

روش‌های تجزیه مقادیر منفرد منقطع و تیخونوف تعمیم یافته در پایدارسازی مسئله انتقال به سمت پائین

علیرضا آزموه‌اردلان^{۱*} عبدالرضا صفری^۲ و یحیی الله‌توکل^۳

^۱دانشیار گروه مهندسی نقشه‌برداری، قطب مهندسی نقشه‌برداری و مقابله با سوانح طبیعی

پرديس دانشکده‌های فنی - دانشگاه تهران

^۲استادیار گروه مهندسی نقشه‌برداری دانشکده فنی، قطب مهندسی نقشه‌برداری و مقابله با سوانح طبیعی

پرديس دانشکده‌های فنی - دانشگاه تهران

^۳دانش آموخته کارشناسی ارشد ژئودزی گروه مهندسی نقشه‌برداری دانشکده فنی دانشگاه تهران

(تاریخ دریافت ۸۵/۶/۴، تاریخ دریافت روایت اصلاح شده ۸۷/۱/۲۷، تاریخ تصویب ۸۸/۲/۲۹)

چکیده

روش‌های گوناگونی جهت پایدار نمودن مسائل بدووضع تا کنون مطرح گردیده است. این روشها را می‌توان عمدتاً تحت عنوان روش‌های مستقیم و تکراری تقسیم‌بندی نمود. تجربه نشان داده که عملکرد روش‌های پایدارسازی بر روی مسائل بدووضع یکسان نبوده و در مورد هر یک از مسائل بدووضع تکنیک‌های مختلف پایدارسازی رفتار متفاوتی را از خود نشان می‌دهند. بدین لحاظ لازم است در مورد مسائل بدووضع با بررسی تکنیک‌های مختلف پایدارسازی بهترین تکنیکی را که از نظر تئوری و منطق با مسئله بدووضع مورد نظر هماهنگی دارد را انتخاب و بکارگیری نمود. در این مقاله دو خانواده از روش‌های مستقیم جهت پایدارسازی مسئله انتقال به سمت پائین از طریق انتگرال آبل پواسن جهت تعیین ژئوئید بدون استفاده از فرمول استوکس مورد بررسی قرار گرفته‌اند. این دو خانواده عبارتند از: (۱) روش‌های تجزیه مقادیر منفرد منقطع (معمولی و تعمیم یافته)^۱ (TSVD, TGSVD)، (۲) روش‌های تیخونوف تعمیم یافته^۲ (با نرم‌ها و نیم-نرم‌های در زیر فضاهای سوبولف^۳ $W_2^1(a, b)$ ، $W_2^2(a, b)$)، نتایج عددی نشان می‌دهند که روش "تیخونوف تعمیم یافته" با استفاده از نرم گسسته زیرفضای سوبولف $W_2^2(a, b)$ دارای دقت بهتری نسبت به سایر روش‌ها بوده و دارای سازگاری بیشتر با حل معکوس معادله انتگرالی آبل-پواسن در پایدارسازی مسئله انتقال به سمت پائین است. در مقابل روش "تجزیه مقادیر منفرد تعمیم یافته" (TGSVD) با اپراتور گسسته شده مشتق دوم^۴ دارای دقت و سازگاری کمتر با مسئله مذکور است.

واژه‌های کلیدی: انتقال به سمت پائین، مسئله بدووضع^۴، تجزیه مقادیر منفرد منقطع، روش تیخونوف تعمیم یافته، زیرفضای سوبولف

مقدمه

گردد. در این مقاله هدف ارائه روش‌های مستقیم جهت پایدارسازی مسائل ناپایدار است. در اوایل قرن پیش، هادامارد اولین کسی بود که بحث دستگاه‌های معادلات خوش‌وضع و بدووضع را مطرح نمود. ایشان دستگاه‌های معادلاتی را که در آنها سه شرط یاد شده برقرارند را مسائل "خوش‌وضع"^۵ و مسائلی که در آنها یکی از سه شرط نقض گردیده باشد، را مسائل "بدووضع" نام‌گذاری کردند.

هادامارد براین عقیده بود که مسائل بدووضع تنها جنبه مصنوعی داشته و نمی‌تواند در حل مسائل فیزیکی موضوعیت یابند. بر خلاف نظر او امروزه شاهدیم که مسائل بدووضع در قالب مسائل معکوس در حل معادلات

در حل عددی دستگاه‌های معادلات، بنابر وضعیت جواب مسئله، یعنی وجود، یکتایی و یا وضعیت پایداری جواب (یا به عبارت دیگر پیوستگی تابع جواب بر حسب تغییرات داده‌های ورودی)، روش‌های گوناگونی مورد استفاده قرار می‌گیرند. به عبارت دیگر تا زمانی که سه شرط (۱) وجود، (۲) یکتایی و (۳) پایداری خوب تأمین باشند، روش‌های معمول حل دستگاه‌های معادلات می‌توانند مورد استفاده قرار گیرند، اما در صورت عدم برقراری هر یک از شروط یاد شده، با یک مسئله بدووضع مواجه خواهیم بود که حل آن نیازمند تمهیدات ویژه است. به عنوان مثال جهت رفع مشکل، یکتائی لازم است، نقض تعریف مسئله با افزودن اطلاعات دیگر به مسئله، برطرف

بصورت ذیل تعریف می‌گردند:

$$\omega(\phi) = \frac{a}{\sqrt{b^2 + \varepsilon^2 \sin^2 \phi}} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \frac{b^2}{a\varepsilon} \ln \frac{a + \varepsilon}{a - \varepsilon} \right) \quad (۳)$$

$$S = Area(E_{a,b}^2) = 4\pi a^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{b^2}{4a\varepsilon} \ln \frac{a + \varepsilon}{a - \varepsilon} \right) \quad (۴)$$

معادله انتگرالی آبل-پواسن فوق‌الذکر از نوع معادله انتگرالی فرد هولم نوع اول است، در حالت کلی بر روی ناحیه Ω به صورت ذیل تعریف می‌شود [۱۴]:

$$\int_{\Omega} k(\bullet, \circ) f(\circ) d\Omega = g(\bullet) \quad \bullet, \circ \in \Omega \quad (۵)$$

به عبارتی دیگر تابع g را می‌توان حاصل از اپراتور انتگرالی K بر روی f به صورت ذیل دانست:

$$K(f) = g \quad (۶)$$

که در آن:

$$K : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega) \quad (۷)$$

$$K(f)(\bullet) = \langle k(\bullet, \circ), f \rangle$$

تابع g و کرنل k معلوم بوده، در حالی که f مجهول، و هدف نیز یافتن آن است. اگر برای کرنل k داشته باشیم:

$$k : L^2(\Omega \times \Omega) \quad (۸)$$

آنگاه اپراتور K یک اپراتور هیلبرت اشمیت بوده، و لذا یک اپراتور فشرده نیز خواهد بود. کرنل اپراتور انتگرالی آبل-پواسن نیز در شرط هیلبرت اشمیت صدق می‌کند [۱۵]، از این رو اپراتور آبل-پواسن یک اپراتور فشرده است. پس با توجه به قضیه ذیل [۱۷] اپراتور معکوس انتگرال آبل-پواسن بی‌کران بوده و جواب معادله آبل-پواسن تابع پیوسته‌ای از داده‌های ورودی (مشاهدات تفاضلی) نمی‌شود:

قضیه: اگر K یک اپراتور کراندار فشرده و معکوس‌پذیر باشد و بر روی یک فضا با بعد متناهی تعریف شده باشد آنگاه معکوس آن K^{-1} یک اپراتور بی‌کران است.

لذا شرط پایداری مسئله نقض گردیده و حل معکوس معادله آبل-پواسن یک نیازمند حل یک مسئله بدو وضع خواهد بود. به دلیل بی‌کران بودن معکوس اپراتور مسئله، این امکان وجود دارد که حضور خطای کوچکی در مشاهدات سبب ایجاد خطای بزرگی در جواب مسئله گردد. بدین جهت در رفتار با این گونه مسائل (مسائل بدو وضع) با اطمینان از وجود و یکتایی جواب، برای حصول جواب پایدار، روشهایی ارائه می‌گردند، که به آنها روش‌های پایداری سازی گفته می‌شود. در روش‌های پایداری سازی با در نظر گرفتن فرضیات خاصی برای مسئله بدو وضع یک اپراتور

انتگرالی خصوصاً معادلات انتگرالی فرد هولم نوع اول در اغلب شاخه‌های مهندسی و فنی به طور گسترده مورد استفاده قرار می‌گیرند. مثال‌های ذیل می‌توانند نشان‌گر تنوع کاربرد مسائل بدو وضع در حل مسائل فیزیکی در جهان کنونی باشند: (۱) اکتشافات زمین‌شناسی در تعیین موقعیت، شکل، دانسیته‌ی اجرام و برخی پارامترهای درونی زمین با استفاده از اندازه‌گیری‌های روی سطح زمین، (۲) مسائل معکوس پراکنش^۶ در تعیین شکل اشیاء با استفاده از اندازه‌گیری شدت و فاز امواج پراکنده شده به وسیله‌ی شیئی، (۳) تصویربرداری به روش توموگرافی در مبحث پزشکی، (۴) مسائل معکوس استیفان^۷ جهت مدلسازی ذوب یخچال‌های قطبی.

