مجلهٔ تحقیقات اقتصادی / دورهٔ ۴۷، شمارهٔ ۳، سال ۹۱ / صفحات ۱۴۴ - ۱۲۹

مدل‌سازی و پیش‌بینی نرخ ارز بر اساس معادلات دیفرانسیل تصادفی

حسن خداویسی*

استادیار گروه اقتصاد دانشکده‌ی اقتصاد و مدیریت دانشگاه ارومیه

H.khodavaisi@mail.urmia.ac.ir

احمد ملابهرامی

کارشناس ارشد اقتصاد دانشگاه ارومیه

A.molabahrami@mail.urmia.ac.ir

تاریخ دریافت: ۸۹/۷/۳ تاریخ پذیرش: ۹۰/۱۲/۱

چکیده

پیش‌بینی روند آتی نرخ ارز به عنوان یکی از پر اهمیت‌ترین و تأثیرگذارترین متغیرهای اقتصاد کلان، همواره مورد توجه بسیاری از پژوهشگران بوده است. در این مقاله به منظور مدل‌سازی و پیش‌بینی روند سری زمانی نرخ ارز در بازار رسمی ارز ایران مدل‌های معادلات دیفرانسیل تصادفی حرکت برآونی ژئومتری و انتشار- پرش مرتن به کارگرفته شده است. به‌منظور بررسی عملکرد این مدل‌ها در پیش‌بینی خارج از نمونه‌ی نرخ ارز، مقایسه‌ای بین این مدل‌ها با مدل اقتصادسنجی سری زمانی ARIMA انجام گرفته است. نتایج پژوهش حاکی از آن است که مدل‌های پیشنهادی در این مقاله، دارای عملکرد بهتری نسبت به مدل ARIMA در پیش‌بینی داخل و خارج از نمونه‌ی نرخ ارز بر اساس معیار RMSE می‌باشند.

طبقه‌بندی JEL : C53 , F47

کلید واژه: پیش‌بینی نرخ ارز، معادلات دیفرانسیل تصادفی، مدل حرکت برآونی ژئومتری، مدل انتشار پرش

---

*- نویسنده‌ی مسئول.

۱- مقدمه

پیش‌بینی یکی از ابزارهای مدیریت مؤفق و عنصر کلیدی در مدیریت و برنامه‌ریزی‌های اقتصادی محسوب می‌شود. نرخ ارز به عنوان یک متغیر کلان اقتصادی بسیار پراهمیت و تأثیرگذار بر بخش‌های مختلف داخلی و خارجی اقتصادی یک کشور، هم‌چون وضعیت تراز پرداخت‌ها و قدرت رقابت بین‌المللی، نقش تعیین کننده‌ای در سیاست‌گذاری‌های اقتصادی ایفا می‌کند. تغییرات نرخ ارز بخش‌های مختلف اقتصاد یک کشور را تحت تأثیر قرار می‌دهد، بنابراین مدل‌سازی و پیش‌بینی روند آتی این متغیر برای ارائه‌ی سیاست‌ها و رهنمودهای اقتصادی امری ضروری به نظر می‌رسد. در ادبیات اقتصادسنجی سری‌های زمانی مدل‌هایی چون ARIMA، GARCH و VAR جهت مدل‌سازی و پیش‌بینی متغیرهای اقتصادی به کار گرفته می‌شود. این مدل‌ها با محدودیت‌هایی مواجه‌اند. سری زمانی تحت بررسی در این مدل‌ها باید مانا باشد. در صورت نامانایی تفاضلات مراتب مختلف اعمال می‌شود، این امر موجب از دست رفتن اطلاعات ارزشمند بلندمدت موجود در سری زمانی می‌شود. هم‌چنین این مدل‌ها قادر به برازش پرش‌های موجود در روند سری‌های زمانی نیستند. وجود ضعف‌های یاد شده سبب می‌شود که نتوان به نتایج حاصل از پیش‌بینی این مدل‌ها امیدوار بود.

یکی دیگر از روش‌های موجود در مدل‌سازی و پیش‌بینی سری‌های زمانی اقتصادی استفاده از معادلات دیفرانسیل تصادفی[۱] است. این مدل‌ها با کار بلک و شولز[۲] (۱۹۷۳) و مرتن[۳] (۱۹۷۳) در زمینه‌ی مدل‌سازی قیمت سهام در قالب یک معادله‌ی دیفرانسیل تصادفی حرکت براونی ژئومتری[۴] وارد ادبیات اقتصادی شده‌اند. معادله‌ی GBM جز اخلال در الگو را در قالب فرآیند تصادفی وینر[۵] برازش می‌کند. این مدل معادله‌ای پویا را جهت برازش رفتار سری زمانی تحت بررسی برآورد می‌کند. با این وجود ضعفی که این مدل دارد آن است که قادر به برازش رفتار پرشی موجود در روند سری زمانی نیست. مرتن (۱۹۷۶)، با افزودن بخش پواسن[۶] به مدل GBM، چالش مذکور را حل کرده است. مدل به‌دست آمده مدل انتشار- پرش مرتن[۷] نامیده می‌شود[۸]. جزئیات

1- Stochastic Differential Equations (SDE).
2- Black, F and Scholes, M.
3- Merton, R.C.
4- Geometric Brownian Motion (GBM).
5- Wiener Process.
6- Poisson process.
7- Merton- Jump- Diffusion model (MJD).
۸- برای آشنایی بیش‌تر با مدل های انتشار- پرش به (Hanson, F.B، 2006) مراجعه شود.

بیش‌تر در مورد این مدل را می‌توان در کارهای بال و توروس[1] (۱۹۸۵) در زمینه‌ی پرش‌های قیمتی سهام، جوریون[2] (۱۹۸۹) در زمینه‌ی قیمت سهام و نرخ ارز و هم‌چنین مطالعات زو[3] (۲۰۰۵) و هنسن و زو[4] (۲۰۰۵) مشاهده کرد.

