

# بررسی ناپایداری جریان های دوبعدی موازی در سیالات ویسکوالاستیک با استفاده از روش های شبه طیفی

نوید خبازی<sup>۱</sup> و کیوان صادقی<sup>۲\*</sup>

<sup>۱</sup> دانش آموخته کارشناسی ارشد مهندسی مکانیک - پردیس دانشکده های فنی - دانشگاه تهران

<sup>۲</sup> دانشیار دانشکده مهندسی مکانیک - پردیس دانشکده های فنی - دانشگاه تهران

(تاریخ دریافت ۸۵/۷/۵، تاریخ دریافت روایت اصلاح شده ۸۷/۸/۲۵، تاریخ تصویب ۸۸/۲/۵)

## چکیده

در این مقاله اثر خواص الاستیک سیالات غیر نیوتنی بر ناپایداری هیدرودینامیکی آنها در جریان های موازی به طور نظری مورد بحث و بررسی قرار گرفته است. برای این منظور از مدل ویسکوالاستیک معروفی به نام مدل سیال مرتبه ۲ به عنوان معادله اساسی سیال مورد نظر در محاسبات استفاده شده است. این مدل در مورد آن دسته از سیالات ویسکوالاستیک که دارای ویسکوزیته ثابتی می باشند به کار گرفته می شود. در نتیجه این مدل خاص این امکان را فراهم می سازد تا که بتوان به طور مجزا و خالص اثر خواص الاستیک یک سیال نیوتنی را بر روی عدد رینولدز بحرانی آن در جریان های موازی تبیین نمود. برای این منظور فرم تعمیم یافته ای از معادله اور - سامرفلد برای این سیال خاص در جریان های موازی به دست آمد. با توجه به پیچیدگی ظاهری این معادله، برای حل این معادله مجبور شدیم که از روش های عددی استفاده نماییم که برای این منظور یک کد عددی بر اساس روش طیفی نوشته شد. از کد مزبور برای بررسی اثر خواص الاستیک سیال هم در جریان پویزویی و هم در جریان بلازیوس استفاده گردید. نتایج به دست آمده حاکی از آن است که در این دو جریان خاص، الاستیسیته یک سیال دارای نقشی ناپایدار کننده است. به عبارت دیگر، با افزایش خاصیت الاستیک در یک سیال پیش بینی می شود که عدد رینولدز بحرانی آن در هر دو جریان کاهش یابد.

**واژه های کلیدی:** سیال مرتبه ۲، جریان بلازیوس، عدد الاستیک، عدد رینولدز بحرانی، ناپایداری هیدرودینامیکی، سیالات غیر نیوتنی

## مقدمه

استوانه از حالت صرفاً مماسی خارج شده و به جریان آرام دیگری که علاوه بر مؤلفه مماسی شامل مؤلفه های شعاعی و محوری نیز می باشد تبدیل می شود [۱]. با افزایش بیشتر در سرعت دورانی، جریان مزبور از فازهای آرام دیگری عبور نموده و در نهایت به ازای مقدار خاصی از عدد رینولدز و عدد تیلور به جریان درهم تبدیل می گردد. با توجه به اهمیت این جریان خاص در اندازه گیری ویسکوزیته و با توجه به این که وقوع پدیده ناپایداری موجب خطای قابل ملاحظه ای در اندازه گیری گشتاور مقاوم می گردد می توان به اهمیت این نوع از ناپایداری در ویسکومترهای استوانه ای پی برد.

بر خلاف سیالات نیوتنی که در مورد آنها ناپایداری معمولاً فقط در رینولدزهای بالا مشاهده می شود ("ناپایداری اینرسی") در مورد سیالات ویسکوالاستیک این پدیده حتی در رینولدزهای بسیار کم نیز مشاهده می شود [۲]. این نوع ناپایداری که به "ناپایداری الاستیک" موسوم است در بسیاری از فرآیندهای صنعتی نظیر اکستروژن

ناپایداری هیدرودینامیکی پدیده ای رایج در جریان سیالات به شمار می رود. در حقیقت، بسیاری از جریان ها تحت شرایط خاصی تغییر ماهیت داده و به جریانی دیگر تبدیل می شوند. که به عنوان مثال می توان به جریان پوازویی (جریان آرام، دائم، غیر قابل تراکم و توسعه یافته در یک لوله) اشاره نمود [۱]. مشاهدات تجربی حاکی از آن است که در مورد سیالات نیوتنی هنگامی که عدد رینولدز در این جریان خاص به مقدار ۲۳۰۰ می رسد جریان ناپایدار شده و ناگهان از حالت آرام به حالت درهم تبدیل می شود [۱]. این نوع ناپایداری در محلول ها و مذاب های پلیمری که سیالاتی از نوع غیر نیوتنی هستند نیز مشاهده می گردد. با توجه به این که در اثر درهم شدن جریان، افت فشار به شدت بالا می رود بنابراین می توان به اهمیت این نوع ناپایداری در جریان در لوله ها پی برد. به عنوان مثالی دیگر در این رابطه می توان به جریان آرام بین دو استوانه دوار و هم مرکز اشاره نمود. تحت شرایط خاصی (که بستگی به عدد رینولدز دارد) جریان آرام در فضای بین دو