یکی از مسائل بدو وضعی طرح شده در ژئودزی، حل معکوس اپراتور انتگرالی آبل-پواسن برای تبدیل مشاهده شتاب ثقل تفاضلی از روی سطح زمین به پتانسیل ثقل تفاضلی بر روی بیضوی فرانس، جهت مدلسازی میدان ثقل و تعیین ژئوئید می‌باشد. در این زمینه می‌توان به کارهای انجام شده توسط (Ardalan, 2000) [۱]، (Ardalan and Grafarend, 2004) [۲]، (Safari, 2004) [۱۵] و (Safari et. Al., 2005) [۱۶] اشاره نمود. معادله انتگرال آبل-پواسن که شتاب ثقل تفاضلی را به پتانسیل ثقل تفاضلی بر روی بیضوی رفرنس تبدیل می‌کند به صورت زیر می‌باشد [۱۵]:

$$\delta \Gamma^L(\lambda, \phi, \eta) = \text{grad}(\delta W^L(\lambda, \phi, \eta))$$

$$= \frac{1}{\sqrt{g_{\lambda\lambda}}} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left\{ \frac{1}{S} \int_{\mathbb{E}_{a,b}^2} dS' \omega(\phi') k^L(\lambda, \phi, \eta, \lambda', \phi', \eta_0) \delta W^L(\lambda', \phi') \right\} \mathbf{e}_{\lambda}$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{g_{\phi\phi}}} \frac{\partial}{\partial \phi} \left\{ \frac{1}{S} \int_{\mathbb{E}_{a,b}^2} dS' \omega(\phi') k^L(\lambda, \phi, \eta, \lambda', \phi', \eta_0) \delta W^L(\lambda', \phi') \right\} \mathbf{e}_{\phi}$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{g_{\eta\eta}}} \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ \frac{1}{S} \int_{\mathbb{E}_{a,b}^2} dS' \omega(\phi') k^L(\lambda, \phi, \eta, \lambda', \phi', \eta_0) \delta W^L(\lambda', \phi') \right\} \mathbf{e}_{\eta} \quad (۱)$$

در معادله انتگرالی فوق، $\delta \Gamma^L$ شتاب ثقل تفاضلی در هر نقطه مانند: (λ, ϕ, η) در سیستم مختصات منحنی-الخط بیضوی ژاکوبی، δW^L تابع پتانسیل بر روی بیضوی فرانس $\mathbb{E}_{a,b}^2$ و $k^L(\lambda, \phi, \eta, \lambda', \phi', \eta_0)$ کرنل آبل-پواسن می‌باشد که به صورت زیر معرفی می‌شود:

$$k^L(\lambda, \phi, \eta, \lambda', \phi', \eta_0) = \sum_{n=L+1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{Q_{nm}(\lambda, \phi)}{Q_{nm}(\lambda', \phi')} \times \mathbf{e}_{nm}(\lambda', \phi') \mathbf{e}_{nm}(\lambda, \phi) \quad (۲)$$

$\omega(\phi)$ و S نیز بترتیب تابع وزن و مساحت بوده که

هایی اورتوگونال و یا معکوس‌پذیر می‌باشد، تبدیل نمود. به عبارتی دیگر در این روش برای هر ماتریس با هر بعد دو ماتریس یافت می‌گردد، به طوری که با اعمال دو ماتریس یکی از چپ و دیگری از راست، یک ماتریس قطری حاصل می‌شود. از این رو این روش در زمره روشهای قطری‌سازی^{۱۱} نیز می‌باشد. روش تجزیه مقادیر منفرد از آنجائی که به خوبی تمامی مشکلات موجود در ماتریس بدشرایط A (حاصل از گسسته‌سازی مسئله بدوضع) را آشکار ساخته و خصوصیات کرنل همچون (۱) پیوستگی مقادیر منفرد، (۲) روند رو به صفر مقادیر منفرد و (۳) رفتار نوسانی بردارهای منفرد را در بر دارد، ابزار بسیار مفید در تحلیل مستقیم مسائل بدوضع گسسته به شمار می‌رود. استفاده از روش‌های تجزیه مقادیر منفرد معمولی و تعمیم یافته در تحلیل مسائل بدوضع گسسته به کارهای (Hansen R.J, 1971) و (Varah J.M, 1973) بر می‌گردد.

تجزیه مقادیر منفرد معمولی

اگر معادله گسسته شده مسئله بدوضع $K(f) = g$ به صورت زیر باشد:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m \quad (9)$$

آنگاه یکی از ابزارهای کار با این مسئله روش «تجزیه مقادیر منفرد» ماتریس \mathbf{A} است. برای آسانی کار فرض می‌نمائیم که $m \geq n$ باشد. در این حالت تجزیه مقادیر منفرد ماتریس \mathbf{A} به صورت ذیل خواهد بود:

$$\mathbf{A}_{mn} = \mathbf{U}_{mm} \mathbf{\Sigma}_{mn} \mathbf{V}_n^T = \sum_{i=1}^n \mathbf{u}_i \sigma_i \mathbf{v}_i^T \quad (10)$$

در معادله فوق $\mathbf{U}_{mm} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_m)$ و $\mathbf{V}_n = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ ماتریس‌هایی با ستون‌های اورتونرمال است،

$$\mathbf{V}^T \mathbf{V} = \mathbf{I}_m, \quad \mathbf{U}^T \mathbf{U} = \mathbf{I}_{mm}$$

ستون‌های ماتریس‌های \mathbf{U} و \mathbf{V} را به ترتیب بردارهای منفرد چپ و راست ماتریس \mathbf{A} می‌نامند. عناصر قطر اصلی ماتریس $\mathbf{\Sigma}_{mn} = [\sigma_i \delta_{ij}]_{0 \leq i \leq m, 0 \leq j \leq n}$ تابع کرونکر) غیر منفی بوده و غالباً به ترتیب ذیل قرار می‌گیرند:

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n \geq 0$$

مقادیر قطر اصلی $\mathbf{\Sigma}$ ، مقادیر منفرد ماتریس \mathbf{A} و نسبت σ_1 / σ_n عدد شرط ماتریس نامیده می‌شود، از روابط

جدید جایگزین اپراتور معکوس مسئله شده که به آن اصطلاحاً «اپراتور معکوس پایدار شده»^۸ و یا «استراتژی پایدارسازی»^۹ اطلاق می‌گردد. در عمل مشکل دیگری نیز که در حل معکوس انتگرال فردهولم نوع اول بوجود می‌آید، که آن عدم اطلاع از تابع g (مشاهدات) در تمامی نقاط فضا است، چرا که عملاً تابع g صرفاً در تعداد نقاطی محدود از فضا معلوم می‌باشد. بدین لحاظ ناگزیر به گسسته‌سازی معادله بدوضع هستیم. لازم به ذکر است که از نظر ریاضی، گسسته‌سازی معادلات بدوضع، خود یک پایدارسازی محسوب می‌شود [۱۰]، چرا که معادلات انتگرالی بدوضع پیوسته به معادلاتی با بعد متناهی و اپراتور مسئله بدوضع نیز به اپراتوری با بعد متناهی (یک ماتریس) تبدیل می‌شده و لذا اپراتور معکوس (و یا شبه وارون) ماتریس حاصل از گسسته‌سازی از دیدگاه ریاضی یک اپراتور خطی و پیوسته خواهد بود. اما عملاً در حل عددی این مسائل کماکان با مشکل بدشرایطی^{۱۰} مسئله مواجه‌ایم. همچنین پس از گسسته‌سازی مسائل بدوضع، معادلات به دست آمده هنوز دارای پاره‌ای از خصوصیات معادلات بدوضع پیوسته اولیه (همچون، پیوستگی مقادیر منفرد، روند رو به صفر آنها و رفتار نوسانی بردارهای منفرد) بوده، که و بدین سبب به معادله حاصل از گسسته سازی، «مسائل بدوضع گسسته» اطلاق می‌شود.

در این مقاله ابتدا روش‌های تجزیه مقادیر منفرد (معمولی و تعمیم‌یافته) را به عنوان ابزاری سودمند در حل دستگاه‌های معادلات بدوضع گسسته مطرح نموده، سپس به بحث استراتژی پایدارسازی، در پایدارسازی مسائل بدوضع پرداخته، و پس از آن به روش‌های مشهور پایدارسازی، مانند روش‌های منقطع و روش‌های تیخونوف (استاندارد و تعمیم یافته) در مسئله انتقال به سمت پائین خواهیم پرداخت.

تجزیه مقادیر منفرد (معمولی و تعمیم یافته) (SVD, GSVD)

یکی از مهم‌ترین ابزارهای تفکیک و تجزیه در تسهیل حل دستگاه‌های بزرگ خطی، روش تجزیه مقادیر منفرد است. این روش، خود تعمیمی از روش تجزیه مقادیر ویژه اپراتورهای مربعی است، با این تفاوت که در این روش هر ماتریس با هر بعد را می‌توان به حاصل ضرب سه ماتریس که یکی از آنها قطری، و دو ماتریس دیگر نیز ماتریس

یک پایه مناسب برای فضای جواب از اهمیت بسیار بالایی برخوردار است. همانطور که در حل دستگاه معادلات بدو ضلع گسسته (۱۲)، ملاحظه می‌شود، اگر بردارهای $\{v_i\}_{0 \leq i \leq n}$ پایه مناسبی برای فضای جواب باشد، آنگاه همگرایی مسئله به سمت جواب سریعتر شده و تأثیر مقادیر منفرد کوچکتر و بردارهای منفرد با نوسانات شدید بر روی جواب کاهش می‌یابد. از این رو در حل دستگاه‌های معادلات بدو ضلع گسسته، از ابزار تجزیه مقادیر منفرد تعمیم یافته استفاده می‌شود چرا که در این روش می‌توان پایه فضای جواب را تغییر داد.

