييــرات ضــرائب بازتاب و شكست بر حسب مشخصه فركانسي $\omega d / \beta_1$ در حالتي كه $n = 1,2$ و $\theta = 30^0$ است را نشان مـي‌دهـد. آشكار است كه ضرائب بازتاب و شكسـت عـادي، B و D در فصـل مشـترك تحـت بـين M_1 و M_2 بـه مشخصه فركانسي بستگي ندارنـد (شـكل ۸). ولـي، مقـادير مطلق ضرايب بازتاب و شكست پراشي با افزايش فركانس به طور خطي افزايش مي‌يابد.

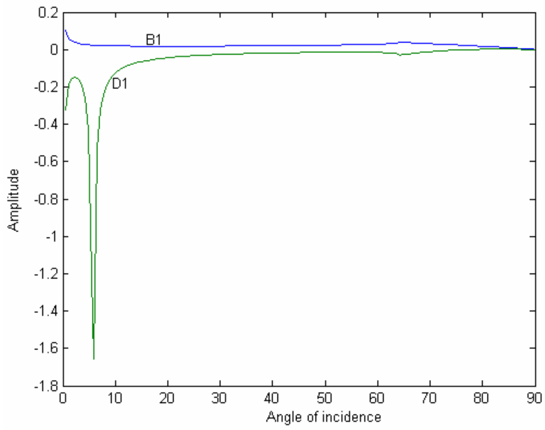


شكل ۱۰: تغييرات دامنه‌هاي حقيقي و موهومي ضرايب بازتاب و شكست پراشي، B_2, D_2, B'_2, D'_2 بر حسب مشخصه فركانس $(pd = 0.0001)$.

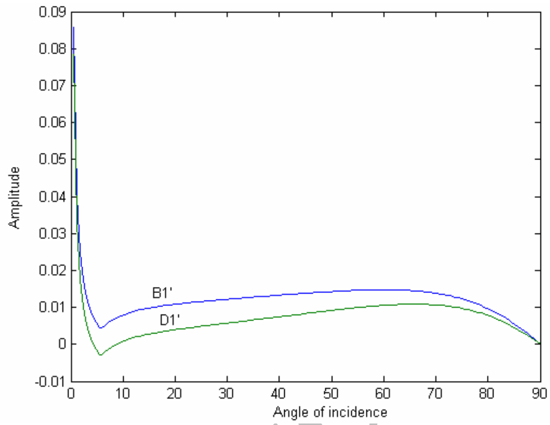


شكل ۱۱: تغييرات دامنه‌هاي بازتاب و شكست معمول، B و D بر حسب زاويه تابش $(pd = 0.01)$.

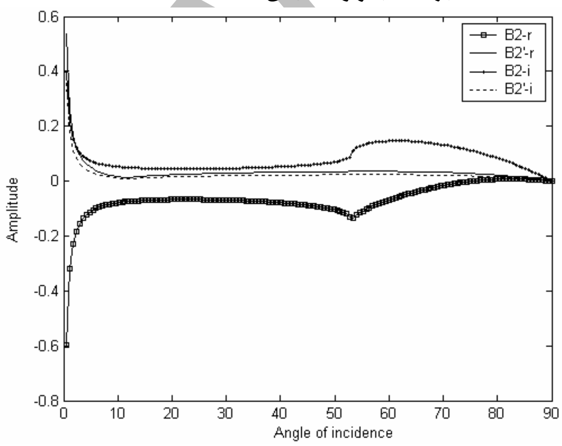
شكل هاي (۱۱) الي (۱۵)، تغييـرات دامنـه ضـرايب بازتـاب و شكسـت بـراي تقريـب درجـه اول از تمـوج بـا مشخصه تموج متفاوت $pd = 0.01$ را نشان مي‌دهند. بـه دليل عدم وابستگي ضرايب بازتاب و شكسـت معمـولي B و D به مشخصه تموج، تغيير اين مشخصه هيچ تأثيري بر روي ضرايب B و D نـدارد. در حـالتي كـه $pd = 0.01$ است، عدد موج معادله فصل مشترك، p ، بزرگتر مي‌شود، در نتيجه، طول موج فصل مشترك كاهش مي‌يابد كه ايـن با فرض اوليه رايلي، مبني بر به حـد كـافي كوچـك بـودن تموج فصل مشترك مغايرت دارد و شكل هـاي (۱۱) الـي (۱۵) تغييرات ضرايب بازتاب و شكست پراشي بـر حسـب زاويه تابش θ را براي حالتي كه $pd = 0.01$ است نشـان مي دهد.



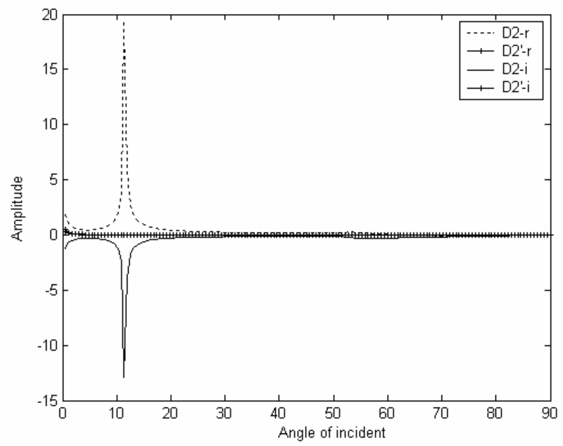
شكل ۱۲: تغييرات دامنه‌هاي بازتاب و شكست پراشي، B_1, D_1 بر حسب زاويه تابش $(pd = 0.01)$.



شكل ۱۳ : تغييرات دامنه‌هاي بازتاب و شكست پراشي، B'_1, D'_1 بر حسب زاويه تابش $(pd = 0.01)$.