سیال را به طور کیفی بر ناپایداری آن در جریان های مختلف بررسی نمود. در این تحقیق در نظر است از این مدل برای بررسی ناپایداری جریان پوازویی و جریان بلازیوس استفاده شود. با توجه به این که ناپایداری جریان پوازویی سیالات مرتبه ۲ در این اواخر انجام شده است [۱۳] فلذا می توان از اطلاعات موجود در این جریان خاص برای چک کردن درستی کد عددی نوشته شده در این پروژه (که از نوع شبه طیفی است) استفاده نمود. در نهایت از این کد برای بررسی اثر خواص الاستیک یک سیال بر ناپایداری آن در جریان بلازیوس استفاده خواهد شد. لازم به ذکر است که منظور از جریان بلازیوس در واقع لایه مرزی آرام، دائم و غیر قابل تراکم در بالای یک صفحه تخت ساکن از نوع نیمه متناهی می باشد که در معرض وزش جریانی یکنواخت قرار گرفته است (شکل ۱). تا آن جایی که نویسندگان این مقاله اطلاع دارند تا به امروز در خصوص ناپایداری سیالات ویسکوالاستیک در جریان بلازیوس انجام نشده است.

### معادلات حاکم

نقطه شروع در تحلیل های مربوط به ناپایداری سیالات ویسکوالاستیک استفاده از معادلات حرکت کوشی و معادله پیوستگی می باشد. با صرف نظر کردن از اثرات ثقل و نیز با این فرض که سیال غیر قابل تراکم و جریان نیز از نوع ایزوترم است معادلات حاکم بر جریان دوبعدی چنین سیالی به صورت زیر نوشته می شوند [۱۴]:

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \quad (1)$$

$$\rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

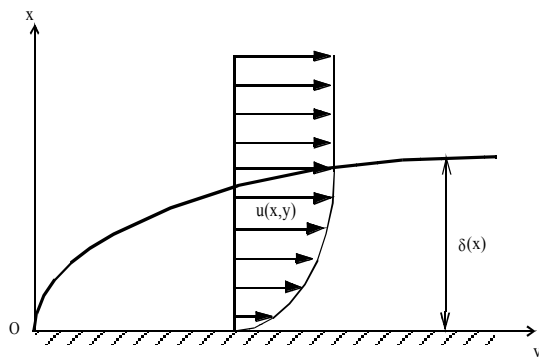
در معادلات ۱ و ۲ برای مربوط نمودن مؤلفه های تنسور تنش (که تنسوری متقارن فرض می شود) به میدان سرعت لازم است معادله اساسی سیال معلوم باشد. با توجه به ماهیت کیفی این پروژه تحقیقاتی، برای سادگی تجزیه و تحلیل و با توجه به این که تا به امروز ناپایداری هیچ سیال ویسکوالاستیکی در جریان بلازیوس انجام نشده است تصمیم گرفته شد که برای معرفی تنسور تنش  $\tau_{ij}$  از مدل ویسکوالاستیک معروفی به نام مدل مرتبه ۲ در فرم زیر آن

مذابهای پلیمری برای تولید ورق و یا مفتول های پلاستیکی دیده می شود [۲]. در حقیقت وقوع پدیده ای خاص به نام "پوست کوسه ای" معمولاً به ناپایداری جریان مذاب در داخل قالب و یا در دهانه خروجی آن نسبت داده می شود [۲]. با توجه به این که در اثر وقوع این پدیده سطح خارجی محصول تولیدی هم چون پوست کوسه زبر می گردد فلذا پدیده ای مزاحم محسوب می شود.