آن‌چه در این مقاله دنبال می‌شود ارائه‌ی دو مدل بر اساس معادلات دیفرانسیل تصادفی GBM و MJD جهت برازش و پیش‌بینی روند آتی سری زمانی نرخ ارز بازار رسمی ایران و مقایسه بین این مدل‌ها و مدل اقتصادسنجی ARIMA می‌باشد. نتایج پژوهش نشان از برتری مدل MJD بر مدل‌های GBM و ARIMA در پیش‌بینی خارج از نمونه‌ی نرخ ارز بر اساس گشتاور RMSE[5] دارد.

روند مقاله‌ی حاضر به این ترتیب است که ابتدا در بخش دوم مبانی نظری و ادبیات موضوع آمده است. بخش سوم به مطالعات داخلی و خارجی انجام گرفته در زمینه‌ی پیش‌بینی نرخ ارز اختصاص یافته است. در بخش چهارم داده‌های مورد استفاده‌ی تحقیق تبیین شده‌اند و در بخش پنجم فرضیه‌ی تحقیق ذکر شده است. در بخش ششم نتایج تحقیق آمده است. در نهایت بخش هفتم به خلاصه و نتیجه‌گیری بحث اختصاص دارد.

۲- مبانی نظری و ادبیات تحقیق

بلک- شولز (۱۹۷۳) و مرتن (۱۹۷۳)، با ارائه‌ی تئوری قیمت‌گذاری اختیار معامله[6] بزرگی را در زمینه‌ی مدل‌های بازار سهام و ادبیات اقتصاد مالی برداشتند. بر اساس مدل بلک- شولز- مرتن پارامترهای μ و σ به ترتیب به عنوان مقدار مورد انتظار بازدهی قیمت سهام و انحراف معیار بازدهی قیمت سهام و در قالب روابط زیر معرفی می‌شوند:

$$\mu = \lim_{h \to 0} E_t \{ \frac{1}{h} (\frac{x(t+h) - x(t)}{x(t)}) \} \qquad (1)$$

$$\sigma^2 = \lim_{h \to 0} E_t \{ \frac{1}{h} (\frac{x(t+h) - x(t)}{x(t)} - \mu h)^2 \} \qquad (2)$$

آن‌گاه قیمت سهام در معادله‌ی دیفرانسیل تصادفی حرکت براونی ژئومتری به صورت زیر صدق می‌کند:

$$dx(t) = \mu x(t) dt + \sigma x(t) dw(t) \qquad (3)$$

1- Ball and Torous.
2- Jorion.
3- Zhu, Z.
4- Hanson, F.B and Zhu, Z.
5- Root Mean Square Error.
6- Theory of option pricing.

در روابط (۱) و (۲)، E_t مقدار امید ریاضی دوره‌ی tام است. به منظور اثبات ادعای بالا چنین عمل می‌شود :

براساس تعاریف بالا ثابت می‌شود که μ و σ در معادله‌ی تفاضلی تصادفی زیر صدق می‌کنند (مرتن،۱۹۷۳، مایلرز و براک[۱]، ۱۹۹۱):

$$x(t+h)-x(t)=\mu x(t)h+\sigma y(t)h^{\frac{1}{2}}x(t) \qquad (۴)$$

که در آن $y(t)$ متغیر تصادفی است که دارای توزیع نرمال استاندارد است. معادله‌ی (۴) صورت گسسته- زمان معادله‌ی معرفی شده در رابطه‌ی (۳) می‌باشد.

درحقیقت زمانی‌که $h\to 0$ آن‌گاه $y(t)h^{\frac{1}{2}}=\Delta w(t)\cong dw(t)$ و $h=dt$ و بنابراین $x(t+h)-x(t)=dx(t)$ می‌شود.

به منظور شبیه‌سازی یک سری زمانی تحت معادلات دیفرانسیل تصادفی آن‌چه اساسی به نظر می‌رسد، حل تحلیلی و تخمین پارامترهای آن معادله است. در آنالیز تصادفی از لم ایتو[۲] به منظور حل تحلیلی یک معادله‌ی دیفرانسیل تصادفی استفاده می‌شود (آلن[۳]،۲۰۰۷). لم ایتو به صورت زیر بیان می‌شود.

لم ایتو: اگر $x(t)$ فرآیند تصادفی باشد که در معادله‌ی دیفرانسیل تصادفی زیر صدق کند:

$$dx(t)=f(t,x(t))dt+g(t,x(t))dw(t) \qquad (۵)$$

و هم‌چنین در صورتی‌که $F(t,x(t))$ تابع دو متغیره‌ای باشد که دارای مشتقات جزئی مرتبه‌ی اول و دوم پیوسته نسبت به متغیرهای t و x باشد، آن‌گاه $F(t,x(t))$ در معادله‌ی دیفرانسیل تصادفی زیر صدق می‌کند:

$$dF(t,x(t))=\hat{f}(t,x(t))dt+\hat{g}(t,x(t))dw(t) \qquad (۶)$$

که در آن:

$$\hat{f}(t,x(t))=\frac{\partial F(t,x(t))}{\partial t}+f(t,x(t))\frac{\partial F(t,x(t))}{\partial x(t)} +\frac{1}{2}g^{2}(t,x(t))\frac{\partial^{2}F(t,x(t))}{\partial x(t)^{2}} \qquad (۷)$$

$$\hat{g}(t,x(t))=g(t,x(t))\frac{\partial F(t,x(t))}{\partial x(t)}$$

1- Malliaris, A.G and Brock, W.A .
2- Ito Lemma.
3- Allen, E.

با قرار دادن $F(t,x(t)) = \ln(x(t))$ و استفاده از لم ایتو و بر اساس رابطه‌های (۶) و (۷)، معادله‌ی GBM به صورت زیر حل می‌شود.

$$d\ln(x(t)) = (\mu - \frac{۱}{۲}\sigma^{۲})dt + \sigma dw(t) \qquad (۸)$$

با انتگرال‌گیری از طرفین روی بازه $[0,t]$ می‌توان نوشت:

$$\int_{۰}^{t} d\ln(x(t)) = \int_{۰}^{t}(\mu - \frac{۱}{۲}\sigma^{۲})dt + \int_{۰}^{t}\sigma dw(t) \qquad (۹)$$

$$x(t) = x(۰)\exp((\mu - \frac{۱}{۲}\sigma^{۲})t + \sigma w(t)) \qquad (۱۰)$$

معادله‌ی (۱۰) رفتار پویای قیمت سهام را در طول زمان نشان می‌دهد. مدل GBM از دو بخش تشکیل شده است. بخش اول روند زمانی و بخش دوم نوسانات موجود در سری زمانی را برازش می‌کند.