اپراتور معکوس پذیر $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$ را در نظر بگیرید که بر روی فضای جواب اعمال گردیده و موجب تغییر پایه فضای جواب باشد (مانند تبدیل فوریه که برداری را از حوزه زمان به حوزه فرکانس می‌برد). در این صورت هر بردار x در فضای جواب را می‌توان به صورت بردار x^L نوشت:

$$\begin{cases} x^L = Lx \\ x = L^{-1}x^L \Rightarrow x = [L_1^{-1}, L_2^{-1}, \dots, L_n^{-1}]x^L = \sum_{i=1}^n x_i^L L_i^{-1} \end{cases} \quad (13)$$

که بردارهای $\{L_1^{-1}, L_2^{-1}, \dots, L_n^{-1}\}$ ستونهای ماتریس L^{-1} است، در این صورت داریم:

$$x \in \text{Span}\{L_1^{-1}, L_2^{-1}, \dots, L_n^{-1}\} \quad (14)$$

پس در حل دستگاه $Ax = b$ با انتخاب صحیح L می‌توان یک پایه مناسب برای فضای جوابها تولید نمود. از طرفی حل دستگاه فوق، معادل حل دستگاه $AL^{-1}x^L = b$ منفرد خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} AL^{-1} &= U_{mn} \Gamma_{nn} V_{nm}^T & U^T U &= V^T V = I_{nn} \\ \Gamma &= \text{diag}\{\{\gamma_i\}, 1 \leq i \leq n\}, 0 \leq \gamma_1 \leq \gamma_2 \leq \dots \leq \gamma_n \end{aligned} \quad (15)$$

تغییر ترتیب مقادیر منفرد $\{\gamma_i\}_{1 \leq i \leq n}$ سبب تغییر در تجزیه مقادیر منفرد نشده و تنها ترتیب بردارهای منفرد تغییر می‌دهد. در تجزیه فوق هنوز عمل قطری-سازی بر روی اپراتور A جهت تسهیل حل دستگاه معادلات، صورت نگرفته است. تعریف دو ماتریس قطری M و S به صورت ذیل، می‌تواند در برگزیده قطری سازی جفت ماتریس (A, L) گردد.

می‌شود که ماتریس A به شدت به تجزیه مقادیر ویژه ماتریس های $AA^T, A^T A$ وابسته است. این وابستگی یکتایی تجزیه مقادیر منفرد را نشان می‌دهد که از یکتایی تجزیه مقادیر ویژه ماتریس های متقارن نتیجه می‌گردد. در ارتباط با مسائل بدو ضلع گسسته دومشخصه اصلی برای تجزیه مقادیر منفرد اغلب یافت می‌گردد:

۱. مقادیر منفرد به تدریج بدون گسستگی به سمت صفر میل می‌کند و افزایش ابعاد A ، تعداد مقادیر منفرد کوچک را افزایش خواهد داد.
 ۲. در حالی که σ_i با افزایش اندیس کاهش می‌یابد بردارهای منفرد $\{u_i, v_i\}$ نیز با افزایش i مرتبا تغییر علامت می‌دهند.
- همچنین با توجه به رابطه اصلی تجزیه مقادیر منفرد در ابتدای بخش روابط زیر نیز حاصل می‌گردد.

$$\begin{cases} Av_i = \sigma_i u_i & \|Av_i\|_2 = \sigma_i \\ A^T u_i = \sigma_i v_i & \|A^T u_i\|_2 = \sigma_i \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (11)$$

دستگاه معادلات دقیق $Ax^{\text{exact}} = b^{\text{exact}}$ را در نظر بگیرید به طوری که در آن x^{exact} و b^{exact} به ترتیب بردار مجهولات واقعی و بردار مشاهدات واقعی می‌باشد، با فرض آنکه رابطه $x^{\text{exact}} = A^\dagger b^{\text{exact}}$ نیز بین آنها برقرار باشد داریم:

$$\begin{aligned} A^\dagger &= \sum_{i=1}^n v_i \frac{1}{\sigma_i} u_i^T \\ \Rightarrow x^{\text{exact}} &= A^\dagger b^{\text{exact}} = \sum_{i=1}^n \frac{u_i^T b^{\text{exact}}}{\sigma_i} v_i \\ \Rightarrow x^{\text{exact}} &\in \text{Span}\{v_1, v_2, \dots, v_n\} \end{aligned} \quad (12)$$

تجزیه مقادیر منفرد تعمیم یافته

همان گونه که در روش تجزیه مقادیر منفرد معمولی مشاهده شد، تجزیه مقادیر منفرد ماتریس ضرائب مجهولات دستگاه معادلات $Ax = b$ از طریق ستون های ماتریس $V = [v_1, v_2, \dots, v_n]$ پایه‌ای برای فضای جوابها به وجود می‌آورد. حال می‌خواهیم بدانیم آیا بردارهای $\{v_i\}_{0 \leq i \leq n}$ پایه‌ای مناسب برای فضای جواب خواهد بود یا خیر؟ تاثیر انتخاب پایه‌ای برای فضای جواب، برای حل دستگاه های معادلات گسسته کوچک چندان محسوس نبوده، اما در حل دستگاه های معادلات پیوسته (انتگرالی) با بعد نامتناهی و دستگاه های معادلات بزرگ گسسته حاصل از گسسته سازی معادلات انتگرالی، انتخاب

$$\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \rangle_{A^T A} = \mathbf{x}_i^T \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{x}_j = 0, i \neq j \quad (24)$$

با فرض آنکه بین مقادیر واقعی مجهولات $\mathbf{x}^{\text{exact}}$ و مقادیر واقعی مشاهدات $\mathbf{b}^{\text{exact}}$ رابطه $\mathbf{x}^{\text{exact}} = \mathbf{A}^{\dagger} \mathbf{b}^{\text{exact}}$ برقرار باشد، مشابه رابطه (۱۲) می‌توان نتیجه گرفت که:

$$\mathbf{x}^{\text{exact}} \in \text{Span} \{ \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n \} \quad (25)$$

پس حصول به یک پایه مناسب $\{ \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n \}$ برای فضای جواب، مستلزم انتخاب صحیح ماتریس \mathbf{L} است. متأسفانه مقالات بسیار اندکی، در تعیین \mathbf{L} آن هم در خصوص مسائل خاص وجود داشته و بنا بر اطلاعات نگارندگان تا کنون اقدامی در خصوص ارائه الگوریتم جامعی جهت اتخاذ ماتریس \mathbf{L} صورت نگرفته است. همانگونه که در ادامه خواهیم دید، در روش پایدارسازی استاندارد تیخونوف، ماتریس $\mathbf{L} = \mathbf{I}_{mn}$ در نظر گرفته شده که در بسیاری از مسائل کاربردی این انتخاب، یک انتخاب بهینه نمی‌باشد. به عنوان مثال در (Oray and pratt, 1995)، بحث ارجحیت ماتریس \mathbf{L} ای که بر بردار $[1, 1, \dots, 1]^T$ اثر پایدارسازی ندارد، نسبت به ماتریس یک \mathbf{I}_{mn} مطرح گردیده است.

معکوس پایدارشده (استراتژی پایدارسازی)

مسئله بدو ضلع $K(f) = g, f \in X, g \in Y$ را در نظر بگیرید. معکوس پایدارشده (استراتژی پایدارسازی) $K_{\lambda}^{\#}$ به اعضای خانواده‌ای از اپراتورهای خطی و کراندار $\{ K_{\lambda}^{\#} | K_{\lambda}^{\#} : Y \rightarrow X, \lambda \geq 0 \}$ اطلاق می‌شود که برای آنها رابطه ذیل برقرار بوده

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} K_{\lambda}^{\#} K(f) = f \quad (26)$$

یا عبارت دیگر اپراتور $K_{\lambda}^{\#} K$ همگرایی نقطه‌ای به اپراتور همانی داشته باشد. به پارامتر λ نیز پارامتر پایدارسازی اطلاق می‌گردد. در اغلب روش‌های پایدارسازی سه خاصیت عمده برای معکوس پایدارشده $K_{\lambda}^{\#}$ یافت می‌گردد که عبارتند از:

۱. نرم اپراتور معکوس پایدارشده $K_{\lambda}^{\#}$ به عنوان تابعی از پارامتر پایدارسازی λ دارای خاصیت ذیل است:

$$\| K_{\lambda}^{\#} \| \leq d(\lambda) < \infty$$

۲. هنگامی که نرم خطاهای موجود در داده‌های ورودی $(\|e\|)$ به سمت صفر میل می‌کند، پارامتر پایدارسازی نیز به عنوان تابعی از نرم خطاها به سمت صفر میل خواهد نمود: $\lim_{\|e\| \rightarrow 0} \lambda(\|e\|) = 0$

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) \\ \mathbf{M} &= \text{diag}(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n) \\ \gamma_i &= \sigma_i / \mu_i, \sigma_i^2 + \mu_i^2 = 1 \\ \mathbf{\Gamma} &= \mathbf{S} \mathbf{M}^{-1} \end{aligned} \quad (16)$$

پس داریم:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \mathbf{L}^{-1} &= \mathbf{U} \mathbf{S} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{V}^T \\ \Rightarrow (\mathbf{U}^T) \mathbf{A} (\mathbf{L}^{-1} \mathbf{V} \mathbf{M}) &= \mathbf{S} \end{aligned} \quad (17)$$

بنابراین، خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \mathbf{A} = \mathbf{U} \mathbf{S} \mathbf{X}^{-1} \\ \mathbf{L} = \mathbf{V} \mathbf{M} \mathbf{X}^{-1} \end{cases} \quad (18)$$

به تجزیه فوق برای جفت ماتریس (\mathbf{A}, \mathbf{L}) تجزیه مقادیر منفرد تعمیم یافته اطلاق می‌گردد. در حالت جامع‌تر، تجزیه مقادیر منفرد تعمیم یافته برای هر جفت ماتریس $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ و $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^{p \times n}$ به صورت ذیل قابل تعریف است [۴]:

$$\begin{cases} \mathbf{A}_{mn} = \mathbf{U}_{mn} \begin{pmatrix} \Sigma_{pp} & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_{n-p} \end{pmatrix} \mathbf{X}_{mn}^{-1} \\ \mathbf{L}_{pn} = \mathbf{V}_{pp} \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{pp} & 0 \end{pmatrix} \mathbf{X}_{nn}^{-1} \end{cases} \quad (19)$$

در روابط فوق ستون‌های ماتریس‌های \mathbf{U} و \mathbf{V} اورتونرمال بوده و ماتریس‌های $\mathbf{M} = \text{diag}(\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p\})$ و $\mathbf{\Sigma} = \text{diag}(\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_p\})$ دارای عناصر غیر منفی با ترتیب ذیل می‌باشند:

$$\begin{aligned} 0 \leq \sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \dots \leq \sigma_p \leq 1 \\ 1 \geq \mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_p \geq 0 \end{aligned} \quad (20)$$

همچنین ضرائب (۲۰) طوری نرمالیزه گردیده اند که:

$$\sigma_i^2 + \mu_i^2 = 1, i = 1, 2, \dots, p \quad (21)$$

مقادیر منفرد تعمیم یافته نیز به صورت ذیل تعریف می‌گردند:

$$\gamma_i = \frac{\sigma_i}{\mu_i}, i = 1, 2, \dots, p \quad (22)$$

از طرفی ماتریس شبه وارون \mathbf{L} یعنی \mathbf{L}^{\dagger} و ماتریس $\mathbf{A} \mathbf{L}^{\dagger}$ نیز به صورت ذیل است:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}^{\dagger} &= \mathbf{X} \begin{pmatrix} \mathbf{M}^{-1} \\ 0 \end{pmatrix} \mathbf{V}^T \\ \Rightarrow \mathbf{A} \mathbf{L}^{\dagger} &= \mathbf{U}_{m, 1, \dots, p} \underbrace{\Sigma \mathbf{M}^{-1}}_{\mathbf{\Gamma} = \text{diag}(\gamma_1, \dots, \gamma_p)} \mathbf{V}^T \end{aligned} \quad (23)$$

پس مقادیر منفرد تعمیم یافته همان مقادیر منفرد معمولی ماتریس $\mathbf{A} \mathbf{L}^{\dagger}$ هستند.

