Competition Model of Firms in Duopoly Market Based on Differential Game and with Delayed Control Variables

Kian Najafzadeh[1], Ali Mohaghar*[2], Gholam Reza Rokni Lamouki[3]

1. Ph.D Student, Department of Industrial Management, School of Management, University of Tehran, kian.najafzadeh@ut.ac.ir

2. Professor, Department of Industrial Management, School of Management, University of Tehran, amohaghar@ut.ac.ir

3. Associate Professor, School of Mathematics, Statistics and Computer Science, College of Science, University of Tehran, rokni@ut.ac.ir

Received: 2019/03/23 Accepted: 2020/05/13

Abstract

The firms in duopoly markets adjust their behavior under strategic interactions to attain more market share and try to compete by different policies. In this study, we used non-delayed and delayed forms of differential game model to investigate competition between firms. Regarding quality as one of the state variables and related control variables of two firms, we have compared the results of two models and have discussed about the results of delayed form. When the delay, which is an unfavorable phenomenon, happens, the firms must behave corresponding to the equilibrium relations derived from the delayed differential game model. Effort of each firm to improve its product quality is influenced by either its delay or its competitor's delay. The firm having less delay is able to achieve higher quality by means of less effort.

JEL Classification: C6, C7, D43, L13, M3, O3

Keywords: Modeling, competitive behavior, Duopoly Market, Differential Game, Time Delay

*. Corresponding Author, Tel: +982188984646

تحقیقات اقتصادی / دوره ۵۵، شمارهٔ ۱، بهار ۹۹/ ص ۱۸۶-۱۶۷

مدل رقابت بنگاه‌ها در بازار انحصار دوجانبه مبتنی بر بازی دیفرانسیلی و با ملاحظه تأخیرهای زمانی در متغیرهای کنترل

کیان نجف‌زاده[۱]، علی محقر[*۲]، غلامرضا رکنی لموکی[۳]
۱. دانشجوی دکتری مدیریت دانشکده مدیریت دانشگاه تهران،
kian.najafzadeh@ut.ac.ir
۲. استاد دانشکده مدیریت، دانشگاه تهران، amohaghar@ut.ac.ir
۳. دانشیار دانشکده ریاضی، آمار و کامپیوتر، دانشگاه تهران، rokni@ut.ac.ir
تاریخ دریافت: ۱۳۹۸/۰۱/۰۳ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۰۲/۲۴

چکیده

در یک بازار انحصار دویا چندجانبه، بنگاه‌ها در یک تعامل استراتژیک، رفتار تولیدی خود را به‌منظور تصاحب سهم بازار بیشتر و در راستای رقابت با همدیگر، با استفاده از سیاست‌های مختلفی تنظیم می‌کنند. تغییر در متغیرهای حالت یک تولیدکننده، با تأخیری پس از اعمال سیاست‌های کنترلی محقق می‌شود. برای بازنمایی این رفتار رقابتی از نظریه بازی‌های دیفرانسیلی بدون ملاحظه تأخیر زمانی در متغیرهای کنترل و با ملاحظه تأخیرهای زمانی در آنها استفاده شده است. در این مقاله با حل دو مدل، تأثیر شرایط مختلف تأخیر زمانی در مورد یکی از متغیرهای حالت (کیفیت) و متغیر کنترل مربوطه (سرمایه‌گذاری در ارتقای کیفیت) بررسی شده است. براساس نتایج به‌دست آمده مشخص شده است که تأخیر، پدیده نامناسبی برای بنگاه‌ها در فرآیند رقابت بین آنهاست و بنگاه‌ها باید آن رفتار تعادلی را که از حل مدل بازی دیفرانسیلی متناسب با چگونگی تأخیری که دارند استخراج می‌شود، از خود نشان دهند. در مورد متغیر حالت کیفیت، با افزایش تأخیرزمانی هر بنگاه، سطح کیفیت پایین‌تری نسبت به شرایط بدون تأخیر حاصل می‌شود. تفسیرهای مشابه در خصوص متغیرهای حالت هزینه متوسط تولید و سهم مصرف‌کنندگان مطلع بنگاه‌ها و نیز در ارتباط با متغیرهای کنترل مربوط به آنها را به‌طریق مشابه می‌توان داشت.