حال به منظور مدل‌سازی سری زمانی نرخ ارز در قالب معادله‌ی GBM بر اساس استدلال مرتن و با به کارگیری این ایده و تعریف پارامترهای μ و σ به‌ترتیب به عنوان مقدار مورد انتظار بازدهی نرخ ارز و انحراف معیار بازدهی مورد انتظار نرخ ارز، می‌توان ادعا کرد که نرخ ارز در معادله‌ی GBM صدق می‌کند. بر این اساس، اگر $e(t)$ نشان‌دهنده‌ی مقدار متغیر نرخ ارز در لحظه‌ی t باشد، جواب تحلیلی معادله‌ی GBM برای نرخ ارز به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$e(t) = e(۰)\exp((\mu - \frac{۱}{۲}\sigma^{۲})t + \sigma w(t)) \qquad (۱۱)$$

به منظور شبیه‌سازی معادله‌ی (۱۱) برای داده‌های مورد بررسی تحقیق باید پارامترهای μ و σ تخمین زده شوند. با به‌کارگیری روش ناپارامتریک[۱] (آلن، ۲۰۰۷) می‌توان این پارامترها را تخمین زد. بر اساس معادله‌ی (۱۱)، روند تصادفی در الگوی GBM در قالب فرآیند وینر حفظ شده است. این مسئله اگرچه برتری این مدل را بر مدل ARIMA نمایان می‌کند، با این حال سبب می‌شود که نتایج شبیه‌سازی پایدار نباشد. به‌منظور حل چالش مذکور فرآیند شبیه‌سازی برای یک تکرار ۵۰۰۰ تایی انجام می‌پذیرد. سپس در بین این تعداد تکرار، آن تکراری به عنوان نتیجه‌ی شبیه‌سازی معرفی می‌شود که دارای کم‌ترین مقدار RMSE در برازش داخل نمونه‌ی سری زمانی باشد (پلاسنیک[۲]، ۲۰۱۰). روشن است که می‌توان به نتایج حاصل از پیش‌بینی که

1 Nonparametric method.
2 Pluciennik, P.

به این‌ترتیب به‌دست می‌آید و هم‌چنین دارای کم‌ترین خطا در برازش داخل نمونه‌ی نرخ ارز است، اعتماد کرد.

مدل GBM برای سری‌های زمانی با وجود پرش در روند زمانی آن‌ها مناسب نمی‌باشد. در حقیقت این مدل قادر به برازش پرش در روند سری زمانی نیست. مرتن (۱۹۷۶) با افزودن بخش پواسن به معادله‌ی GBM مدل انتشار- پرش را به صورت زیر معرفی کرد:

$$dx(t) = \mu x(t)dt + \sigma x(t)dw(t) + kx(t)dN(t) \qquad (۱۲)$$

که در آن $N(t)$ فرآیند تصادفی پواسن و در حقیقت بیانگر تعداد پرش‌های موجود در سری زمانی می‌باشد. لازم به ذکر است که در معادله‌ی (۱۲)، μ بازدهی مورد انتظار نرخ ارز، σ انحراف معیار بازدهی انتظاری نرخ ارز و k اندازه‌ی پرش موجود در روند سری زمانی را نشان می‌دهد. تابع چگالی احتمال فرآیند $N(t)$ به شکل زیر تعریف می‌شود.

$$P(N(t) = n) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!} \qquad (۱۳)$$

به منظور حل مدل MJD می‌توان از لم ایتو با قرار دادن $F(t, x(t)) = \ln(x(t))$ استفاده کرد. در این‌صورت:

$$d\ln(x(t)) = (\mu - \frac{\sigma^۲}{۲})dt + \sigma dw(t) + \ln(۱ + k_n)dN(t) \qquad (۱۴)$$

با انتگرال گیری از طرفین معادله‌ی بالا در بازه‌ی $[0,t]$ جواب تحلیلی معادله‌ی یاد شده به شکل زیر به‌دست می‌آید. در نتیجه می‌توان نوشت :

$$x(t) = x(۰)\exp\{(\mu - \frac{\sigma^۲}{۲})t + \sigma w(t) + \sum_{n=۱}^{N(t)}\ln(۱ + k_n)\} \qquad (۱۵)$$

معادله‌ی (۱۵) جواب تحلیلی مدل MJD می‌باشد. در این معادله k_n بیانگر اندازه‌ی n امین پرش موجود در سری زمانی است. حال با به کارگیری ایده‌ی مرتن برای متغیر نرخ ارز در صورتی‌که $e(t)$ نشان دهنده‌ی نرخ ارز در زمان باشد و پارامترهای μ، σ و k_n به‌ترتیب میانگین بازدهی نرخ ارز، انحراف معیار بازدهی مورد انتظار نرخ ارز و اندازه‌ی n امین پرش موجود در روند سری زمانی باشد، در این صورت می‌توان ادعا کرد که نرخ ارز در مدل MJD صدق می‌کند. بر اساس معادله‌ی (۱۵) جواب تحلیلی مدل MJD برای متغیر نرخ ارز به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$e(t) = e(۰)\exp\{(\mu - \frac{\sigma^۲}{۲})t + \sigma w(t) + \sum_{n=۱}^{N(t)}\ln(۱ + k_n)\} \qquad (۱۶)$$

هم‌چنان‌که دیده می‌شود معادله‌ی (۱۶) از سه بخش تشکیل شده است. قسمت اول روند زمانی، بخش دوم نوسانات و در نهایت قسمت سوم پرش‌های موجود در سری زمانی را برازش می‌کند. همانند معادله‌ی GBM در این مدل نیز به دلیل وجود فرآیند وینر در الگو، نتیجه‌ی شبیه‌سازی معادله‌ی پایدار نخواهد بود. به منظور برطرف کردن این مسئله نیز مشابه با روش شبیه‌سازی مدل GBM عمل خواهد شد.