اگر ماتریس \mathbf{X} یک ماتریس معکوس‌پذیر با ستون‌های "A^TA متعامد" باشد، یعنی اگر $\{ \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n \}$ ستون‌های ماتریس \mathbf{X} باشد، در آن صورت داریم:

های مختلف پایدارسازی شکل می‌گیرند. که در ادامه به معرفی تعدادی از این روش‌های، که کاربردهای بسیاری در حل مسائل معکوس با استفاده از ابزار تجزیه مقادیر منفرد دارند، می‌پردازیم. "روش‌های منقطع"، "روش کمترین مربعات با کانسترتین مربعی (LSQI)"^{۱۲} و "روش تیخونوف (استاندارد و تعمیم یافته)" از جمله روش‌های شناخته شده در مبحث پایدارسازی بوده که همگی از دسته روش‌های پایدارسازی مستقیم محسوب می‌گردند. روش‌های دیگری نیز از جمله روش‌های غیر مستقیم، یا تکراری، در مبحث پایدارسازی مطرح می‌گردند، که بر خلاف روش‌های مستقیم همچون روش پایدارسازی تیخونوف، که صرفاً مختص پایدارسازی مسائل بد وضع می‌باشند، همان روش تکرار مسائل خوش‌وضع بوده که در صورت بکارگیری در مورد مسائل بد وضع جواب پایدار را نتیجه داده و تعداد تکرار آنها نقش پارامتر پایدارسازی را ایفا می‌نماید.

روش‌های منقطع

همان گونه که می‌دانیم، به تعداد ستون‌های مستقل ماتریسی همچون \mathbf{A} رتبه ماتریس گفته می‌شود. از طرفی دیگر رتبه ماتریس \mathbf{A} برابر تعداد مقادیر منفرد مثبت آن است. در عمل غالباً این تعریف نمی‌تواند مفید واقع گردد، چرا که ممکن است، ستون‌های ماتریس \mathbf{A} از نقطه نظر ریاضی مستقل بوده اما به سبب حضور خطاهایی چون: خطاهای ناشی از تقریب، گسسته‌سازی و خصوصاً خطاهای ناشی از گرد کردن از نقطه نظر عددی وابسته گردند. لذا از نقطه نظر عددی تعریف کاربردی و جامعتری نسبت تعریف ریاضی رتبه ماتریس خواهیم داشت. رتبه عددی ماتریس \mathbf{A} با تلورانس ε ، به صورت ذیل تعریف می‌گردد:

$$r_\varepsilon = r_\varepsilon(\mathbf{A}, \varepsilon) = \text{Min}_{\|\mathbf{E}\|_2 \leq \varepsilon} \text{rank}(\mathbf{A} + \mathbf{E}) \quad (31)$$

به تعریف فوق "رتبه مؤثر" و یا " ε رتبه‌ی" ماتریس \mathbf{A} گفته می‌شود. به عبارت دیگر رتبه عددی ماتریس \mathbf{A} برابر تعداد ستون‌هایی است که با وجود هر اغتشاشی با نرمی حداکثر برابر تلورانس ε در ماتریس \mathbf{A} ، استقلال خطی خود را حفظ نمایند. از طرفی دیگر با توجه به تجزیه مقادیر منفرد \mathbf{A} ، رابطه زیر برقرار است:

$$\sigma_{r_\varepsilon} > \varepsilon \geq \sigma_{r_\varepsilon + 1} \quad (32)$$

در مسائل بدوضع گسسته ماتریس \mathbf{A} از دیدگاه ریاضی کمبود رتبه نداشته، اما در عوض دارای کمبود رتبه

۳. اگر نرم خطاهای موجود در داده‌های ورودی صفر گردد، معکوس پایدار شده $K_\lambda^\#$ به اپراتور معکوس K^{-1} (و در حالت گسسته به معکوس تعمیم یافته

$$K^\dagger) \text{ میل می‌نماید: } \lim_{\substack{\|\mathbf{e}\| \rightarrow 0 \\ \lambda \rightarrow 0}} K_\lambda^\# = K^{-1}$$

در این صورت با توجه به استراتژی پایدارسازی $K_\lambda^\#$ جواب پایدار شده f_{Reg} برای دستگاه معادلات بدوضع مفروض به صورت ذیل معرفی می‌گردد:

$$f_{\text{Reg}} = K_\lambda^\#(g) \quad (27)$$

در مسائل بدوضع گسسته نیز می‌توان با استفاده از ابزار تجزیه مقادیر منفرد (معمولی و تعمیم یافته) استراتژی پایدارسازی را به صورت ذیل معرفی نمود. به طوری که اگر دستگاه معادلات بدوضع گسسته به صورت ذیل باشد:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m \quad (28)$$

با استفاده از تجزیه مقادیر منفرد معمولی استراتژی پایدارسازی به صورت ذیل تعریف می‌گردد:

$$\mathbf{A}^\# = \mathbf{V}\mathbf{\Theta}\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{U}^T \\ \mathbf{\Theta} = \text{diag}(f_1, f_2, \dots, f_n) \quad (29)$$

و همچنین با استفاده از تجزیه مقادیر منفرد تعمیم یافته جفت ماتریس (\mathbf{A}, \mathbf{L}) داریم:

$$\mathbf{A}^\# = \mathbf{X} \begin{pmatrix} \mathbf{\Theta}\mathbf{\Sigma}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{n-p} \end{pmatrix} \mathbf{U}^T \\ \mathbf{\Theta} = \text{diag}(f_1, f_2, \dots, f_p) \quad (30)$$

به درایه‌های ماتریس قطری $\mathbf{\Theta}$ ضرایب فیلتر اطلاق می‌گردد. هر یک از ضرایب فیلتر $\{f_i\}$ به عنوان تابعی از پارامتر پایدارسازی λ و مقدار منفرد متناظر آن دارای خواص ذیل است:

۱. به ازای هر $\lambda > 0$ داریم: $|f_i^\lambda| \leq 1$
 ۲. به ازای هر $\lambda > 0$ ، عددی مانند $c(\lambda)$ وجود دارد به طوری که: در تجزیه مقادیر منفرد معمولی

$$\left| \frac{f_i^\lambda}{\rho_i} \right| \leq c(\lambda) \text{ و } \left| \frac{f_i^\lambda}{\sigma_i} \right| \leq c(\lambda)$$

۳. به ازای تمامی مقادیر منفرد داریم: $\lim_{\lambda \rightarrow 0} f_i^\lambda = 1$
 با توجه به روابط فوق‌الذکر مشاهده می‌گردد که استراتژی پایدارسازی تعریف شده با استفاده از تجزیه مقادیر منفرد معمولی و تعمیم یافته، خواص استراتژی پایدارسازی، که پیشتر بدان اشاره گردید را دارا می‌باشد. با استفاده از ابزار تجزیه مقادیر منفرد و نحوه انتخاب ضرایب فیلتر، روش-

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_\lambda^\# &= \sum_{i=p-r_\lambda+1}^p \mathbf{x}_i \frac{1}{\sigma_i} \mathbf{u}_i + \sum_{i=p+1}^n \mathbf{x}_i \mathbf{u}_i \\ \mathbf{x}_\lambda^{\text{Reg}} &= \sum_{i=p-r_\lambda+1}^p \frac{\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{b} \rangle}{\sigma_i} \mathbf{x}_i + \sum_{i=p+1}^n \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{b} \rangle \mathbf{x}_i \\ r_\lambda &= r_\lambda(\mathbf{A}\mathbf{L}, \lambda) \end{aligned} \quad (36)$$

ضرایب فیلتر نیز در روش تجزیه مقادیر منفرد تعمیم یافته‌ی منقطع به صورت ذیل می‌باشد:

$$f_i = \begin{cases} 1 & \rho_i > \lambda \\ 0 & \rho_i \leq \lambda \end{cases} \quad (37)$$

در عمل برای سهولت، پارامتر پایدارسازی λ را در هر گام تکرار، برابر یکی از مقادیر منفرد (معمولی یا تعمیم یافته) در نظر گرفته و بدین ترتیب رتبه ماتریس \mathbf{A}_λ برابر اندیس مقدار منفرد خواهد شد. پس جواب پایدار شده به قرار ذیل خواهد بود:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_\lambda^{\text{TSVD}} &= \sum_{i=1}^k \frac{\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{b} \rangle}{\sigma_i} \mathbf{v}_i \\ \mathbf{x}_\lambda^{\text{TGSVD}} &= \sum_{i=p-k+1}^p \frac{\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{b} \rangle}{\sigma_i} \mathbf{x}_i + \sum_{i=p+1}^n \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{b} \rangle \mathbf{x}_i \\ r_\lambda(\mathbf{A}\mathbf{L}, \lambda = \sigma_k) &= k \end{aligned} \quad (38)$$

روش‌های "TSVD" و "TGSVD" از جمله روش‌های بسیار متداول در حل مسائل با کمبود رتبه و بدوضع گسسته می‌باشند که در ادامه به کاربرد آن در مبحث انتقال به سمت پائین و حل معکوس معادله آبل پواسن خواهیم پرداخت.