شكل ۱۴: تغييرات دامنه‌هاي بازتاب و شكست پراشي حقيقي و موهومي B_2, B'_2 بر حسب زاويه تابش $(pd = 0.01)$.



شکل ۱۵: تغییرات دامنه‌های بازتاب و شکست پراشی حقیقی و موهومی، D_2, D_2' بر حسب زاویه تابش ($pd = 0.01$)،

نتیجه گیری

از روش تقریب رایلي براي پیدا کردن ضرایب بازتاب و شکست موج تخت تابشي SH در فصل مشترك موج دار بین دو نیم‌فضاي ایزوتروپ جانبي استفاده شده است. ضرایب بازتاب و شکست براي مرز تخت و هم چنین تقریب درجه اول از تموج فصل مشترك به دست مي‌آیند. نتایج به دست آمده نشان مي‌دهند که این ضرائب به زاویه تابش، فرکانس موج، تموج فصل مشترك و خواص الاستیکي محیط بستگي دارند. محاسبات عددي نشان مي‌دهند که این ضرائب قویاً تحت تأثیر تموج فصل مشترك مي باشند. در صورتي که فصل مشترك تخت باشد، فرکانس موج تابشي هیچ تأثیري بر ضرائب بازتاب و شکست ندارد، لیکن این ضرائب براي تقریب درجه اول از تموج، شدیداً تحت تأثیر مشخصه فرکانسي قرار دارند.

مراجع

1 - Ewing, W. M., Jardetsky, W. S. and Press, F. (1957). *Elastic Waves in Layered Media*, McGraw-Hill Pub. Co., New York.

2 - Aki, K. and Richards, P. G. (2002). *Quantitative Seismology*, 2nd. Ed. University Science Book, New York,

3 - Sheriff, R. E. and Geldart, P. L. (1995). *Exploration Seismology*. Cambridge University Press, Cambridge.

4 - Lay, T. and Wallace, T. C. (1995). *Modern Global Seismology*, International Geophysics Series, Academic Press, New York.

5 - Udias, A. (1999*). Principles of Seismology*, Cambridge University Press, Cambridge.

6 - Chaudhary, S., Kaushik, V. P. and Tomar, S. K. (2004), "Transmission of plane SH-wave through a self-reinforced elastic slab sandwiched between two anisotropic inhomogeneous elastic solid half-spaces." *Int. J. Applied Mech. & Engng,* Vol. 9, No. 1, PP. 131-146.

7 - Tomar, S. K. and Garg, M. (2005), "Reflection and transmission of waves from a plane interface between two microstretch solid half-spaces." *Int. J. Engineering Science*, Vol. 43, No. 1-2, PP. 139-169.

8 - Singh, J. and Tomar, S. K. (2006), "Reflection and transmission of transverse waves at a plane interface between two different porous elastic solid half-spaces." *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 176, No. 1, PP. 364-378.

9 - Adams, W. M. and Ghung-Po, C. (1964). "Wave propagation phenomena at an irregular infinite interface: Part I: Theory." *Bulletin of the Seismological Society of America*, Vol. 54, No. 6, Part B, PP. 2209-2222.

10 - Gupta, S. (1987). "Reflection and transmission of SH wave in laterally and vertically heterogeneous media at an irregular boundary." *Geophysical Transactions,* Vol. 33, No. 2, PP. 89-111.

11 - Rayleigh, L. (1893). "On the reflection of sound or light from a corrugated surface." *Rep. Brit. Assoc. Adv. Sci.,* PP. 690-691.

12 - Asano, S. (1960). "Reflection and refraction of elastic waves at a corrugated boundary surface: Part I: The case of incidence of SH-wave." *Bulletin of the Earthquake Research Institute,* Vol. 38, No. 2, PP. 177–197.

13 - Asano, S. (1966). "Reflection and refraction of elastic waves at a corrugated interface." *Bulletin of the Seismological Society of America*, Vol. 56, No. 1, PP. 201–221.

14 - Asano, S. (1961). "Reflection and refraction of elastic waves at a corrugated boundary surface: Part II." *Bulletin of the Earthquake Research Institute*, Vol. 39, No. 3, PP. 367–466.

15 - Abubakar, I. (1962). "Scattering of plane elastic waves at rough surfaces." *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, Vol. 58, PP. 136–157.

16 - Dunkin, J. W. and Eringen, A. C. (1962). "Reflection of elastic waves from the wavy boundary of a half-space." *Proceedings of the 4th US National Congress of Applied Mechanics*, ASME Publication, PP. 143–160.

17 - Rice, O. (1951). "Reflection of electromagnetic waves from slightly rough surfaces." *Communication of Pure and Applied Mathematics*, Vol. 4, PP. 351–378.

18 - Tomar, S. K. and Saini, S. L. (1997). "Reflection and refraction of SH-waves at a corrugated interface between two-dimensional transversely isotropic half spaces." *Journal of Physics of the Earth*, Vol. 45, PP. 347–362.

19 - Tomar, S. K., Kumar, R. and Chopra, A. (2000). "Reflection and refraction of SH-waves at a corrugated interface between transversely isotropic and visco-elastic solid half spaces." *Acta Geophysica Polonica,* Vol. 50, PP. 231–249.

20 - Lekhnitskii, S. G. (1963). *Theory of Elasticity of an Anisotropic Body*, Holden-Day, San Francisco.

21 - Loloi, M. (2000). "Boundary integral equation solution of three-dimensional elastostatic problems in transversely isotropic solids using closed-form displacement fundamental solutions." *Int. J. Numer. Meth. Engng,* Vol. 48, PP. 823-842.

واژه های انگلیسی به ترتیب استفاده درمتن

1 - Microstrech Solid