۳- مطالعات تجربی

۳-۱- مطالعات داخلی

حسن درگاهی و رضا انصاری (۱۳۸۶)، مدل شبکه‌های عصبی را برای پیش‌بینی نرخ ارز بر اساس شاخص تلاطم واریانس بهبود بخشیده‌اند. بدین منظور آن‌ها دو شاخص واریانس و گارچ را به عنوان شاخص‌های تلاطم نرخ ارز به تفکیک در نظر گرفته و به دو طریق در مدل مورد استفاده قرار داده‌اند. بار اول وقفه‌ی آن را به وقفه‌های نرخ ارز اضافه کرده و بار دیگر شاخص تلاطم را سطح بندی کرده و با دسته بندی مشاهدات براساس سطح تلاطم، مدل پیش بینی ویژه‌ای را برای هر دسته از مشاهدات به‌کار برده‌اند. نتایج نشان می‌دهد که مدل‌های سطوح بالای تلاطم، در مقایسه با مدل مبنا، قدرت پیش بینی نرخ ارز آتی را بهبود می‌دهند.

سید کمیل طیبی و ناصر موحدنیا (۱۳۸۷)، در مطالعه‌ای براساس شبکه‌های عصبی و مقایسه‌ی این روش با روش‌های اقتصادسنجی ساختاری به پیش‌بینی نرخ ارز پرداخته‌اند. آن‌ها این فرضیه را که مدل شبکه‌ی عصبی نسبت به دیگر مدل‌ها عملکرد بهتری داشته است را مورد بررسی قرار داده‌اند که نتایج حاکی از درستی این فرضیه بوده است.

حسین مرزبان و رضا اکبریان (۱۳۸۴)، به مقایسه‌ی بین مدل‌های اقتصادسنجی ساختاری و سری زمانی و شبکه‌ی عصبی در پیش‌بینی نرخ ارز پرداخته‌اند. هدف اصلی آن‌ها آزمون این فرضیه بوده است که آیا روش شبکه‌های عصبی (غیرخطی) دارای نتایج بهتر و قابل مقایسه در پیش‌بینی نرخ ارز نسبت به الگوهای سنتی به خصوص الگوی گام تصادفی است یا خیر؟ جواب پژوهش‌گران به سئوال مذکور مثبت است.

بافنده و همکاران (۱۳۸۸) در پژوهشی به پیش‌بینی نرخ ارز برای دوره‌ی زمانی ۱۳۸۷-۱۳۸۱ بر اساس مدل‌های ARIMA، شبکه‌ی عصبی فازی ANFIS و شبکه‌ی عصبی خود رگرسیونی NNARX پرداخته‌اند. نتایج حاصل از مقایسه‌ی سه مدل مذکور براساس معیارهای مختلف پیش‌بینی نشان می‌دهد که در پیش‌بینی نرخ ارز، مدل شبکه‌ی عصبی فازی ANFIS بر مدل‌های رقیب برتری دارد.

لازم به ذکر است که براساس اطلاعات نویسندگان، در مطالعات داخلی به منظور مدل‌سازی و پیش‌بینی نرخ ارز بر اساس معادلات دیفرانسیل تصادفی تا به حال مطالعه‌ای انجام نگرفته است[1].

۳-۲- مطالعات خارجی

کراین و دیگران[2] (۲۰۰۰)، به منظور مدل‌سازی نرخ ارز برای داده‌های روزانه پوند انگلیس در فاصله‌ی زمانی ۱۹۹۰ تا ۱۹۹۸ از مدل معادلات دیفرانسیل تصادفی انتشار - پرش استفاده کرده‌اند. آن‌ها برای تخمین پارامترهای مدل انتشار- پرش روش تخمین حداکثر راستنمایی را به کار گرفته‌اند. نتایج شبیه‌سازی مدل تخمین زده شده نشان می‌دهد که در پروسه‌ی خلق داده، مدل پیشنهادی آن‌ها نوسانات و پرش‌های موجود در سری زمانی داده‌های واقعی نرخ ارز را به خوبی برازش می‌کند.

باسل و دیگران[3] (۲۰۰۴)، شاخص قیمت مصرف کننده را با استفاده از فرآیند حرکت برآونی ژئومتری مدل‌سازی کرده و با استفاده از مدل مذکور به پیش‌بینی تورم پرداخته‌اند. آن‌ها هم‌چنین پس از مقایسه‌ی مدل معادلات دیفرانسیل تصادفی با مدل‌های گام تصادفی و GARCH-M به این نتیجه رسیده‌اند که معادلات دیفرانسیل تصادفی در پیش‌بینی تورم، عملکرد بهتری از خود نشان می‌دهد.

عسگری و کریچین[4] (۲۰۰۸) پویایی قیمت نفت را تحت یک مدل معادلات دیفرانسیل تصادفی انتشار - پرش مدل‌سازی کرده‌اند. آن‌ها برای تخمین پارامترهای مدل مذکور روش حداکثر راستنمایی را به کارگرفته و به این نتیجه رسیده‌اند که در طول دوره‌ی مورد نظر، بازار نفت خارج از تعادل و هم‌چنین نسبت به شوک‌های طرف عرضه و تقاضا حساس بوده است.

۱- خالوزاده و خاکی صدیق (۱۳۸۳) شاخص قیمت سهام بازار بورس تهران را براساس معادلات دیفرانسیل تصادفی مدل‌سازی و پیش‌بینی کرده‌اند. آن‌ها به مقایسه‌ی این مدل با مدل سری زمانی ARIMA پرداخته‌اند. نتایج بیانگر آن است که مدل معادلات دیفرانسیل تصادفی عملکرد بهتری را در پیش‌بینی شاخص قیمت سهام از خود نشان می‌دهد. لازم به ذکر است آن‌ها روش خاصی را برای تخمین پارامترهای معادله‌ی دیفرانسیل تصادفی مورد استفاده ارائه نکرده‌اند. هم‌چنین مدل پیشنهادی آن‌ها قادر به برازش پرش‌های قیمتی سهام نیست.

2- Craine, R and Lochstoer, Lars.A and Syrtveit, K.