روش پایدارسازی تیخونوف

مشکل اولیه مسائل بدوضع گسسته کمبود رتبهٔ عددی ماتریس ضرایب مجهولات و نامعین^{۱۳} بودن مسئله، بدلیل مقادیر منفرد کوچک ماتریس ضرایب است. لذا لازم است که بمنظور پایدارسازی مسئله، اطلاعاتی در خصوص جواب به مسئله اضافه گردد. یکی از روش‌های حل دستگاه‌های معادلات بدوضع به صورت ذکر شده، "روش تیخونوف" بوده که معمول‌ترین روش در پایدارسازی مسائل بدوضع گسسته خصوصاً حل مسائل معکوس محسوب می‌گردد. ایده روش یاد شده، تقریباً بطور همزمان، ولی مستقل، توسط فیلیپس (Philips, ۱۹۶۲) و تیخونوف (Tikhonov, ۱۹۶۳) ارائه گردید. از نقطه نظر آماری این روش از در زمرهٔ روش‌های بی‌زیین^{۱۴} حل مسائل معکوس محسوب شده و زمانی به کار می‌رود که، اطلاعات یا فرض اولیه‌ای از مجهولات در اختیار باشد (Kaipio J 2005). در روش تیخونوف همچون روش کمترین مربعات، فرض بر تصادفی بودن خطای مشاهدات

عددی است، پس می‌بایست یک یا چند مقادیر منفرد بسیار کوچک در تجزیه مقادیر منفرد ماتریس \mathbf{A} وجود داشته باشد. حضور این مقادیر منفرد کوچک می‌تواند سبب افزایش تأثیر خطای موجود در ضرایب فوریه مشاهدات ($\{\mathbf{u}_i^T \mathbf{b}\}$) در برآورد ضرایب فوریه مجهولات ($\mathbf{u}_i^T \mathbf{b} / \sigma_i$) گردد. برای رفع این مشکل روش‌های پایدارسازی مطرح می‌گردند که در آن‌ها یک ماتریس مانند $\mathbf{A}_{\lambda \geq 0}$ جایگزین ماتریس \mathbf{A} خواهد شد. در این ماتریس سعی بر آن می‌شود که تا حد امکان از تأثیر مقادیر منفرد کوچک کاسته گردد. لذا این ماتریس همان ماتریس بدوضع گسسته \mathbf{A} بوده که در آن صفر مطلق جایگزین مقادیر منفرد کوچک $\{\sigma_{r_\lambda}, \sigma_{r_\lambda+1}, \dots, \sigma_n\}$ گردیده است. یعنی:

$$\begin{cases} \mathbf{A}_\lambda = \sum_{i=1}^{r_\lambda(A, \lambda)} \mathbf{u}_i \sigma_i \mathbf{v}_i^T, \lambda \geq 0 \\ \mathbf{A}_\lambda \rightarrow \mathbf{A} \end{cases} \Rightarrow \mathbf{A}_\lambda \mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (39)$$

و سپس به روش کمترین مربعات مجهولات برآورد می‌شود، پس جواب پایدار شده و استراتژی پایدارسازی به صورت ذیل‌اند:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_\lambda^{\text{Reg}} &= \mathbf{A}^\dagger \mathbf{b} = \sum_{i=1}^{r_\lambda(A, \lambda)} \frac{\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{b} \rangle}{\sigma_i} \mathbf{v}_i \\ \mathbf{A}_\lambda^\# &= (\mathbf{A}_\lambda)^\dagger = \sum_{i=1}^{r_\lambda(A, \lambda)} \mathbf{v}_i \frac{1}{\sigma_i} \mathbf{u}_i^T \end{aligned} \quad (40)$$

روش فوق موسوم به روش پایدارسازی "تجزیه مقادیر منفرد منقطع (TSVD)" بوده و با توجه به روابط فوق می‌توان دید که استراتژی فوق‌الذکر، تمامی خصوصیات یک استراتژی پایدارسازی در بخش قبل را داراست. ضرایب فیلتر نیز در این روش به صورت ذیل خواهند بود:

$$f_i = \begin{cases} 1 & \sigma_i > \lambda \\ 0 & \sigma_i \leq \lambda \end{cases} \quad (41)$$

استفاده از این روش به کارهای "R. J. Hansen" در سال ۱۹۷۱ و "J. M. Varah" در سال ۱۹۸۳ برمی‌گردد. اگر روش پایدارسازی فوق با استفاده از ابزار تجزیه مقادیر منفرد تعمیم یافته انجام پذیرد، آنرا روش پایدارسازی "تجزیه مقادیر منفرد تعمیم یافته منقطع (TGSVD)" می‌نامند. استراتژی پایدارسازی و جواب پایدار شده در این روش نیز از قرار ذیل است:

$$f_i = \frac{\sigma_i^2}{\sigma_i^2 + \lambda} \quad (44)$$

$$\mathbf{x}_\lambda^{\text{Reg}} = \sum_{i=1}^n f_i \frac{\mathbf{u}_i^T \mathbf{b}}{\sigma_i} \mathbf{v}_i$$

در بسیاری از مسائل کاربردی انتخاب نرم فضای هیلبرت (L_2) یعنی $\Omega = \|\cdot\|_2^2$ انتخاب بهینه‌ای بوده [۵] و لذا در ادامه به معرفی روش تیخونوف تعمیم یافته در زیر فضای سوبولف به عنوان یک زیرفضای هیلبرتی در فضای L_2 خواهیم پرداخت.

تیخونوف تعمیم یافته در زیرفضای سوبولف

همان‌گونه که در فوق مشاهده نمودیم در روش تیخونوف از نرم فضای هیلبرت L_2 استفاده می‌گردید که عمده‌ترین مزیت آن سادگی است. همان‌طور که ذکر شد، بجای تابع Ω می‌توان از نرم-۲ یا نیم نرم مناسب استفاده کرد. عموماً در مسائل کاربردی، برای آنکه بتوان بر روی رفتار توابع مجهولات (مشقات و تغییرات آن تا مرتبه‌ای خاص) کنترل بیشتری داشت، می‌توان از نیم‌نرم و یا نرم زیرفضای سوبولف (به عنوان یک زیرفضای هیلبرتی در L_2 که در آن مشتقات توابع تا مرتبه خاصی مربع-انتگرال‌پذیراند) در روش تیخونوف تعمیم یافته بهره جست. قبل از بحث در خصوص نرم سوبولف، به تعریف نیم نرم سوبولف می‌پردازیم.

به هر فضای برداری V که بتوان بر روی آن تابعی غیر منفی مانند ρ با سه شرط ذیل، تعریف نمود [۱۲] یک فضای برداری نیم-نرم‌پذیر و به تابع ρ یک نیم نرم^{۱۵} در فضای برداری V اطلاق می‌گردد:

$$\begin{aligned} (1) &: \rho(v) \geq 0, v \in V \\ (2) &: \rho(\alpha v) = |\alpha| \rho(v), v \in V, \alpha \in \mathbb{R} \\ (3) &: \rho(v + u) \leq \rho(v) + \rho(u), v, u \in V \end{aligned} \quad (45)$$

در روش تیخونوف تعمیم یافته در اغلب موارد بجای تابع Ω از تقریب گسسته نیم-نرم سوبولف ρ_{W_2} به صورت ذیل استفاده می‌شود [۱۳]:

$$\int_a^b |f^{(k)}(x)|^2 dx \approx \sum_{j=1}^{n-k} (\Delta x)^k (\mathbf{L}^{k,n} \mathbf{f})_j \Delta x \quad (46)$$

$$= \|\Delta x^{k-\frac{1}{2}} \mathbf{L}^{k,n} \mathbf{f}\|_2^2 = \|\mathbf{L} \mathbf{f}\|_2^2$$

در رابطه (۴۶) $\mathbf{f}_j = f(j\Delta x), j = 1, 2, \dots, n$ بوده و ماتریس $\mathbf{L}_{k,n}$ نیز موسوم به اپراتور مشتق^{۱۶} [۴] یک ماتریس $(n-k) \times n$ است که در حالت کلی از رابطه بازگشتی ذیل حاصل می‌شود [۱۳]:

و نرمال بودن تابع توزیع احتمال خطاها و صفر بودن امید ریاضی آنها است. از این رو در این روش مانند روش کمترین مربعات به دنبال جوابی با کمترین مقدار باقی-مانده‌ها می‌باشیم. اما حصول به همچنین جوابی صرفاً با شرط کمترین مربعات در دستگاه‌های معادلات بدوضع گسسته به دلیل بدشرایطی اپراتور یاد شد امکان‌پذیر نبوده، از این رو در روش تیخونوف همزمان با مینیم کردن نرم بردار باقی مانده‌ها، با حداقل نمودن خصیصه‌ای از مجهولات، از بی‌کرانی جواب جلوگیری می‌گردد. لذا روش تیخونوف را در حالت جامع، می‌توان در قالب مینیمم‌سازی تابع تیخونوف به صورت ذیل تعریف نمود.

$$F_{\text{Tikhonov}}(\mathbf{x}; \lambda) = \|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|_2^2 + \lambda \Omega(\mathbf{x}) \quad (39)$$