طبقه‌بندی JEL: C6، C7، D43، L13، M3، O3

واژه‌های کلیدی: مدل‌سازی، رفتار رقابتی، بازار انحصار دو جانبه، بازی دیفرانسیلی، تأخیر زمانی

---

*. نویسنده مسئول، شماره تماس ۰۹۱۲۳۸۴۸۲۵۶

۱- مقدمه

در یک بازار انحصار دو یا چندجانبه، بنگاه‌ها رفتار تولیدی خود را به‌منظور تصاحب سهم بازار بیشترو در راستای رقابت با همدیگر با استفاده از سیاست‌های قیمت‌گذاری، بازاریابی، تحقیق و توسعه و ارتقای کیفیت تنظیم می‌کنند. بنگاه‌ها در عرصه بازار و در مقابل رفتار مصرف کننده، رفتار تولیدی خود را براساس تقاضای بازار از کالای تولیدیشان تنظیم می‌کنند. طبیعتاً هر بنگاه برای حفظ و افزایش درآمد خود نیاز به حفظ سهم خود در بازار (در درجه اول) و افزایش و توسعه سهم بازار خود (در درجه دوم) دارد. رفتار هر یک از بنگاه‌ها بر رفتار بنگاه یا بنگاه‌های دیگر تأثیرگذار است، لذا رقابت بین شرکت‌ها در بازار انحصاردو یا چند جانبه، ذاتاً یک موقعیت تعامل استراتژیک می‌باشد. مدل‌های مورد استفاده در سمت تولید کننده مدل‌های مربوط به رقابت تولیدکنندگان از طریق ابزارهای تغییر قیمت، صرف هزینه‌های بازاریابی و تحقیق و توسعه (کاهش هزینه تولید و ارتقای کیفیت) می‌باشد که معمولاً در ادبیات مرتبط از طریق مدل‌سازی بر مبنای بازی‌های دیفرانسیلی به آن پرداخته شده است. مدل‌های مختلفی برای بازنمایی این پدیده توسط محققان دیگر ارائه شده است. اما در مدل‌های مزبور ساده سازی‌هایی صورت گرفته و به‌طور عمده از مدل‌های خطی استفاده شده است. به‌طور حتم مدل‌های خطی از سادگی در فهم و همچنین از سهولت در حل تحلیلی و حل کامپیوتری برخوردارند، ولی بخشی از اطلاعات سیستم به‌واسطه ساده‌سازی‌ها از دست می‌رود. چه چیزی برای مدل‌سازی باید انتخاب شود و چه چیزی موجب دسترسی به یک مدل مفهومی خوب می‌شود. مدل باید معتبر، قابل باور و به‌واقعیت نزدیک، امکان‌پذیر و مفید باشد. مدل‌های ساده‌تر بهترند، چون سریع‌تر ساخته می‌شوند، منعطف‌ترند، نیاز به داده کم‌تر دارند، سریع‌تر اجرا می‌شوند و نتایج آن به‌دلیل فهم بهتر، راحت‌تر تفسیر می‌شوند. بنابراین، در زمان‌هایی که مجبور هستیم به یک مدل پیچیده روی می‌آوریم. با افزایش درجه پیچیدگی، دقت مدل افزایش می‌یابد، ولی هیچ وقت به دقت کامل نمی‌رسند. با بالا رفتن سطح پیچیدگی از یک حد بیشتر، دوباره سطح دقت کاهش می‌یابد و دلیل این امر آن است که ما دسترسی به دانش و داده برای اینکه از عهده این پیچیدگی برآییم، نداریم و شروع به در نظر گرفتن فرضیاتی می‌کنیم که درست نیستند (رابینسون[1]، ۲۰۱۳). یکی از جنبه‌های مهم یک

1. Robinsom

مدل خودگرد[۱] بودن و ناخودگرد[۲] بودن آن است. مدل خودگرد بر مبنای بازی دیفرانسیلی با توابعی مستقل از زمان ساخته می‌شود؛ در حالی‌که مدل‌های ناخودگرد با توابعی وابسته به زمان ساخته می‌شوند. جنبه سوم از پیچیدگی‌های قابل درنظر گرفتن در مدل‌های بازی‌های دیفرانسیلی، افزودن تأخیر است. البته حل و تحلیل چنین مدل‌هایی به‌طور عمده پیچیده و دشوار می‌باشد. در نظر گرفتن هرکدام از این پیچیدگی‌ها به طبیعت و ساختار مسئله اولیه طرح شده بستگی دارد، بنابراین اگر در صورت مسئله هر یک از مفاهیم غیرخطی بودن، ناخودگردبودن و یا تأخیر داشتن وجود داشته باشند؛ باید در مدل در نظر گرفته شوند. این بدان معناست که حضور این پیچیدگی‌ها در مدل لزوماً از اختیارات مدل‌ساز نیست، بلکه بیشتر از الزامات صورت مسئله می‌باشد.

