

## ارزیابی اثربخشی مدل‌های برنامه‌ریزی آرمانی

علی اصغر انواری رستمی

استادیار مرکز مطالعات مدیریت و بهره‌وری ایران، دانشگاه تربیت مدرس

### چکیده

کاربرد تکنیک‌های برنامه‌ریزی آرمانی در عمل با مشکلات زیادی همراه است. این مقاله ضمن ارزیابی تکنیک‌های برنامه‌ریزی آرمانی در خصوص منعکس نمودن صحیح رجحانهای مورد نظر تصمیم گیرندگان، تکنیک‌های مختلف برنامه‌ریزی آرمانی را در چارچوبی یکپارچه و منسجم، دسته‌بندی می‌نماید و ویژگیها و محدودیتهای کاربردی هر تکنیک را مورد بررسی قرار می‌دهد همچنین چگونگی و چرایی امکان گمراه شدن تصمیم گیرندگان به دلیل تقریبهای نامناسب توابع مورد بحث و بررسی قرار گرفته و راهکارها و الگوریتم عملکردی مؤثری جهت رویارویی و کمینه سازی اینگونه خطاها ارائه می‌نماید. در نهایت، جهت درک بهتر الگوریتم پیشنهادی، مثالی عددی ذکر شده است.

کلید واژه‌ها: برنامه‌ریزی آرمانی، تابع ارزشی، اثربخشی.

### ۱. مقدمه

اشنايدر جان، حل هر مسألهٔ تصمیم چند معیاری را مستلزم تعیین مجموعه فرصتها (جوابهای ممکن) و توابع رجحان تصمیم گیرنده، می‌داند [۱]. جهت حل مسایلی با اهداف متعدد و خصوصاً متضاد (حل دستگاه «نا» معادلات همزمان) و انجام عملیاتی مقایسه‌ای بین اهداف متعدد متضاد، از تکنیک برنامه‌ریزی آرمانی بهره گرفته می‌شود. پروفیسور هنان برنامه‌ریزی آرمانی را تکنیکی ما بین برنامه‌ریزی ریاضی اهداف متعدد (بدون پرسیدن رجحانهای تصمیم گیرنده) و تئوری چند معیاری مطلوبیت (در جایی که مقادیر پارامترهای مختلف باید تعیین شوند) قرار می‌دهد [۲]. انتقادات متعددی در خصوص تکنیک برنامه‌ریزی آرمانی وجود دارد؛ یکی از مهمترین ایرادات وارد بر آن، اثر بخش نبودن این تکنیک در



ملحوظ نمودن صحیح رجحانها و خواسته های واقعی تصمیم گیرندگان، می‌باشد؛ چون وزنهای نسبی اهمیت اهداف مختلف در برنامه‌ریزی آرمانی، به منزله نوعی تابع مطلوبیت تلقی می‌شود. گروهی نظیر روزنتال معتقدند که: این وزنها در غالب موارد، محیط واقعی تصمیم‌گیری را بیان نمی‌نمایند [۳].

سؤالات مهم و اساسی در این مقاله عبارتند از:

۱. آیا تکنیک های برنامه‌ریزی آرمانی، قادر به انعکاس صحیح توابع مطلوبیت تصمیم گیرندگان می‌باشند؟

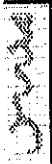
۲. در صورت منفی بودن جواب سؤال اول، مهمترین محدودیتها و مشکلات موجود در این زمینه، کدامند؟ و چگونه می‌توان این مشکلات و محدودیتها را رفع نموده و یا به حداقل رساند؟

این مقاله پاسخی به سؤالات فوق می‌باشد و الگوریتمی رو در رو و هدایت کننده را جهت اثربخش نمودن مدل‌های مختلف برنامه‌ریزی آرمانی ارائه می‌نماید؛ همچنین، مثالی عددی از این الگوریتم را تشریح و در نهایت نتایج حاصله و دیدگاههای نهایی را ارائه می‌نماید.