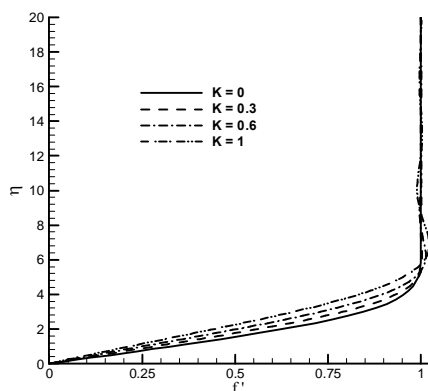
برای کنترل پدیده های فوق الذکر لازم است درک و شناخت درستی از این پدیده ها وجود داشته باشد. از این رو جای تعجب نیست که مبحث ناپایداری هیدرودینامیکی سریعاً تبدیل به مبحثی بسیار مهم در مجامع علمی و صنعتی جهان (به خصوص در صنعت پلیمر) شده است. با توجه به دشواری انجام تحقیقات تجربی در مورد سیالات غیر نیوتنی، اغلب تحقیقات انجام شده در این زمینه به صورت نظری و با استفاده از شبیه سازی های عددی بوده است که متأسفانه در اغلب موارد با موفقیت چندانی نیز همراه نبوده است. به عنوان مثال، تا به امروز راهی برای کنترل پدیده "پوست کوسه ای" به جز کاهش دبی و یا کاهش فشار رانش اکسترودر پیدا نشده است که هر دو به معنای کاهش حجم تولید محصول می باشد.

مهم ترین عاملی که ما را در بررسی پدیده ناپایداری سیالات غیر نیوتنی دچار مشکل می سازد این است که معادله اساسی واحدی برای سیالات غیر نیوتنی وجود ندارد. در ضمن در بسیاری از مسائل واقعی و کاربردی، هندسه جریان به قدری پیچیده است که شبیه سازی های عددی و تعبیر و تفسیر نتایج به دست آمده از آنها تبدیل به امر بسیار دشواری می گردد. از این رو جای شگفتی ندارد که اغلب تحقیقات نظری و عددی انجام شده در گذشته، در رابطه با ناپایداری هیدرودینامیکی سیالات غیر نیوتنی، اختصاص به معادلات اساسی ساده آن هم در جریان هایی با هندسه ساده هم چون جریان کوئت و یا جریان پوازویی داشته باشد [۳-۱۲]. در این پروژه تحقیقاتی در نظر است با استفاده از معادله اساسی ساده ای به نام مدل سیال مرتبه ۲ اثر خواص الاستیک یک سیال غیر نیوتنی بر عدد رینولدز بحرانی آن در جریان های موازی با استفاده از روش های عددی مورد بررسی قرار گیرد. با توجه به این که سیال مرتبه ۲ هم چون سیالات نیوتنی دارای ویسکوزیته ثابتی است فلذا این مدل این امکان را فراهم می سازد که بتوان اثر خواص الاستیک یک

الاستیک بدون بعد  $K$  (که به زودی تعریف خواهد شد) نشان داده شده اند [۱۵]. لازم به ذکر است که همان طور که در مرجع [۱۵] به طور مبسوط توضیح داده شد برای به دست آوردن این پروفیل های سرعت، از تئوری لایه های مرزی و از روش حل تشابهی استفاده گردیده است.



شکل ۱: جریان بلازیوس بطور شماتیک.



شکل ۲: پروفیل های سرعت جریان پایه در جریان بلازیوس بر حسب عدد الاستیک بدون بعد [۱۵].

با معلوم شدن پروفیل های سرعت در جریان پایه، در مرحله بعد لازم است اغتشاشی دو بعدی و دلخواه به این میدان سرعت پایه تحمیل گردد. علت انتخاب اغتشاش دو بعدی در این تحقیق در این بوده است که بر طبق قضیه اسکوایر [۱] این نوع اغتشاش به مراتب خطرناک تر از اغتشاشات سه بعدی در ناپایدار نمودن جریان می باشد. با اعمال اغتشاش دو بعدی به میدان سرعت و میدان فشار پایه داریم:

$$u(x, y, t) = V(y) + u'(x, y, t) \quad (۶)$$

$$v(x, y, t) = v'(x, y, t) \quad (۷)$$

$$p(x, y, t) = p_0(x) + p'(x, y, t) \quad (۸)$$

در روابط فوق  $V(y)$  میدان سرعت پایه و  $p_0(x)$

(که به مدل والترز نیز موسوم است) استفاده شود [۱۴]:

$$\tau_{ij} = 2\mu_0 d_{ij} - 2k_0 \frac{\Delta}{\Delta t} (d_{ij}) \quad (۴)$$

در رابطه فوق داریم [۱۴]:

$$\frac{\Delta}{\Delta t} (d_{ik}) = \frac{D}{Dt} (d_{ik}) - \frac{\partial v_k}{\partial x_m} d_{im} - \frac{\partial v_i}{\partial x_m} d_{mk} \quad (۵)$$