در این تحقیق، در بازنمایی رفتار رقابتی بنگاه‌ها در بازار انحصار دو جانبه به یکی از مدل‌های فراتر از مدل‌های خطی ساده پرداخته شده است. مدل مورد نظر در این مقاله، مدلی است خطی و خودگرد که در آن تأخیر زمانی برای برخی از متغیرهای کنترل بنگاه‌ها در نظر گرفته شده است.در این مقاله، مدلی برای رقابت دو تولید کننده در بازار انحصار دو جانبه در قالب یک بازی دیفرانسیلی (بازی‌های دینامیکی که در طول زمان $[0, T]$ به‌وقوع می‌پیوندند و بازیکنان استراتژی‌های خود را در زمان t، براساس اطلاعات به‌دست آمده از بازی‌هایی که تا لحظه t انجام داده‌اند به‌دست می‌آورند) ارائه شده، که در قیود آن، تأخیر روی متغیرهای کنترل سرمایه‌گذاری روی R&D برای کاهش هزینه تولید، سرمایه‌گذاری در تحقیق و نوآوری برای ارتقای کیفیت و سرمایه‌گذاری در بازاریابی برای دو بازیکن دیده شده است. با حل این مدل، رفتار دینامیکی سیستم در ارتباط با یکی از موارد تأخیر ذکر شده و برای مقادیر کوچک و بزرگ آن، مورد بررسی قرار گرفته است.

۲- مبنای نظری و ادبیات تحقیق

با استناد به نگاه پارادایمی به بازارها (اردلان[۳]، ۲۰۰۷)، هر پارادایمی، یک استراتژی تحقیق را پشتیبانی می‌کند که تحقیق حاضر نیز بر پارادایم کارکردگرا یا نقش

1. Autonomous
2. Nonautonomous
1. Ardalan

باور[1]استوار است. در پارادایم مذکور فرض براین است که که جامعه یک موجودیت ملموس و ویژه داشته و از نظم مشخصی پیروی می‌کند. مدل‌های رفتاری بنگاه‌ها و ساختار بازارها موضوعاتی هستند که براساس نظریه بنگاه با ملاحظات پیچیدگی‌های دنیای واقعی و در حوزه سازمان صنعتی مطالعه می‌شوند، برای جزئیات بیشتر می‌توان به (شای[2]، ۱۹۹۵) مراجعه کرد.

مدل ریاضی برای مطالعه و پاسخ به سوالات مربوط به سیاست‌های کسب و کار، نظریه بازی‌های دیفرانسیلی است که توسط (آیساک[3]، ۱۹۷۵) برای بازی‌های تعقیب و گریز ارائه شده است. سپس، این رویکرد توسط (کیس[4]، ۱۹۷۹) برای بازی‌های دیفرانسیلی با مجموع غیرصفر و برای کاربرد در مسائل رقابت اقتصادی توسعه داده شده است. مرجع جامعی توسط (ستی[5] و تامسون، ۲۰۰۰) در زمینه حل مسائل کنترل بهینه به‌ویژه با استفاده از رویکرد اصل ماکزیمم پونتریاگین ارائه گردیده است. (یورگنسن، داکنر و سورجر[6]، ۲۰۰۰)، مرجعی برای نظریه و کاربردهای بازی‌های دیفرانسیلی در سازمان صنعتی، بازهای انحصار چند جانبه و بازاریابی منتشر کرده‌اند.

مدل‌های بازی تبلیغات و بازاریابی همکارانه یا غیرهمکارانه مبتنی بر بازی دیفرانسیلی در بازارهای دو یا چند انحصاری با جواب‌های حلقه بسته یا باز، در تحقیقات (یورگنسن[7]، ۱۹۸۲)، (فراکتر[8]، ۱۹۹۹)، (سلینی[9]، لامبرتینی[10] و لایتمن[11]، ۲۰۰۳)، با هدف سرمایه‌گذاری به‌منظور افزایش قیمت ذهنی[12] مصرف‌کننده، (یورگنسن و زاکور[13]، ۲۰۰۴)، (اریکسون[14]، ۲۰۰۷)، (اریکسون، ۲۰۰۹) با ملاحظه برندهای چندگانه، (یورگنسن و زاکور، ۲۰۱۴) به‌صورت پیمایشی روی ادبیات تبلیغات همکارانه در

2. Functionalist
3. Oz Shy
4. Isaacs
5. Case
6. Sethi
7. Sorger
9. Jørgensen
10. Fruchter
11. Cellini
12. Lambertini
13. Leitmann
12. Reservation Price
13. Zaccour
14. Erickson

کانال‌های بازاریابی (زنجیره‌های تأمین) با استفاده از روش‌های نظریه بازی‌ها، انجام شده است.