## ۲. مروری بر ادبیات تحقیق

جهت رفع مشکلات موجود در تعریف توابع رجحان مناسب برای تصمیم گیرها و تعیین نرخ تبادل یا جانشینی مناسب برای اهداف متضاد نسبت به هم، روشهای مختلفی ارائه شده است [۴، ۵، ۶، ۷، ۸]. آشنایدرجان، مدل‌های برنامه‌ریزی آرمانی را در دو نوع مدل «اولویتی یا لکزی‌گرافیکی» و مدل «وزنی غیر اولویتی» جای می‌دهد و سایر مدل‌های برنامه‌ریزی آرمانی را ترکیبی از این دو می‌داند؛ در مدل نوع اول، اهداف به ترتیب اولویتشان به صورت تردبانی، بهینه می‌شوند و در مدل نوع دوم، وزنها بیانگر اهمیت نسبی اهداف بوده و با تعیین این وزنها برای کلیه اهداف (که در یک سطح اولویتی هستند) به طور همزمان بهینه می‌شوند. هنان، اولین مرحله تحلیلگر را تعریف تابع ارزشی می‌داند که مقادیر آن، بیانگر دیدگاههای واقعی تصمیم گیرنده است [۱]. بحثهای بسیار ارزشمندی در خصوص تابع ارزش را می‌توان در مأخذ ۹ این مقاله یافت که هدف اصلی آن، تشریح نحوه تعیین توابع ارزش مناسب و در عین حال ساده برای تصمیم‌گیرهای پیچیده می‌باشد.

محاسبات برنامه‌ریزی آرمانی در جهت کمینه سازی شکاف میان سطح قابل دستیابی به اهداف و آرمانهای موضوعه جهت این اهداف می‌باشد. با تعریف  $g_i$  به عنوان سطح آرمانی



برای  $i$  امین هدف  $(i = 1, 2, \dots, m)$ ،  $a_{ij}$  به عنوان میزان مشارکت زامین متغیر در  $i$  امین هدف  $(j = 1, 2, \dots, n)$ ، می‌توان به ازای هر جواب عملی  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in (X)$  یک انحراف را با رابطه  $d_i = \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - g_i \right|$  محاسبه نمود (در جایی که  $(X)$  مجموعه جواب‌های ممکن است).

انحراف کمتر بر بیشتر (مشابهاً هدف رسی بیشتر بر کمتر) ارجح است؛ بنابراین تابع جزئی پیوسته و ارزشی  $V(d_i)$  برحسب گزینه  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in (X)$  و متغیر انحرافی  $(d_i)$  تابعی نزولی (مشابهاً برحسب میزان هدف رسی یا متغیر  $g_i$  صعودی) خواهد بود؛ به بیان ریاضی:

$$\frac{\partial v(d_i)}{\partial d_i} < 0, \quad \frac{\partial v(g_i)}{\partial g_i} > 0$$

$$V(g_i) \in [0, 1] \Rightarrow V(g_i) = \begin{cases} 1 & \text{if } g_i = \max \\ 0 & \text{if } g_i = 0 \end{cases} \quad V(d_i) \in [0, 1] \Rightarrow V(d_i) = \begin{cases} 1 & \text{if } d_i = 0 \\ 0 & \text{if } d_i = \max \end{cases}$$

بهره‌گیری از روش تابع ارزش در مدل‌های برنامه‌ریزی آرمانی، مستلزم تعیین تابعی مقداری جهت ارزش گذاری یک راه حل یا گزینه برحسب معیارها یا اهداف متعدد می‌باشد. تعریفی عمومی از تابع ارزش برای مدل‌های خطی برنامه‌ریزی آرمانی به شرح زیر است:

$$TV(d) = \sum_{i=1}^m V(d_i) = V(d_1^+, d_2^+, \dots, d_m^+, d_1^-, d_2^-, \dots, d_m^-)$$

$$TV(g) = \sum_{i=1}^m V(g_i) = V(g_1, g_2, \dots, g_m)$$

در جایی که  $TV(d)$  و  $TV(g)$  توابع کل ارزش و  $V(d_i)$  و  $V(g_i)$  توابع جزئی به ترتیب برحسب متغیرهای انحرافی و سطح هدف رسی می‌باشند، تعدادی از توابع مهم نزولی برحسب متغیرهای انحرافی و صعودی برحسب سطح هدف رسی به شرح زیر خواهند بود:

برای بعضی از توابع غیرخطی، نظیر توابع درجه دوم، الگوریتمها و نرم افزارهای کارایی وجود دارد؛ ولی برای توابعی با درجات بالاتر، ناگزیر به بهره‌گیری از مدل‌های غیرخطی برنامه‌ریزی آرمانی می‌باشیم یا آنکه باید این توابع را به طوری صحیح و دقیق با چند جزء خطی تقریب زد و سپس از مدل‌های خطی برنامه‌ریزی آرمانی استفاده نمود. مثالی از رفتارهای سرمایه‌گذار که تنها با توابع غیر خطی درجات بالا به خوبی بیان شده را می‌توان در مطالعه پرات یافت [۱۰].