در روابط فوق  $d_{ij}$  تنسور نرخ تغییر شکل و  $D/Dt$  همان مشتق مادی است. در معادله ۴، ضریب  $\mu_0$  ضریب ویسکوزیته (برشی) و ضریب  $k_0$  ضریب الاستیسته سیال می باشد. لازم به ذکر است که بر اساس نتایج آزمایشگاهی،  $\mu_0$  و  $k_0$  هر دو کمیت هایی مثبت می باشند [۱۴]. در ضمن، همان طور که در معادله ۴ مشاهده می شود در صورتی که ضریب  $k_0$  برابر با صفر قرار داده شود مدل سیال مرتبه ۲ به مدل سیال نیوتنی تبدیل می گردد. در این جا لازم می دانیم به این نکته اشاره نماییم که در برخی از مقالات [۱۳] از مدل رئولوژیک دیگری به نام مدل "سیال درجه ۲" استفاده شده است که تنها اختلاف آن با مدل "سیال مرتبه ۲" فی الواقع در علامت  $k_0$  می باشد به نحوی که در "سیال مرتبه ۲" مقدار  $k_0$  مثبت است و در "سیال درجه ۲" مقدار  $k_0$  منفی می باشد. با توجه به این که خواص سیال جملگی مثبت هستند و نیز با توجه به این واقعیت که نتایج آزمایشگاهی به دست آمده در مورد محلول ها و مذاب های پلیمری جملگی حاکی از مثبت بودن خاصیت الاستیک در چنین سیالاتی می باشند بنابراین می توان ادعا نمود که نتایج حاصل از "سیال درجه ۲" فاقد ارزش مهندسی بوده و صرفاً نوعی کنجکاو ریاضی محسوب می گردد [۱۳]. لذا در این تحقیق، در تطابق با نتایج آزمایشگاهی، مقدار  $k_0$  مثبت در نظر گرفته می شود.

پس از انتخاب معادله اساسی سیال، لازم است به عنوان گام نخست در هر تحلیل ناپایداری، پروفیل های سرعت جریان پایه به ازای مقادیر مختلف  $k_0$  محاسبه گردند. خوشبختانه در مقالاتی که اخیراً توسط صادقی و شریفی [۱۵]، و نیز توسط صادقی و دیگران [۱۲] منتشر گردیده اند پروفیل های سرعت سیالات مرتبه ۲ در جریان بلازیوس و هم در جریان پوازویی قبلاً محاسبه شده اند. به عنوان مثال، در شکل (۲) پروفیل های سرعت مربوط به سیالات مرتبه ۲ در جریان بلازیوس به صورت تابعی از عدد

سرعت موج C در ترم زمان ضرب می شود (به همین دلیل این نوع خاص از تحلیل ناپایداری خطی اصطلاحاً "تحلیل زمانی" نام دارد) فلذا اگر بخش موهومی C مثبت باشد اغتشاش در زمان رشد کرده و جریان ناپایدار می گردد. در قسمت بعد روش حل معادله ۹ توضیح داده می شود. لازم به ذکر است که شرایط مرزی لازم برای حل معادله ۹ بستگی به هندسه جریان دارند. در جریان پوزویی مؤلفه های اغتشاشی سرعت در هر دو دیواره برابر با صفر در نظر گرفته می شوند:

$$f(-1) = f'(-1) = 0; f(+1) = f'(1) = 0 \quad (13)$$

در جریان بلازیوس مؤلفه های اغتشاشی سرعت در دیواره و نیز در بی نهایت (به عبارت دیگر، در فواصل بسیار دور از صفحه) برابر با صفر در نظر گرفته می شوند:

$$f(0) = f'(0) = 0; f(+\infty) = f'(+\infty) = 0 \quad (14)$$

### روش عددی حل

در این مقاله برای حل معادله ۹ (با توجه به شرایط مرزی ارائه شده در معادلات ۱۳ و ۱۴) از روش عددی طیفی که در حل مسائل ناپایداری از دقت بسیار بالایی برخوردار است استفاده می گردد. برای این منظور، دامنه تابع جریان اغتشاش به صورت سری تقریبی زیر در نظر گرفته می شود:

$$f(y) \approx f_n(y) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \xi_n(y) \quad (15)$$

در این رابطه  $\xi_n(x)$  توابع پایه (توابع سعی) می باشد که در انتخاب آنها خوشبختانه تا حد زیادی آزادی عمل وجود دارد. در این تحقیق برای ساخت توابع مزبور از چند جمله ای های چبیشف به صورت زیر استفاده خواهد شد:

$$\xi_n(y) = T_{n-1}(y) - \frac{2(n+1)}{n+2} T_{n+1}(y) + \frac{n}{n+2} T_{n+3}(y) \quad (16)$$