در مورد موضوع سیاست بهینه قیمت‌گذاری دینامیک در بازار انحصار چند جانبه با استفاده از مدل‌های مبتنی بر بازی دیفرانسیلی، تحقیقات (داکنر[۱] و یورگنسن، ۱۹۸۸)، (چینتاگونتا[۲] و رائو[۳]، ۱۹۹۶)، (موکوپادیا[۴] و کوولیس[۵]، ۱۹۹۷) به‌منظور تحلیل تصمیم‌های مرتبط با کیفیت طراحی و قیمت‌گذاری محصول در طی چرخه عمر محصول، (دانا[۶] و فانگ[۷]، ۲۰۱۱) برای انتخاب هم‌زمان قیمت و کیفیت و (لدوینا[۸] و سیرکار[۹]، ۲۰۱۱) انجام شده است.

در مورد بازارهای انحصار چند جانبه تک محصوله کارنو (بیشی[۱۰] و همکاران، ۲۰۰۸) با فرض توابع تقاضا و توابع هزینه خطی و (چیارلا[۱۱]، کوپل[۱۲] و همکاران، ۲۰۱۰) برای ارائه فرآیند تنظیم دینامیک هنگامی که همه بنگاه‌ها سعی کنند تا به‌طور هم‌زمان سطح تولید تعادلی را انتخاب کنند، تحقیق انجام داده‌اند. (ناکائو[۱۳]، ۱۹۸۳)، مدلی دینامیکی را براساس نظریه سرمایه‌گذاری نئوکلاسیک، برای تشریح روابط میان ساختار و متغیرهای عملکرد ارائه کرده است. (پراساد[۱۴] و همکاران، ۲۰۰۸) یک مدل دینامیکی چندانحصاری را ارائه کرده‌اند که در آن در کنار رقابت، مقوله آگاه‌سازی برند هم مدنظر قرار گرفته است. یک مدل انحصار چندجانبه دینامیک بر پایه کنترل بهینه حلقه باز، توسط (لامبرتینی، ۲۰۱۰) برای بررسی تعادل حالت ماندگار در رفتار بنگاه‌ها با ملاحظه تابع تقاضای محدب و قیمت مقاوم در برابر تغییر، توسعه یافته است. (دراگون[۱۵]، لامبرتینی و همکاران، ۲۰۱۵) برخی از کاربردهای بازی‌های دیفرانسیلی

1. Dockner
2. Chintagunta
3. Rao
4. Mukhopadhyay
5. Kouvelis
6. Dana
7. Fong
8. Ledvina
9. Sircar
10. Bischi
11. Chiarella
12. Kopel
13. Nakao
14. Prasad
15. Dragone

حلقه باز غیرهمکارانه را در بازار انحصار چندجانبه ارائه داده‌اند. در تحقیق انجام شده توسط (بیانکا و همکاران، ۲۰۱۳)، اشاره شده است که برای مدت‌ها، تلاش‌های زیادی انجام گرفته تا فهم عمیقی از پیچیدگی اقتصادی شامل رفتارهای آشوبناک و پایداری حاصل شود. مدل دینامیکی زمان پیوسته رشد اقتصادی با تأخیر زمانی، مدل تنظیم قیمت با تأخیرهای تولید، مدل انحصار چندجانبه کارنو با تأخیر زمانی، مدل اقتصادی با تأخیر در مصرف، از نمونه تحقیقاتی هستند که در این زمینه انجام شده‌اند. در مطالعات (ماتسوموتو و زیداروفسکی، ۲۰۱۰)، مطرح شده است که رفتارهای مجانبی سیستم‌های اقتصادی با دینامیک پیوسته یا گسسته همواره محور مطالعات زیادی بوده و به‌طور کلی در مدل‌های دیفرانسیلی غیرخطی اقتصادی دارای تأخیر که بررسی و مطالعه شده‌اند، رفتارهای مجانبی مورد توجه قرار گرفته است. در این گونه مدل‌ها چنانچه تأخیرها کوچک باشند، رفتارهای مجانبی محلی یکسان خواهند بود؛ اما در تأخیرهای بزرگ، خواص مجانبی متفاوت می‌شوند و با بزرگ‌تر شدن تأخیرها، دینامیک‌های آشوبناک و پیچیده‌تری ممکن است تظاهر کنند.