در بعضی از موارد تصمیم گیرنده، قادر به بیان دقیقی از سطوح آرمانهای مدل نمی‌باشد؛ در چنین مواقعی، از روش فازی می‌توان بهره گرفت و سطوح آرمانهای غیر دقیق را در مدل خطی برنامه‌ریزی آرمانی گنجانده و مسأله را با بهره‌گیری از پاره‌خطهای متعدد حل نمود [۸، ۱۱].

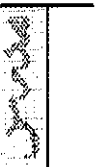
مشکل دیگر این است که وقتی تصمیم گیرنده با چند معیار تصمیم متفاوت مواجه است، ممکن است توان پیروی از قواعد منطقی را از دست بدهد؛ دلیل آن نیز این است که او ممکن است با جنبه‌هایی از مسأله مواجه شود که در حالت ساده بودن مسأله شاید به آنها توجه نمی‌کرده است و این موضوع، تعریف تابع مطلوبیت مناسب برای تصمیم گیرنده (تابع هدف) را دچار مشکل می‌سازد.

### ۳. الگوریتم پیشنهادی

همانگونه که در ابتدای مقدمه ذکر شد، جهت حل هر نوع مسأله تصمیم چند معیاری به تعیین مجموعه فرصتها (جوابهای ممکن) و توابع رجحان تصمیم گیرنده نیاز است؛ انتخاب بهترین جواب از میان مجموعه فرصتها منوط به تعریف رجحانهای تصمیم گیرنده است؛ روشهای مختلفی جهت تعریف توابع رجحان و به کارگیری آنها در مدلهای مختلف برنامه‌ریزی آرمانی طرح شده‌اند و هر یک از آنها، جز روش عمومی تابع ارزش، قابلیت کاربرد محدود و خاصی دارند. نکته مهم در کار تحلیلگر، انتخاب مدل مناسب برنامه‌ریزی آرمانی و تعریف دقیق محیط تصمیم، بالأخص تابع هدف مدل، می‌باشد. تعیین اینکه مدل مناسب، برای مسأله تصمیم؛ (۱) مدل اولویت‌ی یا لکزی‌گرافیکی است؟ (۲) مدل وزنی غیر اولویت‌ی است؟ (۳) مدل وزنی - و الویتی است؟ (۴) و یا مدل عمومی تابع ارزش است؟ حایز اهمیتی فراوان است. اعمال الگوریتم عملکرد پیشنهادی زیر، اثر بخشی مدل را افزایش و خطاهای احتمالی را کاهش خواهد داد.

۱. معیارهای مسأله تصمیم‌گیری کدامند  $\{C_1, C_2, \dots, C_m\}$ ؟

۲. زمانی که مقایسه دو به دو مقدور و مطلوب است، فهرستی از کلیه زوجهای ممکن از معیارهای تصمیم را تهیه و جهت مقایسه در اختیار تصمیم گیرنده قرار دهید.  $\{C_1 \Leftrightarrow C_2, C_1 \Leftrightarrow C_3, \dots, C_1 \Leftrightarrow C_m, \dots, C_{m-1} \Leftrightarrow C_m\}$ . نتایج مقایسات را به صورت  $\{C_i > C_j\}$  for  $i \neq j$  مرتب نموده و معیارها را برحسب تعداد دفعات قرار گرفتن آنها در سمت بزرگتر مقایسات زوجی از مهمترین تا کم اهمیت ترین رتبه‌بندی نمایید و به مرحله بعد بروید.



۳. از بین زوجهای رتبه‌بندی شده کدام معیارها بی‌بدل یا بی‌جایگزینند؟ به عبارتی دیگر، نرخ نهایی جانشینی برای کدام هدف (اهداف) بی‌نهایت است؟ آنها را به ترتیب اهمیتشان، استخراج نموده و به شکل  $\{P_1 \gg \dots \gg P_n\}$  مرتب نمایید؛ در جایی که نماد  $\{P_i \gg P_j\}$  به معنی بسیار با اهمیت‌تر بودن معیار یا هدف  $i$  به  $j$  می‌باشد. اگر  $L=m$  باشد خواهیم داشت  $\{P_1 \gg \dots \gg P_m\}$  که همانا مدل اولویت‌ی یا لکزیکو گرافیکی است. اگر  $L > m$  باشد به مرحله بعدی بروید.