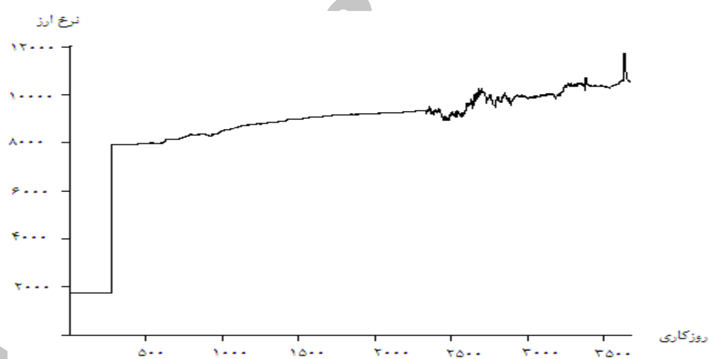
3- Basel M. AL.Eidehc, Ahmad S. A. AL.refal and Wafaa M. Sbeiti.

4- Askari.H and Krichene.N .

پلاسنیک[1] (۲۰۱۰)، مدل‌های مختلف معادلات دیفرانسیل تصادفی را برای پیش‌بینی سری‌های زمانی مالی چند بازار مختلف اروپایی به کارگرفته است. سپس مقایسه‌ای بین مدل‌های معادلات دیفرانسیل تصادفی و مدل‌های سری زمانی ARIMA و GARCH انجام داده است. نتایج وی نشان می‌دهد که خطای پیش‌بینی مدل معادلات دیفرانسیل تصادفی از مدل‌های سری زمانی کم‌تر است.

۴- تبیین داده‌ها و قلمرو تحقیق

داده‌های مورد استفاده‌ی تحقیق حاضر داده‌های روزانه‌ی نرخ ارز بازار رسمی (ریال در مقابل دلار) در بازه‌ی زمانی ۲۳ فروردین ۱۳۸۰ تا اول مرداد ۱۳۹۰ می‌باشد. داده‌ها از وب سایت بانک مرکزی گرفته شده‌اند. لازم به ذکر است که علت انتخاب نمونه‌ی مذکور وجود پرش به دلیل تغییر نظام ارزی کشور در روند این سری زمانی است و از سویی بنابر هدف اصلی تحقیق که برآورد و تخمین مدلی برای برازش پرش در سری‌های زمانی است، انتخاب نمونه‌ی مورد نظر موجه به نظر می‌رسد. نمودار ۱، روند زمانی داده‌های نرخ ارز را نشان می‌دهد.



نمودار ۱- روند سری زمانی داده‌های نرخ ارز بازار رسمی (ریال در برابر دلار)

۵- فرضیات تحقیق

فرضیه‌ی تحقیق حاضر به صورت زیر تبیین می‌شود:

مدل‌های معادلات دیفرانسیل تصادفی GBM و MJD عملکرد بهتری نسبت به مدل ARIMA در پیش‌بینی نرخ ارز دارند.

1- Pluciennik, P.

۶- تخمین مدل‌ها و تشریح نتایج

در این بخش نتایج تخمین مدل‌ها و پیش‌بینی خارج از نمونه‌ی نرخ ارز گزارش شده است. برای تخمین مدل MJD از کل داده‌ها (نمونه‌ی اول) و برای برازش مدل GBM از داده‌های نمونه‌ی مورد نظر در فاصله‌ی ۵ فروردین سال ۱۳۸۱ تا اول مرداد ۱۳۹۰ (نمونه‌ی دوم) استفاده می‌شود. علت این انتخاب این است که مدل GBM قادر به برازش پرش‌های موجود در سری زمانی نیست، بنابراین نمونه‌ی دوم قسمتی از کل داده‌ها می‌باشد که شامل پرش ناگهانی ناشی از تغییر نظام ارزی کشور نیست. ابتدا قبل از مدل‌سازی و تخمین مدل‌ها، نمونه‌های تحت بررسی به دو بخش آموزش و آزمایش تقسیم می‌شوند. بخش آموزش برای برآورد مدل‌ها و بخش آزمایش جهت برآورد خطای پیش‌بینی خارج از نمونه‌ی مدل‌ها و مقایسه‌ی عملکرد آن‌ها مورد استفاده قرار می‌گیرد. برای نمونه‌ی اول از ۲۳ فروردین ۱۳۸۰ تا آخر خرداد سال ۱۳۹۰ بخش آموزش و از اول تیر تا اول مرداد سال ۱۳۹۰ بخش آزمایش نمونه‌ی اول در نظر گرفته می‌شود. برای نمونه‌ی دوم از ۲۳ فروردین ۱۳۸۰ تا آخر خرداد ۱۳۹۰ بخش آموزش و از اول تیر تا اول مرداد ۱۳۹۰ بخش آزمایش نمونه‌ی دوم در نظر گرفته شده است. بخش آزمایش دو نمونه‌ی یکسان در نظر گرفته شده است تا بتوان همه‌ی مدل‌های تخمین زده شده را در پیش‌بینی خارج از نمونه با همدیگر مقایسه کرد.

به‌منظور برآورد مدل ARIMA از متدولوژی باکس- جنکینز[1] استفاده می‌شود. بر این اساس ابتدا از طریق آزمون‌های ریشه‌ی واحد فیلیپس- پرون[2] و دیکی فولر تعمیم یافته[3] مرتبه‌ی انباشتگی سری زمانی نرخ ارز برای هر دو نمونه‌ی اول و دوم مشخص می‌شود. نتایج دو آزمون نامبرده نشان می‌دهد که نمونه‌ی اول مانا و بنابراین I(0) و نمونه‌ی دوم انباشته از درجه‌ی یک یعنی I(1) می‌باشد. سپس از طریق توابع خودهمبستگی[4] و خودهمبستگی جزئی[5] و همچنین معیار آکائیک[6]، وقفه‌های بهینه AR و MA برای دو نمونه‌ی در نظر گرفته شده تعیین می‌شود. بدین‌ترتیب مدل بهینه ARIMA بر اساس متدولوژی باکس- جنکینز برای نمونه‌ی اول AR(1) و برای نمونه‌ی دوم ARIMA(12,1,1) می‌باشد.