تابع Ω در رابطه (۳۹)، با توجه به فرضیات و یا اطلاعات اولیه‌ای مجهولات مشخص می‌شود. لازم به ذکر است که به روش تیخونوف با تعریف تابع (۳۹) روش "تیخونوف تعمیم یافته" نیز اطلاق می‌گردد. غالباً در پایداری مسائل بد وضع گسسته به روش تیخونوف تعمیم یافته، از مینیم کردن نرم ۲ یا نیم نرم جواب مسئله با تعریف تابع Ω به صورت ذیل استفاده می‌گردد:

$$\Omega(\mathbf{x}) = \|\mathbf{Lx}\|_2^2, \mathbf{L} \in \mathbb{R}^{p \times n} \quad (40)$$

با قرار دادن تابع Ω از تعریف (۴۰) در رابطه (۳۹) و مشتق‌گیری نسبت به مجهولات و مساوی صفر قرار دادن مشتقات به استراتژی پایداری در روش تیخونوف تعمیم یافته به صورت ذیل می‌رسیم:

$$\mathbf{A}_\lambda^\# = (\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \lambda \mathbf{L}^T \mathbf{L})^{-1} \mathbf{A}^T \quad (41)$$

از رابطه فوق و روابط (۱۹) و (۳۰) ضرایب فیلتر و جواب پایداری شده به صورت ذیل حاصل می‌گردد:

$$f_i = \frac{\gamma_i^2}{\gamma_i^2 + \lambda} \quad (42)$$

$$\mathbf{x}_\lambda^{\text{Reg}} = \sum_{i=1}^p f_i \frac{\mathbf{u}_i^T \mathbf{b}}{\sigma_i} \mathbf{x}_i + \sum_{i=p+1}^n \mathbf{u}_i^T \mathbf{b} \mathbf{x}_i$$

اگر در تعریف تابع Ω ، $\mathbf{L} = \mathbf{I}_m$ ، باشد، آنگاه به "روش تیخونوف استاندارد" و یا به طور خلاصه "روش تیخونوف" با تابع تیخونوف به تعریف ذیل خواهیم رسید:

$$F_{\text{Tikhonov}}(\mathbf{x}; \lambda) = \|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|_2^2 + \lambda \|\mathbf{x}\|_2^2 \quad (43)$$

ضرایب فیلتر و جواب پایداری شده به روش تیخونوف استاندارد نیز به صورت ذیل حاصل می‌گردند:

معادل خواهند بود که دو تابع و مشتقات آنها تا مرتبه s با هم معادل باشند. از این رو متر و نرم سوبولف کنترل بیشتری بر روی رفتار تابع نسبت به متر و نرم فضای L_2 خواهد داشت [۲۰]. کاربرد این امر در تئوری تقریب، زمانی خواهد بود که هدف تقریب یک تابع با یک تابع نزدیک به آن باشد. در این صورت استفاده از نرم سوبولف سبب می‌گردد که هم تابع تقریب به تابع مفروض نزدیک گردیده و هم مشتقات آن تقریبی از مشتقات تابع مفروض شود. نرم گسسته شده سوبولف $\|x\|_S$ به صورت ذیل است [۴]:

$$\|x\|_S^2 = \sum_{i=1}^s \alpha_i^2 \|L^i x\|_2^2, x \in \mathbb{R}^n \quad (51)$$

که در آن ماتریس‌های $\{L^i\}, i = 1, 2, \dots, s$ ، ماتریس‌هایی ناشی از گسسته‌سازی اپراتورهای مشتق‌گیری تا مرتبه s بوده که هر یک در یک فاکتور مقیاس ضرب شده‌اند. به ضرایب $\{\alpha_i\}, i = 1, 2, \dots, s$ نیز ضرایب وزن گفته که به توابع $\{q_i(x)\}, i = 0, 1, \dots, s$ و فاصله نمونه‌برداری در گسسته‌سازی رابطه (۵۰) وابسته‌اند.

استفاده از نرم گسسته‌شده سوبولف در روش تیخونوف تعمیم یافته $(\Omega(x) = \|x\|_S^2)$ ، معادل استفاده از ماتریس پایدارسازی L^{Sob} به صورت ذیل، در رابطه (۴۰) است.

$$L^{\text{Sob}} = \begin{pmatrix} \alpha_s L^s \\ \vdots \\ \alpha_1 L^1 \\ \alpha_0 L^0 \end{pmatrix} \quad (52)$$

استفاده از ماتریس پایدارسازی فوق در روش تیخونوف تعمیم یافته با استفاده از ابزار تجزیه مقادیر منفرد تعمیم یافته مستلزم کوچکتر یا مساوی بودن سطرهای ماتریس پایدارسازی نسبت به مجهولات مسئله است، که در ماتریس پایدارسازی L^{Sob} ، این شرط برقرار نیست. لذا برای رفع این مشکل بایستی به جای ماتریس L^{Sob} از ماتریس بالا مثلثی تجزیه QR آن استفاده نمود [۴۵].

در شبیه سازی صورت پذیرفته بخش بعدی مقاله، نرم‌های گسسته‌شده زیر فضاهای سوبولف $W_2^1(a, b)$ و $W_2^2(a, b)$ و نیم‌نرم‌های اول و دوم سوبولف $(\|L^1\|_2$ و $\|L^2\|_2)$ ، در پایدارسازی مسئله انتقال به سمت پائین به روش تیخونوف تعمیم یافته، استفاده شده و نتایج بدست آمده با روش تیخونوف استاندارد و روشهای منقطع مقایسه گردیده است.

$$L^{k,n} = L^{k-1, n-1} L^{1,n} \quad (47)$$

$$L^{0,n} = I_n$$

$$L^{1,n} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & -1 \\ & & & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

هر یک از اعضاء مجموعه $\{\|L^i\|_2\}, i = 1, 2, \dots, s$ نیز به نیم‌نرم سوبولف موسوم‌اند. به عنوان مثال ماتریس‌های L^1 و L^2 ناشی از گسسته‌سازی مشتقات اول و دوم به قرار ذیل است:

$$L^1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & -1 \\ & & & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n-1) \times n} \quad (48)$$

$$L^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & -2 & 1 \\ & & & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n-2) \times n}$$

با توجه به رابطه $L = \Delta x^{k-\frac{1}{2}} L^{k,n}$ و تابع تیخونوف در رابطه (۳۹) و روابط (۴۰) و (۴۱) دیده می‌شود که در پایدارسازی تیخونوف تعمیم یافته، ضرب $\Delta x^{k-\frac{1}{2}}$ به عنوان یک فاکتور مقیاس در پارامتر پایدارسازی عمل نموده و تغییری در جواب پایدارسازی ایجاد نخواهد کرد. زیرفضای سوبولف را با ضرب داخلی منسوب به آن به صورت ذیل تعریف می‌گردد:

$$W_2^s(a, b) = \{f(x) \in L_2(a, b) \mid \forall \alpha \leq s, D_x^\alpha f(x) \in L_2(a, b)\}$$

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b \sum_{k=0}^s q_k^2(x) \frac{d^k f(x)}{dx^k} \frac{d^k g(x)}{dx^k} dx \quad (49)$$

در رابطه (۴۹) $\{q_i(x)\}, i = 0, 1, \dots, s$ توابع حقیقی معلوم و مخالف تابع صفر است. همچنین نرم و متر در فضای $W_2^s(a, b)$ بین دو تابع از رابطه ذیل به دست می‌آید:

$$\|f\|_{W_2^s} = \int_a^b \sum_{k=0}^s q_k^2(x) \left(\frac{d^k f(x)}{dx^k} \right)^2 dx \quad (50)$$

$$\mu_{W_2^s}(f, g) = \int_a^b \sum_{k=0}^s q_k^2(x) \left(\frac{d^k [f(x) - g(x)]}{dx^k} \right)^2 dx$$

بنابراین با توجه به متر و نرم تعریف شده در زیرفضای سوبولف، دو تابع نزدیک به هم محسوب می‌شوند، اگر انتگرال مربع اختلاف آنها و اختلاف مشتقات آنها تا مرتبه s ، به اندازه کافی کوچک باشند. به عبارت دیگر در زیر فضای سوبولف برای دو تابع نزدیک به هم، نه تنها مقدار دو تابع بلکه مشتقات آنها نیز تا مرتبه s به هم نزدیک است. حتی دو تابع در زیر فضای سوبولف $W_2^s(a, b)$ زمانی

مطالعه موردی

تا به این جا روش‌های منقطع و تیخونوف تعمیم یافته برای پایداری مسئله بدوضع انتقال به سمت پائین تعیین ژئوئید بدون استفاده از فرمول استوکس ارائه گردید. حال می‌خواهیم در یک مسئله عددی شبیه‌سازی شده از میان روشهای پایداری یاد شده سازگارترین روش جهت پایداری مسئله انتقال به سمت پائین یاد شده را شناسائی نمائیم. برای ایجاد یک مسئله شبیه‌سازی شده از یک مدل ژئوپتانسیلی برای برآورد مشاهده نرم شتاب ثقل در نقاط داده BGI در منطقه جغرافیائی ایران استفاده نمودیم. شکل (۱) نشان دهنده توضیح نقاط ثقلی این فایل است. به این طریق با حفظ شرایط واقعی، تنها مشاهدات ثقلی انجام گرفته را با مشاهدات حاصل از یک مدل ژئوپتانسیلی تعویض، تا بدین گونه بتوان مشاهدات تفاضلی حاصل از انتقال به سمت پائین را از دو طریق: (۱) بکارگیری مستقیم مدل ژئوپتانسیلی و (۲) انتقال به سمت پائین پایدار شده به روش یاد شده به دست آورده و بدین شکل ملاکی برای تعیین خطای روش‌های مورد بررسی به دست آوریم. به عنوان مدل ژئوپتانسیلی، مدل GPMAR حاصل تلاش مرحوم ونتسل (ونتسل، ۱۹۹۸) انتخاب گردید. این مدل ژئوپتانسیل شامل ضرایب هارمونیک‌های کروی تا درجه و مرتبه ۷۲۰ است. از ضرائب تا درجه و مرتبه ۳۶۰ این مدل به عنوان مدل جاذبه فرانس استفاده و از حذف این میدان از میدان ۷۲۰ این مدل، مشاهدات جاذبه‌ای تفاضلی در نقاط مشاهده BGI تولید گردید. ارتفاع موجود در فایل BGI، به این شتاب‌های جاذبه شبیه سازی شده نسبت داده شد. سپس مسئله انتقال به سمت پائین این مشاهدات تفاضلی شبیه‌سازی شده، بر اساس حل معکوس انتگرال آبل-پواسن گسسته بیضوی انجام پذیرفت. در انتقال به سمت پائین شبکه $20' \times 20'$ بر روی بیضوی فرانس برای تعیین پتانسیل جاذبه تفاضلی در نظر گرفته شده، سپس از طریق مدل ژئوپتانسیلی و روشهای انتقال به سمت پائین یاد شده، پتانسیل جاذبه بر روی نقاط شبکه مذکور تعیین گردید.