در معادله فوق،  $T_n(y)$  چند جمله ای چبیشف می باشد که در بازه  $y \in [-1, 1]$  به صورت زیر تعریف می شوند.

$$T_n(y) = \cos[n \cos^{-1}(y)] \quad (17)$$

همان طور که در مرجع [۱۶] بدان اشاره شده است در صورتی که از توابع پایه ای که توسط معادلات ۱۶ و ۱۷ معرفی می شوند در جریان پویزویی استفاده گردد در این صورت شرایط مرزی مسئله (بر طبق معادله ۱۳) به طور خود به خود ارضاء خواهند شد. اما اگر بخواهیم از این توابع

میدان فشار پایه است (که در جریان بلازیوس برابر با صفر است). در مرحله بعد لازم است این میدان سرعت و میدان فشار در معادلات حاکم از نوع غیر دائم (معادلات ۱ تا ۳) که در آنها مؤلفه های تنسور تنش قبلاً از معادله ۴ جایگزین شده اند قرار داده شوند تا معادلات دیفرانسیل حاکم بر اغتشاش به دست آیند. پس از انجام تعدادی عملیات ریاضی که شامل حذف فشار بین این دو معادله، تفریق حل پایه از این معادلات و در نهایت خطی سازی آن است (برای جزئیات به مرجع [۱۶] رجوع شود) فرم تعمیم یافته معادله اور-سامرفلد به صورت زیر برای سیالات مرتبه ۲ به دست می آید [۱۶]:

$$[1 - i\alpha K \cdot \text{Re}(V - c)](D^2 - \alpha^2)^2 f = i\alpha \cdot \text{Re}[(V - c)(D^2 - \alpha^2) - (D^2 V + K \cdot D^4 V)] f \quad (9)$$

در این معادله منظور از D همان عامل مشتق  $d/dy$  است. در ضمن، اگر در معادله ۹ عدد الاستیک K برابر با صفر قرار داده شود مطابق انتظار معادله مزبور تبدیل به "معادله ار - سامرفلد کلاسیک" برای سیالات نیوتنی می گردد. لازم به ذکر است که در معادله ۹ عدد رینولدز و عدد الاستیک به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\text{Re} = \rho U_c L / \mu \quad (10)$$

$$K = k_0 / \rho L^2 \quad (11)$$

در روابط فوق L طول مشخصه جریان است که در جریان پوزویی دوبعدی برابر با نصف فاصله بین دو صفحه (H) و در جریان بلازیوس برابر با ضخامت جا به جایی ( $\delta^*$ ) در نظر گرفته می شود. لازم به ذکر است که در به دست آوردن معادله ۹ فرض گردیده که بتوان تابع جریان اغتشاش ( $\psi'$ ) را ترکیبی از مدهای نرمال به صورت انتگرال فوریه زیر نوشت [۱،۲]:

$$\psi'(x, y, t) = \int_0^{\infty} f(y) \exp[i\alpha(x - ct)] d\alpha \quad (12)$$

در این رابطه  $\alpha$  عدد موج است که عددی حقیقی و مثبت فرض گردیده و به عنوان ورودی داده می شود. با معلوم بودن پروفیل سرعت پایه و نیز انتخاب طول موج  $\alpha$  حل معادله ۹ تبدیل به مسئله ای از نوع مقدار ویژه می گردد که در آن مقادیر ویژه فی الواقع همان سرعت موج C می باشند که می تواند عددی مختلط به صورت  $C = C_r + iC_i$  باشد. با توجه به این که بر طبق معادله ۱۲

بلازیوس قبلاً مورد بررسی قرار نگرفته است فلذا تصمیم گرفته شد که از مقادیر موجود نیوتنی برای این منظور استفاده شود. در عمل، با استفاده از کد مزبور عدد رینولدز بحرانی برای سیالات نیوتنی هم در جریان پوازویی و هم در جریان بلازیوس محاسبه گردید. همان طور که می دانیم در مورد سیالات نیوتنی در جریان پوازویی عدد رینولدز بحرانی برابر با  $5772/20$  و در جریان بلازیوس برابر با  $519/06$  است [۱]. کد طیفی نوشته شده در این پروژه در جریان پوازویی و جریان بلازیوس عدد رینولدز بحرانی را به ترتیب برابر با  $5772/84$  و  $518/66$  حاصل می سازد که با نتایج منتشر شده در مراجع مزبور بسیار نزدیک می باشد. لازم به ذکر است که برای به دست آوردن این مقادیر از صد جمله در سری طیفی (معادله ۱۵) استفاده شده است تا نتایج، مستقل از  $N$  گردند.