به منظور برآورد مدل MJD برای نمونه‌ی اول که شامل کل داده‌های تحت بررسی است، ابتدا پارامترهای این معادله از روش ناپارامتریک محاسبه می‌شود. در جدول ۱ نتایج تخمین پارامترهای مدل‌های GBM و MJD گزارش شده است.

1- Box-Jenkins methodology.
2- Phillips-Peron unit root test.
3- Augmented Dickey-Fuller unit root test.
4- Auto Correlation Functions (ACF).
5- Partial Autocorrelation Functions (PAF).
6- Akaike Information Criterion (AIC).

جدول ۱- تخمین پارامترهای مدل‌های GBM و MJD به روش ناپارامتریک

مدل	μ	σ	k	N(t)
GBM	۰.۳٤۲۰٤	۰.۱۰۸۹	–	–
MJD	۰.۲۸٤٤	۰.۱٤۹٤	۳.٥۱٥۱	۱

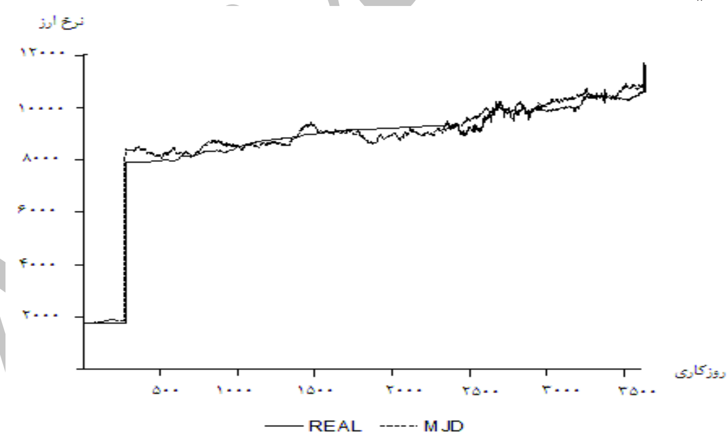
منبع : محاسبات پژوهش‌گران

بنابر نتایج جدول ۱ و معادله‌های (۱۱) و (۱۶)، مدل‌های GBM و MJD تخمین زده شده برای داده‌های نرخ ارز مورد استفاده در این مقاله به صورت زیر می‌باشند:

$$e(t) = ۷۹۲۴\exp((۰.۳۳۶۱)t + ۰.۱۰۸۹w(t)) \qquad (۱۷)$$

$$e(t) = ۱۷۵۵\exp\{(۰.۲۷۳۲)t + ۰.۱۴۹۴w(t) + \ln(۱+۳.۵۱۵۱)\} \qquad (۱۸)$$

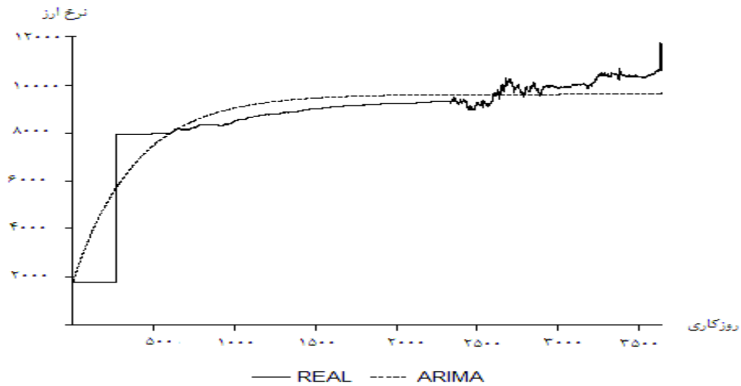
از آن‌جاکه روند تصادفی در الگوهای GBM و MJD حفظ شده است (وجود فرآیند وینر در الگو)، این مسئله سبب می‌شود که نتایج حاصل از شبیه‌سازی (پروسه‌ی خلق داده[۱]) این مدل‌ها پایدار نباشد. برای حل این مشکل فرآیند شبیه‌سازی برای ۵۰۰۰ تکرار انجام پذیرفته و از بین این ۵۰۰۰ بار تکرار شبیه‌سازی، آن تکراری که دارای کم‌ترین RMSE در برازش داخل نمونه‌ی سری زمانی داده‌ها باشد به عنوان تکرار بهینه انتخاب شده است[۲]. در نمودارهای ۲ و ۳ سری‌های زمانی داده‌های واقعی و برازش بهینه‌ی داخل نمونه برای نمونه‌ی اول بر اساس مدل‌های MJD در رابطه‌ی (۱۸) و AR(1) مقایسه شده‌اند.



نمودار ۲- مقایسه‌ی سری زمانی داده‌های واقعی و برازش داخل نمونه بر اساس مدل MJD

1- Data Generating Process.

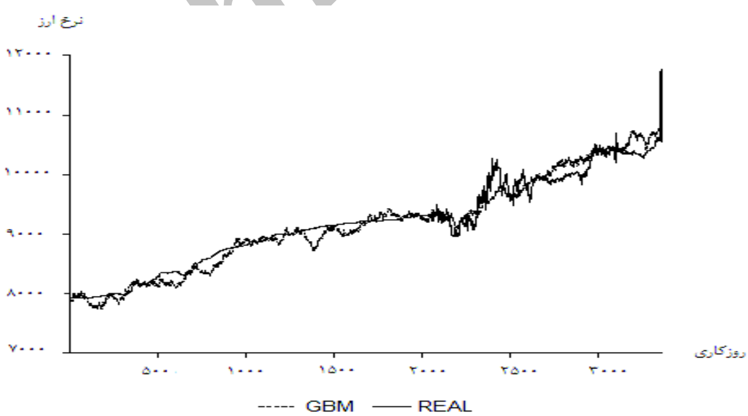
۲- فرآیند شبیه‌سازی در قالب یک برنامه‌ی نوشته شده در محیط نرم‌افزار MATLAB انجام پذیرفته است، خوانندگان در صورت تمایل می‌توانند فایل این برنامه ها را از نویسندگان مقاله درخواست کنند.