۴. اگر کلیه  $[m-L]$  معیار اهمیتشان به طور کمی قابل مقایسه باشند و تصمیم‌گیرنده در پی تعیین نرخ تبادل یا جایگزینی ثابتی برای معیارهای مختلف تصمیم باشد، فهرستی زوجی از کلیه  $[m-L]$  معیار را جهت مقایسه اهمیت معیارها (از ساده‌ترین زوج تا مشکل‌ترین زوج) تهیه و در اختیار تصمیم‌گیرنده قرار دهید؛ از ساده‌ترین زوج، شروع نموده و از تصمیم‌گیرنده بپرسید که آیا معیار  $i$  حداقل  $t$  مرتبه از معیار  $j$  مهمتر است؟ اگر خیر، آیا معیار  $i$  حداقل  $t-s$  مرتبه ( $t > s$ ) از معیار  $j$  مهمتر است؟ و الی آخر.

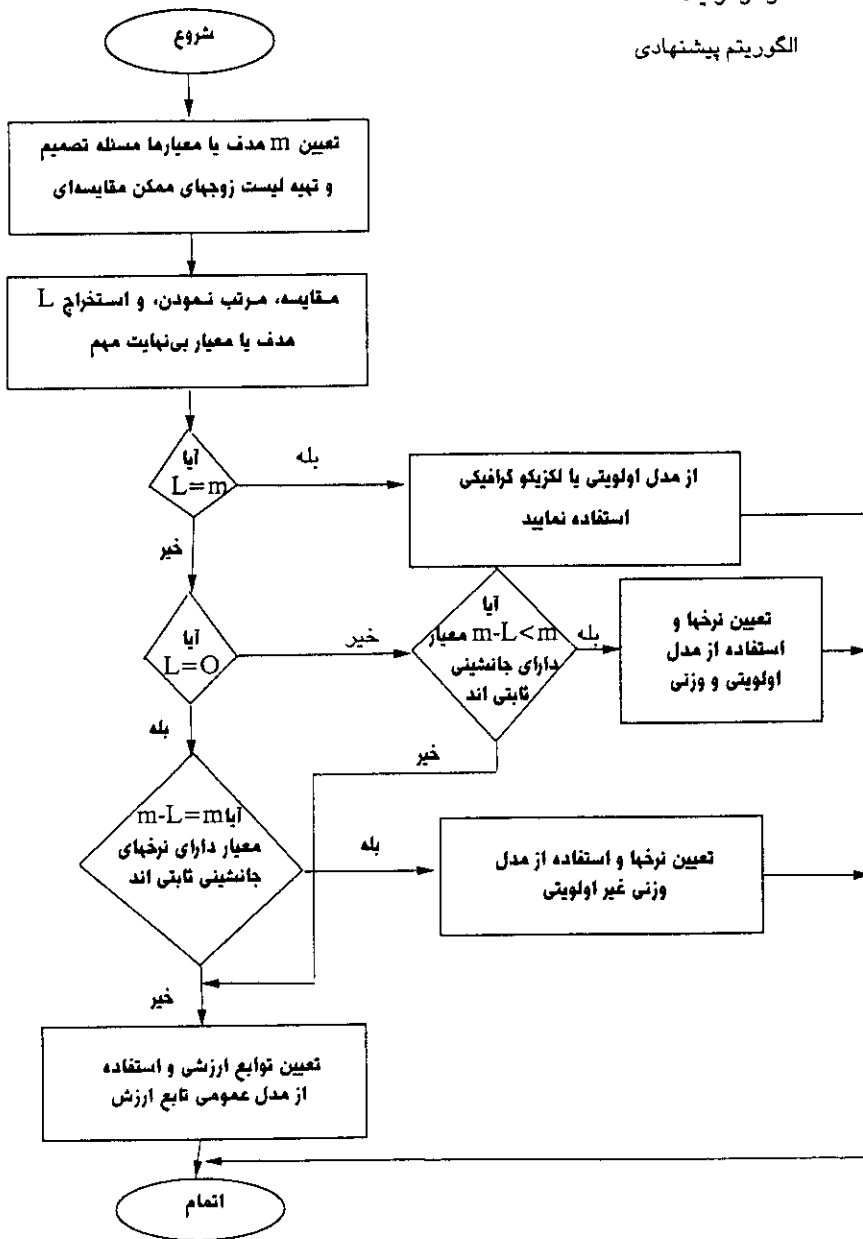
۵. با روش مقایسه زوجی فوق می‌توان به  $\{W_1 \gg \dots \gg W_n\}$  دست یافت؛ اگر  $L = m$  و  $f = m$  باشد، خواهیم داشت  $\{W_1 \gg \dots \gg W_m\}$ ؛ که همانا مدل وزنی و غیر اولویتی است. اگر  $L > m$  و  $L+f = m$  باشد، با مدل وزنی - اولویتی روبرو هستیم؛ اگر  $L > 0$  و  $L+f < m$  باشد، دال بر وجود معیارهایی است که نرخ جانشینی ثابتی ندارند. در این‌گونه موارد به مرحله بعدی بروید [۱۲].