پس از حصول اطمینان از کارایی کد کامپیوتری در مورد سیالات نیوتنی، در مرحله بعد تصمیم گرفته شد کارایی آن در مورد سیالات مرتبه ۲ نیز مورد ارزیابی قرار گیرد. خوشبختانه، در مقاله ای که اخیراً چاپ شده است صادقی و دیگران [۱۲] با استفاده از روش "ریکاتی" منحنی ناپایداری خنثی و عدد رینولدز بحرانی سیالات مرتبه ۲ را در جریان پوازویی دو بعدی به ازای اعداد الاستیک مختلف به دست آورده اند. شکل (۳) منحنی های ناپایداری خنثی سیالات مرتبه ۲ را در جریان پوازویی دو بعدی که با استفاده از کد طیفی نوشته شده در این تحقیق به دست آمده است نشان می دهد. در جدول (۱) نیز عدد رینولدز بحرانی و عدد موج بحرانی به صورت تابعی از عدد الاستیک ارائه شده اند.

جدول ۱: اثر عدد الاستیک بر عدد رینولدز و عدد موج بحرانی در جریان پوازویی دو بعدی سیالات مرتبه ۲.

K	$Re_{cr}$	$\alpha_{cr}$
0.00000	5772.84	1.0990
0.00001	5638.32	1.0240
0.00010	4697.78	1.0750
0.00100	2214.69	1.3685

مقادیر ارائه شده در جدول (۱) و نیز در شکل (۳) که در این تحقیق با استفاده از روش طیفی به دست آمده اند) با مقادیری که در مرجع [۱۲] و با استفاده از روش ریکاتی به دست آمده اند عملاً یکی می باشند.

در مورد جریان بلازیوس استفاده کنیم لازم است با استفاده از تبدیل زیر، فضای محاسباتی را از  $y \in [-1, 1]$  به  $\eta \in [0, \eta_{max}]$  تبدیل نماییم.

$$\eta = \frac{\eta_{max}}{2}(y+1) \quad (18)$$

لازم به ذکر است که در رابطه فوق  $\eta_{max}$  طول بدون بعدی است که معرف "بی نهایت" از نظر فیزیکی است. با قرار دادن سری پیشنهاد شده توسط معادله ۱۵ در معادله ۹ و با توجه به این واقعیت که در حالت کلی حل مزبور حل دقیقی برای این معادله محسوب نمی گردد فلذا باقی مانده ای به طور طبیعی بر جای خواهد ماند. برای این که این باقی مانده تا آن جا که ممکن است کاهش یابد لازم است ضرایب  $a_n$  در معادله ۱۵ به طور مناسب انتخاب گردد که برای انتخاب آن روش های مختلفی وجود دارد [۱۷]. در این تحقیق برای انتخاب این ضرایب از این ایده استفاده می شود که باقی مانده مزبور باید در نقاط خاصی به نام نقاط گوس - لوباتو [۱۷] دقیقاً برابر با صفر گردد. نقاط مزبور به صورت زیر تعریف می شود:

$$y_j = \cos(j\pi/N); \quad j = 0, 1, 2, \dots, N \quad (19)$$

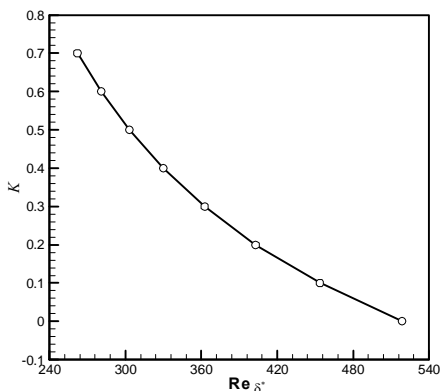
با صفر قرار دادن باقی مانده در نقاط مزبور، برای پیدا کردن  $a_n$  لازم است  $N$  معادله جبری خطی به صورت زیر حل گردند:

$$\sum_{n=1}^N b_{mn}(k, c, \alpha, Re) a_n = 0 \quad (20)$$

در این معادله  $b_{mn}$  ماتریس ضرایب می باشد که ماتریسی مربعی شکل از مرتبه  $N \times N$  است. از آن جایی که معادلات مزبور همگن و خطی می باشند فلذا برای این که این معادلات دارای جواب باشند لازم است که دترمینان ماتریس ضرایب  $b_{mn}$  برابر با صفر گردد. در نتیجه، جستجوی مقادیر ویژه  $c$  بدین صورت انجام می گیرد که به ازای مقادیر معلوم  $K, Re, \alpha$  کافی است بخش حقیقی به همراه بخش موهومی این دترمینان برابر با صفر قرار داده شوند. پس از به دست آوردن تمامی مقادیر ویژه معادله ۹ می توان با استفاده از این روش ساده منحنی ناپایداری خنثی را بر حسب عدد الاستیک به دست آورد.