جدول ۱: مشخصات آماری خطای اضافه شده به داده‌های شبیه سازی شده بر حسب (mgal).

ماکزیمم	متوسط	مینیمم	انحراف معیار
1.9115	-0.0003	-1.9201	0.0386

شکل (۲) نشان دهنده پتانسیل جاذبه تفاضلی حاصل از مدل است. همچنین به مشاهدات تفاضلی تولید شده یک خطای اتفاقی با توزیع نرمال با مشخصات جدول (۱) اضافه گردید.

مشاهدات شتاب جاذبه تفاضلی با استفاده از انتگرال آبل-پواسن و به کارگیری از روش‌ها پایداری منقطع (TSVD و TGSVD)، تیخونوف استاندارد و روش پایداری تیخونوف تعمیم یافته با استفاده از نیم-نرم‌ها و نرم‌های گسسته شده زیر فضاهای سوبولف $\{W_2^1, W_2^2\}$ به پتانسیل جاذبه تفاضلی بر روی بیضوی فرانس تبدیل گردیدند. در کلیه این روش‌ها، پارامتر پایداری، با معیار منحنی ال (L-Curve) برآورد گردید [۴]. برای مقایسه روش‌های مختلف از خطای نسبی بیان شده توسط رابطه ذیل استفاده شد:

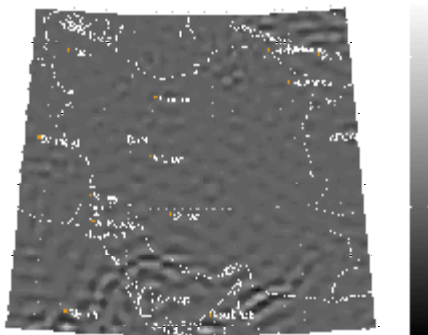
$$\text{Relative Error} = \frac{\|x^{\text{exact}} - x^{\text{Reg}}\|_2}{\|x^{\text{exact}}\|_2} \quad (53)$$

x^{exact} در رابطه فوق مقدار اختلاف بسط هارمونیک‌های بیضوی تا درجه و مرتبه ۳۶۰ از بسط هارمونیک‌های بیضوی تا درجه و مرتبه ۷۲۰ بر روی شبکه $20' \times 20'$ یاد شده می‌باشد، که در واقع محک برآورد کارائی روش‌های پایداری مورد مطالعه است. شکل (۳) و (۴) به ترتیب نشان دهنده نتیجه انتقال بسمت پائین با استفاده از روش نرم سوبولف (گسسته‌شده) در زیرفضاهای سوبولف W_2^1 و W_2^2 و شکل (۵) نیز نتیجه انتقال به سمت پائین به روش استاندارد تیخونوف است. نتیجه انتقال بسمت پائین با استفاده از روش منقطع TSVD در شکل (۶) نشان داده شده است و همچنین شکل (۷) و (۹) بترتیب نشان دهنده نتیجه انتقال بسمت پائین با استفاده از روش نیم نرم سوبولف و با اپراتورهای گسسته L^1 و L^2 می‌باشد. شکل (۸) و (۱۰) نیز بترتیب نشان دهنده نتیجه انتقال بسمت پائین با استفاده از روش منقطع TGSVD و با اپراتورهای گسسته L^1 و L^2 در شبیه‌سازی صورت پذیرفته است. در جدول (۲) خطای هر یک از روش‌های پایداری فوق‌الذکر نشان داده شده است. با توجه به جدول (۲) و نتایج شبیه‌سازی صورت پذیرفته، روش تیخونوف تعمیم یافته با نرم زیر فضای سوبولف دارای بهترین نتایج را به همراه داشته است.

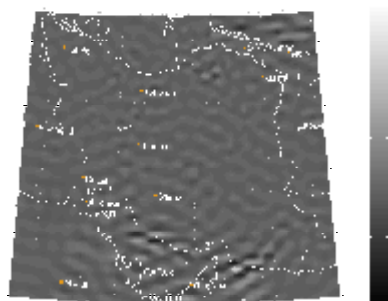
جدول ۲: مقایسه خطاهای روشهای پایدارسازی در مسئله انتقال به سمت پائین داده‌های شبیه سازی شده (خطای نسبی بدون واحد بوده و واحد کمیت‌های دیگر m^2 / s^2 می‌باشد).

روش	G-Tikh(W_2^2)	G-Tikh(W_2^1)	S-Tikh	TSVD	G-Tikh(L^2)	TGSVD(L^2)	G-Tikh(L^2)	TGSVD(L^2)
ماکزیمم	10.1302	10.2977	10.3802	10.5385	12.4487	17.2047	27.6701	79.7941
متوسط	0.0033	0.0046	0.0083	0.0072	0.0726	0.0075	0.0075	0.0075
مینیمم	-19.2861	-19.628	-19.972	20.2382	-18.2493	-19.7380	-33.3710	-61.1341
خطای نسبی	0.6479	0.6610	0.6815	0.7035	0.7118	0.8451	1.4960	5.1202

روش تیخونوف تعمیم یافته در زیرفضای سوبولف دارای دقت بهتری نسبت به جواب های روش تیخونوف استاندارد است. حال که به سازگارترین روش پایدارسازی به مسئله انتقال به سمت پائین با استفاده از انتگرال آبل-یواسن در مسئله تعیین ژئوئید بدون استفاده از انتگرال استوکس رسیدیم، می‌توان این نتیجه را در مورد داده‌های واقعی استفاده نمود. نتیجه انتقال با داده‌های واقعی به بخش بحث و نتیجه‌گیری مقاله واگذار می‌گردد.



شکل ۲: مقدار دقیق مجهولات و مشخصه‌های آماری آن.



شکل ۳: روش تیخونوف تعمیم یافته با نرم زیر فضای

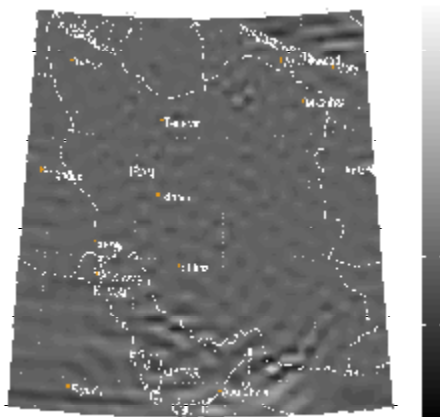
سوبولف W_2^2

(بازه تعبیرات و پارامترهای آماری نیز نزدیک به پارامترهای آماری مجهولات واقعی است).

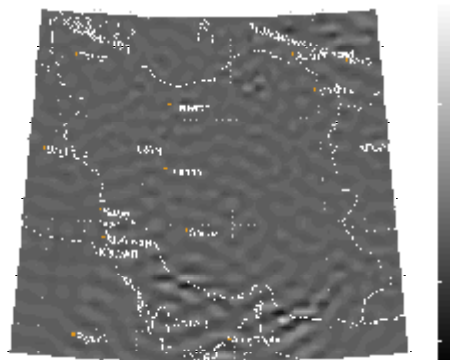
به‌گونه‌ای که نرم زیرفضای W_2^2 که دارای کنترل بیشتری بر روی رفتار توابع نسبت به نرم زیر فضای W_2^1 و نرم فضای هیلبرت (L_2) است، در روش تیخونوف تعمیم یافته جواب‌های قابل قبول تری را ارائه می‌دهد. همچنین بر اساس نتایج شبیه‌سازی در میان روش های منقطع، روش TSVD دارای جواب های بهتری نسبت به روش‌های تجزیه مقادیر منفرد تعمیم یافته منقطع با اپراتورهای گسسته مشتقات اول و دوم (L^1 و L^2) می‌باشد. همچنین با توجه به جدول (۲) ملاحظه می‌گردد، که روش منقطع تعمیم یافته با ماتریس پایدارسازی L^1 دارای جوابهای منطقی تری نسبت به روش منقطع تعمیم یافته با ماتریس پایدارسازی L^2 است. همچنین در روش تیخونوف تعمیم یافته با نیم-نرم‌های زیرفضاهای سوبولف W_2^1 و W_2^2 یعنی $\|L^1\|_2$ و $\|L^2\|_2$ ، روش تیخونوف تعمیم یافته در مسئله انتقال به سمت پائین با ماتریس پایدارسازی L^1 دارای سازگاری بیشتری نسبت به ماتریس پایدارسازی L^2 است. به طوری که پایدارسازی تیخونوف تعمیم یافته با ماتریس پایدارسازی مشتق دوم دارای خطای نسبی غیر معقول و مجهولات به دست آمده از این روش (شکل ۹) دارای بازه تغییرات بسیار متفاوت با مجهولات واقعی (شکل ۲) هستند.



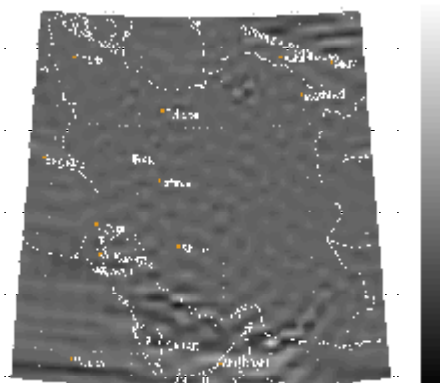
شکل ۱: نقشه توزیع نقاط ثقلی ایران برای ۸۸۶۸ نقطه گرفته شده از بانک داده های ثقلی BGI.