۶. زمانی که تعیین وزنهای اهمیت نسبی برای تصمیم‌گیرنده مشکل بوده و تفسیر این وزن‌ها گمراه‌کننده است و یا زمانی که هزینه مقایسات دو به دو اقتصادی نیست، می‌توان از روش عمومی تابع ارزش بهره گرفت؛ در این روش برای هر معیار، تابع ارزشی خاص تعریف نموده و هدف مدل، حداکثر نمودن سطوح دستیابی به اهداف است. تفاوت این روش با روش فازی، نه در فرموله‌سازی ریاضی، بلکه اساساً در فلسفه‌ای است که داده‌های تصمیم‌گیرنده را تحت تاثیر قرار می‌دهد؛ بنابراین روش، برای هر هدف  $i$  و هر جفت از اقدامات  $(x,y) \in X^2$  می‌توان تابعی به شکل  $P_i(x,y)$  در نظر گرفت که میزان رجحان تصمیم‌گیرنده را در ارتباط با  $(x,y)$  اندازه‌گیری می‌نماید؛ به نحوی که خواهیم داشت:

$P_i(x,y) = \cdot$	for indifference, $f_i(x) \cong f_i(x)$
$P_i(x,y) \cong \cdot$	for weak preference, $f_i(x) > f_i(x)$
$P_i(x,y) \cong \wedge$	for strong preference, $f_i(x) \gg f_i(x)$
$P_i(x,y) = \wedge$	for strict preference, $f_i(x) \gg \gg f_i(x)$



نمودار فرآیند  
الگوریتم پیشنهادی



در جایی که:

$$f_i(y) = \sum_{j=1}^n a_{ij} Y_j, \quad f_i(x) = \sum_{j=1}^n a_{ij} X_j$$

با تعریف  $d_i = f_i(x) - f_i(y)$  به عنوان محاسبه تفاوت در عملکرد میان عمل، اقدام، یا گزینه X,Y در ارتباط با معیاره تابع عملکرد  $P_i(x,y)$  را می‌توان با تابع ارزش  $\bar{F}(d_i)$  بیان نمود؛ بیان نمود. بیانگر رجحانهای تصمیم گیرنده است؛ به طوری که به سادگی برای او قابل درک است. روش عمومی تابع ارزش در پی حداکثر نمودن  $MaxZ = \sum_{i=1}^m (F_i^+ d_i^+ + F_i^- d_i^-)$  می‌باشد. ارزش Z را می‌توان به درصد تحقق آرمانهای وضع شده توسط تصمیم‌گیرنده تعبیر نمود. مقدار Z بین 0 تا m است و m همانا تعداد معیارها یا اهداف مسأله است. هر چه Z به m نزدیکتر باشد، تصمیم‌گیرنده راضی‌تر خواهد بود. نمودار زیر فرایند فوق را تشریح می‌نماید:

#### ۴. مثال عددی

جهت تشریح روش پیشنهادی، مسأله تصمیم‌گیری تولید مندرج در مآخذ ۴ را برگزیده ایم. معیارهای تصمیم در این مسأله عبارتند از  $\{C_1, C_2, \dots, C_n\}$ ، مرحله بعد، تهیه لیست زوجهای ممکن از معیارها به شرح  $\{C_1 \Leftrightarrow C_2, C_1 \Leftrightarrow C_3, \dots, C_1 \Leftrightarrow C_n, C_2 \Leftrightarrow C_3, \dots, C_{n-1} \Leftrightarrow C_n\}$  و ارائه آن به تصمیم گیرنده است. یکی از نتایج احتمالی این مقایسات را به صورت زیر، در نظر بگیرید:

$$\{C_1 > C_2, C_1 > C_3, C_1 < C_4, C_1 < C_5, C_2 > C_3, C_2 < C_4, C_2 < C_5, C_3 < C_4, C_3 < C_5, C_4 > C_5\}$$

با مرتب کرد برحسب رابطه  $i \neq j$  برای  $\{C_i > C_j\}$  خواهیم داشت:

$$\{C_1 > C_2, C_1 > C_3, C_2 > C_4, C_2 > C_5, C_3 > C_4, C_3 > C_5, C_4 > C_5\}$$

$C_4$  چهاربار،  $C_5$  سه بار،  $C_2$  یک بار در سمت بزرگتر قرار گرفته اند؛ بنابراین معیارها را می‌توان برحسب اهمیتشان به شرح  $\{C_4, C_5, C_1, C_2, C_3\}$  رتبه‌بندی نمود و به گام بعدی رفت. چه معیارهایی به دلیل اهمیت بی حدشان بی‌جایگزین هستند؟ اگر به ترتیب، همه آنها بی‌جایگزین باشند، می‌توان نوشت:

$$L = 0 \text{ اگر } L = m \text{ که در جایی که } \{P_1 \gg \gg P_2 \gg \dots \gg P_m\} = \{C_4 \gg \gg C_5 \gg \gg C_1 \gg \gg C_2 \gg \gg C_3\}$$

به گام بعدی می‌رویم:

فرض کنید  $C_4$  دو مرتبه مهمتر از  $C_5$  و  $C_1$ ، نه مرتبه مهمتر از  $C_2$  و  $C_5$  نه مرتبه مهمتر از  $C_2$  و  $C_3$  دو مرتبه مهمتر از  $C_2$  می‌باشد. با بهره‌گیری از روش فرآیند تجزیه و تحلیل سلسله





مثالی عددی پیشنهاد و مورد بررسی قرار دادیم. در این الگوریتم، تصمیم گیرنده در مرحله‌های متوالی، حضوری فعال داشته و تحلیلگر در مسیر بررسی با طرح سؤالاتی متعدد اقدام به انتخاب مدل مناسب جهت تصمیم‌گیری می‌نماید. مسیر الگوریتم طوری طراحی شده که ابتدا از مدل‌های کلاسیک (۱. مدل اولویتی یا لکزیکوگرافیکی ۲. مدل وزنی و غیراولویتی، ۳. مدل وزنی و اولویتی) عبور نموده و در نهایت به روش عمومی تابع ارزش منتهی می‌گردد.

## ۶. منابع

- [1] Schniederjans M.J.; "Goal Programming Methodology and Application", Kluwer Academic Publishers, 1995.
- [2] Hannan E.L., "An Assessment of some Criticism of GP", *Computer and Operations Research*, Vol. 14, 1985, PP. 227-229.
- [3] Rosenthal E.R., "Goal Programming-A Critique", *New Zealand Operational Redearch*, Vol. 11, 1983; PP. 133-152.
- [4] Anvary Rostamy, A.A. and Tabatabaie, "Appraising the Effectiveness of GP in Incorporating the Decision Maker (DM)'s Preferences", *Journal of the Operations Research Society of Japan*, Vol. 41, 1998, No. 2, PP. 279-288.
- [5] Charnes A., and W.W. Cooper, "Goal Programming and Multiple Objective Optimization", *European Journal of operational Research*, Vol. 1, 1977. PP. 39-54.
- [6] Gass S.I., "The Setting of Weights in Linear Goal Programing", *Computer and Operations Research*, Vol. 14, 1987, PP. 227-229.
- [7] O'Leary D.E., and J.H. O'Leary, "The Use of Conjoint Analysis in the Determination of GP Weights for a Decision Support System", In *Decision Making with Multiple Objectives*. Y.Y. Haimes and V. Chankong Eds. Springer, New York, 1984, pp.287-299.
- [8] Sakway M., "Interactive Fuzzy Goal Programming for Multi objective Nonlinear Programming Problems and Its Application to Water Quality Management, Control and Cybernetics", Vol. 13, 1984, PP. 217-228.
- [9] Keeney R.L., and H. Raiffa, "Decision with Multiple objectives: Preferences and Value Tradeoffs", Cambridge University Press, 1993.
- [10] Pratt J.W., "Risk Aversion in the Small and in the Large", *Econometrica*, Vol. 32, 1964, PP. 1121-1132.
- [11] Hannan E.L. "Linear Programming with Multiple Fuzzy Goals, *Fuzzy and Systems*, Vol. 6. 1981, PP. 279-288.
- [12] Takeda E., and P.L. Yu, "Assessing Priority Weights from Subsets of pairwise Comparision in Multiple Criteria Optimization Problems", *European Journal of Operational Research*, Vol. 86, 1995; PP. 122-136.