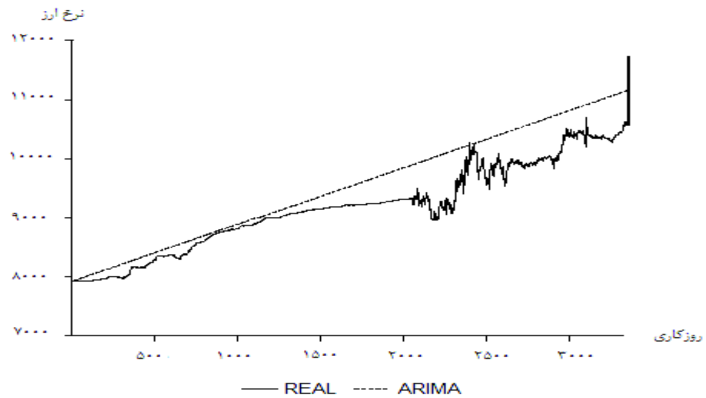
نمودار ۳- مقایسه‌ی سری زمانی داده‌های واقعی و برازش داخل نمونه براساس مدل AR(1)

براساس نتایج نمودارهای ۲ و ۳، برخلاف مدل AR، مدل MJD قادر به برازش نوسانات و هم‌چنین پرش موجود در سری زمانی نرخ ارز است.

در نمودارهای ۴ و ۵، سری‌های زمانی داده‌های واقعی و برازش بهینه‌ی داخل نمونه برای نمونه‌ی اول بر اساس مدل‌های GBM در رابطه‌ی (۱۷) و ARIMA(۱۲،۱،۱) مقایسه شده‌اند.



نمودار۴- مقایسه‌ی سری زمانی داده‌های واقعی و برازش داخل نمونه براساس مدل GBM



نمودار ۵- مقایسه‌ی سری زمانی داده‌های واقعی و برازش داخل نمونه براساس مدل ARIMA(۱۲،۱،۱)

آن‌چه از نمودارهای ۴ و ۵ نتیجه می‌شود این است که برخلاف مدل ARIMA، مدل پیشنهادی GBM نوسانات موجود در سری زمانی نرخ ارز را به خوبی برازش می‌کند.

پس از انجام شبیه‌سازی و انتخاب تکرار بهینه برای مدل‌های GBM و MJD، به پیش‌بینی خارج از نمونه براساس بخش آزمایش نمونه‌های اول و دوم پرداخته می‌شود. جدول ۳، میزان خطای پیش‌بینی خارج از نمونه‌ی این مدل‌ها و مدل سری زمانی ARIMA را برای افقی ۱ ماهه و بر پایه‌ی گشتاور RMSE نشان می‌دهد. نتایج این جدول حاکی از آن است که در پیش‌بینی خارج از نمونه، مدل‌های معادلات دیفرانسیل تصادفی عملکرد بهتری نسبت به مدل‌های سری زمانی ARIMA دارند. لازم به ذکر است که نتایج جدول ۳ نشان می‌دهد مدل MJD نسبت به مدل GBM عملکرد بهتری را در پیش‌بینی خارج از نمونه‌ی نرخ ارز از خود نشان می‌دهد. بر اساس نتایج گزارش شده در جدول ۳ فرضیه‌ی تحقیق مورد پذیرش قرار می‌گیرد.

جدول ۳- خطای پیش‌بینی خارج از نمونه‌ی مدل‌های مختلف (مقدار RMSE)

نمونه‌ی اول	MJD	۲.٦٥۱
	AR(1)	۳.٦۹۸
نمونه‌ی دوم	GBM	۳.۰۲۱
	ARIMA(12,1,1)	٥.٤۱۸٦

منبع : محاسبات پژوهشگران

جدول ۴، شامل پیش‌بینی‌های خارج از نمونه‌ی نرخ ارز برای افق‌های مختلف ۱ تا ۱۲ ماهه می‌باشد. در این جدول مقادیر پیش‌بینی شده‌ی نرخ ارز برای ماه‌های شهریور ۱۳۹۰ تا مرداد سال ۱۳۹۱ بر اساس مدل MJD که بر اساس جدول ۳ دارای کم‌ترین خطای پیش‌بینی خارج از نمونه در بین مدل‌های رقیب بوده، آمده است.

جدول ۴- مقادیر پیش‌بینی شده خارج از نمونه‌ی یک ساله نرخ ارز بر اساس مدل MJD

افق	۱ ماهه	۲ ماهه	۳ ماهه	۴ ماهه	۵ ماهه	۶ ماهه
مقدار پیش‌بینی شده	۱۰۵۶۰.۶۶	۱۰۸۲۸.۸۸	۱۱۰۴۲.۲۴	۱۱۱۴۱.۰۷	۱۱۰۰۳.۷۸	۱۱۱۸۰.۲۷
افق	۷ ماهه	۸ ماهه	۹ ماهه	۱۰ ماهه	۱۱ ماهه	۱۲ ماهه
مقدار پیش‌بینی شده	۱۱۰۱۱.۴۸	۱۱۱۰۳.۶۵	۱۰۸۲۱.۰۶	۱۰۹۶۱.۵۷	۱۰۸۹۲.۹۷	۱۰۹۱۶.۵۵

منبع : محاسبات پژوهش‌گران

۷- خلاصه و نتیجه‌گیری

در این پژوهش به منظور مدل‌سازی و پیش‌بینی سری زمانی نرخ ارز بازار رسمی ایران (ریال در مقابل دلار) برای داده‌های روزانه از این سری زمانی در یک دوره‌ی ۱۰ ساله، دو مدل بر اساس معادلات دیفرانسیل تصادفی مورد استفاده قرار گرفته است. مدل اول، مدل قیمت سهام بلک- شولز - مرتن یا مدل حرکت براونی ژئومتری و مدل دوم، مدل انتشار- پرش مرتن می‌باشد. مدل حرکت براونی ژئومتری قادر به برازش روند زمانی و نوسانات موجود در سری زمانی است، ولی نمی‌تواند پرش‌های موجود در سری زمانی را برازش نماید. بر خلاف این مدل، مدل انتشار-پرش مرتن علاوه بر روند زمانی و نوسانات، می‌تواند پرش‌های موجود در سری زمانی را نیز برازش کند. پس از تخمین این دو مدل برای نمونه‌هایی از داده‌های واقعی نرخ ارز، مقایسه‌ای بین این مدل‌ها و مدل سری زمانی ARIMA انجام گرفته است. در برازش داخل نمونه نتایج نموداری نشان می‌دهد که بر خلاف مدل سری زمانی ARIMA، مدل‌های پیشنهادی به خوبی رفتار واقعی همراه با نوسان و پرش متغیر نرخ ارز را برازش می‌کنند. هم‌چنین در پیش‌بینی خارج از نمونه‌ی نرخ ارز برای افقی ۱ ماهه، مدل‌های پیشنهادی GBM و MJD عملکرد بهتری نسبت به مدل ARIMA براساس گشتاور RMSE دارند. هم‌چنین نتایج نشان می‌دهد که بین دو مدل معادلات دیفرانسیل تصادفی GBM و MJD، مدل MJD به دلیل برازش پرش ناگهانی موجود در روند سری زمانی نرخ ارز عملکرد بهتری را در پیش‌بینی خارج از نمونه‌ی نرخ ارز از خود نشان می‌دهد.