### نتایج به دست آمده و تحلیل آنها

قبل از انجام هر کاری لازم بود عملکرد کد کامپیوتری نوشته شده در این تحقیق کنترل شود. با توجه به این که ناپایداری سیالات ویسکوالاستیک در جریان



شکل ۵: چگونگی تغییر عدد رینولدز بحرانی بر حسب اثر عدد الاستیک در جریان بلازیوس.

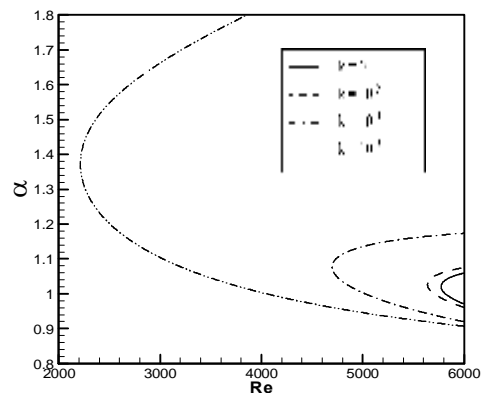
در جدول (۲) اثر عدد الاستیک  $K$  بر عدد رینولدز بحرانی و عدد موج بحرانی در جریان بلازیوس به صورت کمی نشان داده شده است. همان طور که در این جدول مشاهده می شود با افزایش عدد الاستیک، طول موج های بزرگ تری در معرض ناپایداری قرار می گیرند. لازم به ذکر است که در محاسبات مربوط به بررسی ناپایداری جریان بلازیوس سیالات مرتبه ۲ برای این که نتایج مستقل از  $\eta_{max}$  گردند در عمل مجبور شدیم  $\eta_{max}$  را در محدوده ۳۰ تا ۶۰ (بسته به مقدار عدد الاستیک  $K$ ) انتخاب نمائیم و این در حالی است که در مورد سیالات نیوتنی مقدار  $\eta_{max}$  برابر با ۵ کاملاً کافی می باشد.

جدول ۲: اثر عدد الاستیک بر عدد رینولدز و عدد موج بحرانی سیالات مرتبه ۲ در جریان بلازیوس.

$K$	$Re_{cr}$	$\alpha_{cr}$
0.0	518.66	0.304
0.1	453.70	0.312
0.2	403.00	0.320
0.3	362.60	0.328
0.4	329.90	0.335
0.5	303.10	0.342
0.6	280.80	0.348
0.7	261.90	0.355

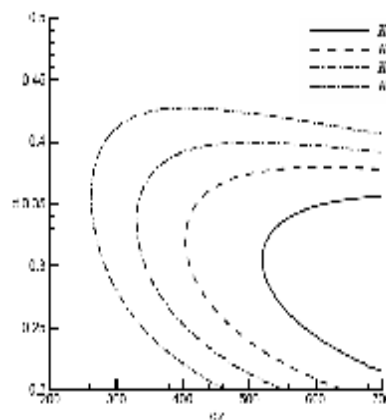
### نتیجه گیری کلی

بر اساس نتایج عددی به دست آمده از این تحقیق پیش بینی می شود که در جریان بلازیوس نیز هم چون جریان پوازویی در صورتی که سیال دارای خواص الاستیک



شکل ۳: اثر عدد الاستیک بر منحنیهای ناپایداری خشی در جریان پوازویی دوبعدی (جریان پوازویی صفحه ای).

پس از حصول اطمینان از عملکرد کد کامپیوتری در خصوص سیالات نیوتنی و سیالات ویسکوالاستیک از نوع مرتبه ۲، از کد مزبور برای به دست آوردن منحنی ناپایداری خشی سیالات مرتبه ۲ در جریان بلازیوس استفاده شد. شکل (۴) نتایج به دست آمده در مورد منحنی ناپایداری خشی و چگونگی تغییرات آن با تغییر عدد الاستیک را نشان می دهد. در شکل (۵) نیز اثر عدد الاستیک بر روی عدد رینولدز بحرانی نشان داده شده است. همان طور که در شکل های (۴) و (۵) مشاهده می گردد با افزایش خاصیت الاستیسته در یک سیال عدد رینولدز بحرانی آن کاهش می یابد. به عبارت دیگر، هم چون جریان پوازویی، در جریان بلازیوس نیز الاستیسته یک سیال دارای اثری ناپایدار کننده است.