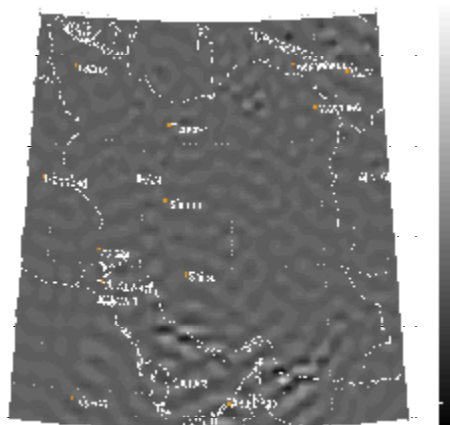
شکل ۷: روش تیخونوف تعمیم یافته با ماتریس پایدارسازی L^1 .



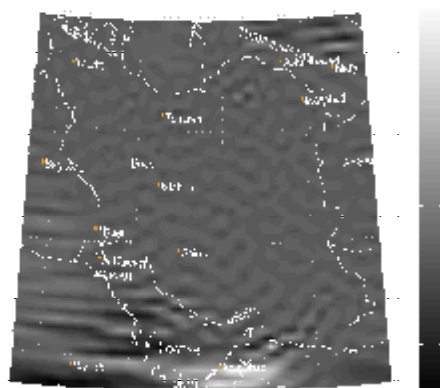
شکل ۴: روش تیخونوف تعمیم یافته با نرم زیر فضای سوبولف W_2^1 .



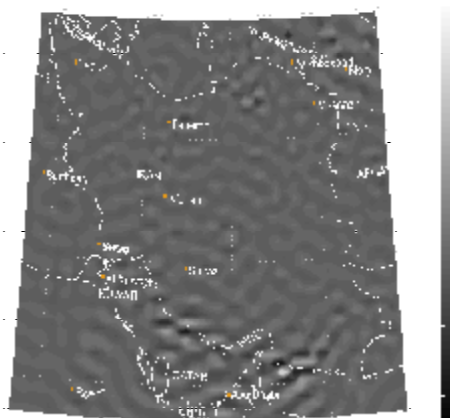
شکل ۸: روش تجزیه مقادیر منفرد تعمیم یافته منقطع با ماتریس پایدارسازی L^1 .



شکل ۵: مجهولات برآورد شده به روش استاندارد تیخونوف.



شکل ۹: روش تیخونوف تعمیم یافته با ماتریس پایدارسازی L^2 .



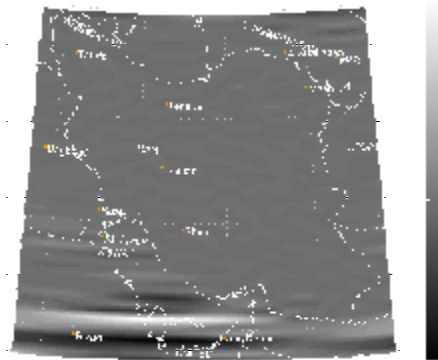
شکل ۶: مجهولات برآورد شده به روش تجزیه (TSVD).

بحث و نتیجه

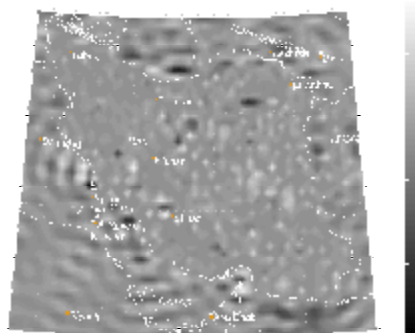
با توجه به تئوری انتظار می‌رود که استفاده از نرم سوبولف که دارای کنترل بیشتری بر روی توابع است، در روش تیخونوف تعمیم یافته جوابهای بهتری نسبت به نرم معمولی در فضای هیلبرت نتیجه دهد، که این موضوع با مثال شبیه‌سازی شده نیز به صورت عددی نشان داده شد. از این رو در ادامه تحقیق این روش بر روی داده‌های واقعی بانک داده ثقلی BGI در منطقه جغرافیایی ایران برای انتقال به سمت پائین استفاده گردید. در خاتمه شکل (۱۱)، نشان‌دهنده مجهولات برآورد شده (پتانسیل جاذبه تفاضلی بر روی شبکه‌ای $20' \times 20'$ بر سطح بیضوی رفرانس در منطقه جغرافیایی ایران) که با استفاده از روش تیخونوف تعمیم یافته در زیر فضای سوبولف محاسبه گردیده، ارائه می‌گردد.

تقدیر و تشکر

بدینوسیله نویسندگان مقاله مراتب تشکر و قدردانی خود را از معاونت پژوهشی دانشگاه تهران در حمایت مالی از این تحقیق تحت طرح پژوهشی شماره ۸۱۵۱۰۰۷/۱/۰۵ اعلام می‌دارند.



شکل ۱۰: روش تجزیه مقادیر منفرد تعمیم یافته‌ی منقطع با ماتریس پایدارسازی L^2 .



شکل ۱۱: پتانسیل تفاضلی واقعی برآورد شده در منطقه ایران با استفاده از روش تیخونوف تعمیم یافته در زیر فضای سوبولف.

مراجع

- 1 - Ardalan, A. A. (2000). *High-resolution regional geoid computation in the World Geodetic Datum 2000 based upon collocation of linearized observables of the type GPS, gravity potential and gravity intensity*. PhD Thesis, Department of Geodesy and GeoInformatics, Stuttgart University, Stuttgart. Available at <http://elib.uni-stuttgart.de/opus/volltexte/2000/665/pdf/PhDonline.pdf>
- 2 - Ardalan A. A. and Grafarend, E. W. (2004). "High-resolution regional geoid computation without applying Stokes's formula: a case study of the Iranian geoid." *Journal of Geodesy*, Vol. 78, PP. 138–156.
- 3 - Bjork, A. (1990). *Least square methods*, Elsevier Science Publisher.
- 3 - Hansen, P. C. (1994). *Regularization Tools Version 3.1 (for Matlab Version 6.0): A Matlab package for analysis and solution of discrete ill-posed problems*. Department of Mathematical Modeling, Technical University of Denmark, 3.1 edn. URL <http://www.imm.dtu.dk/~pch/Regutools/index.html>
- 4 - Hansen, P. C. (1998). *Rank-deficient and discrete ill-posed problems*. SIAM lecture notes, Philadelphia.
- 5 - Hansen, P. C. (2002). *Deconvolution and regularization with Toeplitz matrices*, 2002 Kluwer Academic Publishers.
- 6 - Hansen, R. J. (1971). "A numerical method for solving Fred Holm integral equations of the first kind using

- singular values.” *SIAM J. Numer. Anal.* Vol. 8, PP. 616-622.
- 7 - Kaipio, J. (2005). *Statistical and computational inverse problem*, Springer Publisher.
- 8 - Kincaid, D. and Cheney, W. (1991). *Numerical Analysis*, Brooks/Cole Publishing Company.
- 9 - Kirsch, A. (1996). *An introduction to the mathematical theory of inverse problems*. Chapter 2, Springer-Verlag. Vol. 120, New York.
- 10 - Klemela, J. (2003). “Optimal recovery and statistical estimation in L_p sobolev classes.” *Math. Methods Statist.* Vol. 12, PP. 429-453.
- 11 - Lebedev, L. P. (1996). *Functional analysis: applications in mechanics and inverse problem*, Dordrecht, Academic Press.
- 12 - Pich', R. (2004). *Regularization operator for multi-dimensional inverse problems with kronecker product structure*, ECCOMAS 2004.
- 13 - Rasmussen, J. M. (2001). *Compact Linear Operators and Krylov Subspace Methods*. Chapter 3. Thesis in the M.Sc degree.
- 14 - Safari, A. (2004). *Ellipsoidal boundary value problem for geoid computations via modulus of gravity, astronomical longitude, astronomical latitude, and satellite altimetry observations*. Ph.D. thesis. Department of Surveying and Geomatics Engineering University of Tehran (In Persian).
- 15 - Safari, A., Ardalan, A. A. and Grafarend, E. W. (2005). “A new ellipsoidal gravimetric, satellite altimetry and astronomic boundary value problem, a case study: The geoid of Iran.” *Journal of Geodynamics*, Vol. 39, PP. 545-568.
- 16 - Stakgold, I. (1979). *Green's functions and boundary value problems*. John Wiley & Sons, Inc.
- 17 - Varah, J. M. (1973). “On the numerical solution of ill-conditioned linear system with application to Ill-posed problems.” *SIAM Rev.* Vol. 21, (1979), PP. 100-111.
- 18 - Wenzel, H. G. (1998). *Ultra hochauflösende Kugelfunktionsmodelle GPM98A und GPM98B des Erdschwerefeldes*. In: *Progress in Geodetic Science*, W. Freedden (ed.) PP. 323-331, Shaker Verlag, Aachen.
- 19 - Zhdanov, M. S. (2002). *Geophysical inverse theory and regularization problem*, Elsevier Science Publisher.

واژه‌های انگلیسی به ترتیب استفاده در متن

- 1 - Truncated Singular Value Decomposition (TSVD) and Truncated Generalized Singular Value Decomposition (TGSVD)
- 2 - Generalized Tikhonov (G-Tikh)
- 3 - Sobolev subspace
- 4 - Ill-posed
- 5 - Well-posed
- 6 - Scattering
- 7 - Stefan
- 8 - Regularized Inverse Operator
- 9 - Regularization Strategy
- 10 - Ill Conditioning
- 11 - Bi-diagonalization
- 12 - Least Square by Inequality Constrain
- 13 - Underdetermined
- 14 - Bayesian
- 15 - Semi-Norm
- 16 - Derivative operator