برای انجام تحقیقات تازه در این زمینه پیشنهاد می‌شود که مدل‌های معادلات دیفرانسیل تصادفی با مدل‌های حالت- فضا[1] و مدل‌های خانواده STAR [2] مقایسه شوند.

فهرست منابع

۱- خالوزاده حمید، خاکی صدیق علی (۱۳۸۳)، مدل‌سازی و پیش‌بینی قیمت سهام بر اساس معادلات دیفرانسیل تصادفی، مجله‌ی تحقیقات اقتصادی دانشگاه تهران، شماره‌ی ۶۹، صص: ۱ - ۲۶.

۲- بافنده‌ی ایمان دوست صادق، فهیمی فرد سید محمد، شیرزادی سمیه (۱۳۸۸) پیش‌بینی نرخ ارز با مدل‌های عصبی - فازی ANFIS، خودرگرسیونی NNARX و خود رگرسیونی ARIMA در اقتصاد ایران (۱۳۸۱-۱۳۸۷)، مجله‌ی دانش و توسعه، شماره‌ی ۲۸، صص : ۱۷۷- ۱۹۲.

۳- درگاهی حسن، انصاری رضا (۱۳۸۶)، بهبود مدل‌سازی شبکه‌های عصبی در پیش‌بینی نرخ ارز با به کارگیری شاخص‌های تلاطم، مجله‌ی تحقیقات اقتصادی دانشگاه تهران، شماره‌ی ۸۵، صص : ۱۱۷- ۱۴۴.

۴- طیبی سید کمیل، موحد نیا ناصر،کاظوینی معصومه (۱۳۸۷)، به کارگیری شبکه‌های عصبی مصنوعی در پیش‌بینی متغیرهای اقتصادی و مقایسه‌ی آن با روش‌های اقتصادسنجی: پیش‌بینی روند نرخ ارز در ایران، مجله‌ی علمی پژوهشی شریف ، شماره‌ی ۴۳، صص: ۹۹-۱۰۴.

۵- مرزبان حسین، اکبریان رضا، بهنام جواهری (۱۳۸۴)، یک مقایسه بین مدل‌های اقتصادسنجی ساختاری، سری زمانی و شبکه‌ی عصبی به منظور پیش‌بینی نرخ ارز، مجله‌ی تحقیقات اقتصادی دانشگاه تهران، شماره‌ی ۶۹، صص : ۱۸۱-۲۱۶.

6- Allen, E. (2007). Modeling with Ito Stochastic Differential Equations, university of Texas, USA ,published by springer, p.o, Box 17, 3300 AA.

7- Askari, H and Krichene, N.(2008). Oil Price Dynamics (2002-2006), Energy Economics, Vol.30 (5), 2134-2153.

8- Ball, C. A and Torous, W. N. 1985. On Jumps in Common Stock Prices and Their Impact on Call Option Prices, J. Finance, Vol. 40, 155-173.

9- Basel, M. and AL.Eidehc, Ahmad S. A. AL.refal and Wafaa ,M. Sbeiti. (2004). Modelling the CPI using a Lognormal Diffusion Process and Implications on Forecasting Inflation, Journal of Management Mathematics 15, 39–51.

1- State Space Models.
2- Smooth Transition Autoregressive Model.

10- Black, F and Scholes, M. (1973). The Pricing of Options and Corporate Liabilities, Journal of political Economy, Vol.81, 637- 659.
11- Craine, R and Lochstoer, Lars.A and Syrtveit, K. (2000) Estimation of a Stochastic Volatility Jump Diffusion Model, Economic Analysis Review, Vol 15, No 1.
12- Hanson, F.B. 2006. Applied optimal control with Emphasis on the Control of Jump-Diffusion Stochastic Processes, Combridge university press.
13- Higham, D.J and Kloeden, P.E. (2002). Maple and Matlab for Stochastic Differential Equations in Finance, in Programming Languages and Systemsin Computational Economics and Finance, Kluwer Academic Publishers, Amsterdam.
14- Jorion , P. (1988). On Jump Processes in the Foreign Exchange and Stock Markets, Review or Financial Studies, No.1, 427-445.
15- Malliaris, A.G and Brock, W.A. (1991) .Stochastic Method in Economics and Finance, university of Chicago, published by Elsevier science publication B.V.
16- Merton, R.C. (1973). An Intertemporal Capital Asset Pricing Model, Econometrica, Vol.41, No.5 , 867-887.
17- Merton, R.C. (1976). Option Pricing When Underlying Stock Returns are Discontinuous, Journal of Financial Economics, Vol. 3, 125-144.
18- Pluciennik, P. (2010). Forecasting Financial Processes by Using Diffusion Models , Journal of Dynamic Economics Models , 51-60.
19- Tsay, R.S. (2002). Analysis of Financial Time Series, university of Chicago, the wiley- interscience publication, second edition.
20- Zhu, Z. (2005). Option Pricing and Jump Diffusion Models, Ph.D thesis in mathematics, university of Illinois, Chicago, 1-165.
21- Zhu, Z. and Hanson, F.B. (2005). A Monte-Carlo Option-Pricing Algorithm for Log-Uniform Jump-Diffusion Model in Proceedings of 44th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference, Seville SPAIN, 5221-5226.