شکل ۴: اثر عدد الاستیک بر منحنیهای ناپایداری خشی در جریان بلازیوس.



وسيله نگارندگان اين مقاله از امکاناتی که توسط اين دانشگاه در اختيار آنان داده شده است تشکر می نمايند. در ضمن نويسندگان مقاله لازم می دانند از داوران محترم مقاله که با ارائه نقطه نظرات سازنده خود در ارتقای کیفی آن نقش مهمی را ایفا نموده اند صمیمانه تشکر نمایند.

باشد گذر از جریان آرام به جریان درهم در رینولدزهای کمتری صورت پذیرد.

### تقدیر و تشکر

انجام این پروژه در قالب طرح تحقیقاتی مصوب شورای پژوهشی دانشگاه تهران صورت گرفته است که بدین

### مراجع

- 1 - Drazin, P. G. and Reid, W. H. (1981). *Hydrodynamic Stability*, Cambridge University Press, Cambridge.
- 2 - Larson, R. G. (1992). *Instabilities in viscoelastic flows*, Rheologica Acta, Vol. 31, PP. 313-363.
- 3 - Thomas, L.H. (1953). "Stability of plane poiseuille flow." *Phys. Rev.*, Vol. 91, PP. 780-784.
- 4 - Dolph, C. L. and Lewis, D. C. (1958). "On the amplification of infinite systems of ordinary differential equations to perturbations of plane Poiseuille flow." *Quart. Appl. Math.*, Vol. 16, PP. 97-110.
- 5 - Grosch, C. E. and Salwen, H. (1968). "The stability of steady and time-dependent plane Poiseuille flow." *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 34, PP. 204.
- 6 - Davey, A. and Reid, W.H. (1977). "On the stability of stratified viscous plane Couette flow, part 1. Constant buoyancy frequency." *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 80, PP. 360.
- 7 - Chun, D. H. and Schwarz, W. H. (1968). "Stability of a plane poiseuille flow of a second-order fluid." *J. Phys. of Fluids*, Vol. 11, No. 1, PP. 5-9, 1968.
- 8 - Sureshkumar, R. and Beris, A. N. (1995). "Linear stability analysis of viscoelastic Poiseuille flow using an Arnoldi-based orthogonalization algorithm." *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, Vol. 56, PP. 151-182.
- 9 - Draad, A. A., Kuiken, G. D. C. and Nieuwstadt, F. T. M. (1998). "Laminar-turbulent transition in pipe flow for Newtonian and non-Newtonian fluids." *J. Fluid Mech.*, Vol. 377, PP. 267-312.
- 10 - Lee, K.C. and Finlayson, B.A. (1986). "Stability of plane Poiseuille and Couette flow of a Maxwell fluid.", *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, Vol. 21, PP. 65-78.
- 11 - Makarov, A. M., Martinson, L. K. and Pavlov, K. B. (1969). "The instability of plane flow for a non-Newtonian fluid obeying a rheological power-law." *J. of Engineering Physics and Thermophysics*, Vol. 16, No. 5, PP. 545-548.
- 12 - Taghavi, S. M., Khabazi, N. and Sadeghy, K. (2009). "Hydromagnetic linear instability analysis of Giesekus fluids in plane Poiseuille flow." *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat*, Vol. 14, PP. 2046-2055.
- 13 - Sadeghy, K., Taghavi, S. M., Khabazi, N., Mirzadeh, M. and Karimfazli, I. (2007). "On the Use of Hydrodynamic Instability Test as an Efficient Tool for Evaluating Viscoelastic Fluid Models." *Adv. Studies Theor. Phys.*, Vol. 1, No. 8, PP. 367 - 379.
- 14 - Bird, R.B., Armstrong, R. C. and Hassager, O. (1987). *Dynamics of Polymeric Liquids*, Vol. 1, 2nd edition, John Wiley & Sons, New York.
- 15 - Sadeghy, K. and Sharifi, M. (2004). "Blasius flow of viscoelastic fluid: a numerical approach." *Int. J. Appl. Vol. 9, No. 2, PP. 399.*
- 16 - Khabazi, N. (2007). *Hydromagnetic Instability of Viscoelastic Fluids in Blasius Flow*, M.Sc. thesis, University of Tehran.
- 17 - Canuto, C., Hussaini, M. Y., Quartcrioni, A. and Zang, T. A. (1987). *Spectral Methods in Fluid Dynamics*, Springer, Berlin.