مدل جامعی که در این تحقیق مورد استفاده قرار گرفته است، با استفاده از مجموعه تحقیقات فوق به‌طور مستقیم یا غیرمستقیم الگو برداری شده است. مدل مذکور در هیچکدام از کارهای محققان قبلی ارائه نشده و در هر کدام از تحقیقات مزبور، به جنبه‌ای یا جنبه‌های محدودی از مدل مورد بحث اشاره شده است.

۳- مدل‌سازی رقابت بنگاه‌ها در بازار انحصار دو جانبه

پارامترها و متغیرهای مدل به شرح زیر معرفی می‌شوند.

ρ: نرخ تنزیل

$s_i(t)$: متغیر حالت مقدار تولید (سطح فروش) بنگاه i، ذخیره سازی وجود ندارد.

α_i: ضریب تنظیم

a_i، b_i و d_i پارامترها و ضرایب در منحنی خطی تقاضا به‌صورت $Q_i(t) = a_i - b_i p_i(t) + d_j p_j(t)$ می‌باشد.

$p_i(t)$: متغیر کنترل قیمت بازار بنگاه i

$c_i(t)$: متغیر حالت هزینه متوسط تولید بنگاه i

$k_i(t)$: متغیر کنترل تلاش (سرمایه‌گذاری) R&D بنگاه i برای کاهش هزینه متوسط تولید $c_i(t)$

θ_i: ضریبی است که براساس آن تأثیر هزینه تحقیق و توسعه بنگاه i روی کاهش هزینه متوسط تولید $c_i(t)$ آن سنجیده می‌شود.

μ_j: ضریبی است که با آن تأثیر تلاش از طرف بنگاهj برای کاهش هزینه متوسط تولید، روی تغییر هزینه متوسط تولید بنگاه i سنجیده می‌شود.

δ_i: ضریبی است که بیانگر فرسودگی و پیر شدن تاسیسات است که به‌دنبال آن هزینه‌های متوسط تولید واحد i افزایش می‌یابد.

$q_i(t)$: متغیر حالت سطح کیفیت نسبی کالای تولیدی بنگاه i، متغیر بدون بعد که مقدار آن بین ۰ تا ۱ است.

$l_i(t)$: متغیر کنترل هزینه سرمایه‌گذاری در تحقیق و نوآوری برای ارتقای ۱ درصد در کیفیت نسبی کالای بنگاه i

ω_i: ضریبی است که براساس آن تأثیر تلاش ارتقای کیفیت بنگاه i روی افزایش سطح کیفیت نسبی کالای آن بنگاه سنجیده می‌شود.

φ_j: ضریبی است که براساس آن تأثیر تلاش ارتقای کیفیت بنگاه j روی تغییر سطح کیفیت نسبی کالای بنگاه i سنجیده می‌شود.

ε_i: ضریبی است که براساس آن در هر مرحله زمانی، بخشی از کیفیت نسبی کالای بنگاه i به‌واسطه تغییر سلیقه‌های مصرف‌کنندگان و اثر چرخه عمر از دست می‌رود.

$r_i(t)$: متغیر کنترل تلاش (سرمایه‌گذاری) بازاریابی انجام شده توسط بنگاه i در زمان t است تا مصرف‌کنندگان بیشتری را دربازار در مورد جزئیات (قیمت و کیفیت) کالایش مطلع کند.

$y_i(t)$: متغیر حالت سهم مصرف‌کنندگان مطلع در بازار در مورد جزئیات (قیمت و کیفیت)کالای تولیدی بنگاه i

τ_i: ضریبی است که براساس آن تأثیر تلاش بازاریابی بنگاه i روی افزایش سهم مصرف‌کنندگان مطلع در بازار در مورد جزئیات (قیمت و کیفیت) کالایش سنجیده می‌شود.

$\xi_j \neq 0$: ضریبی است که اثرات منفی که سهم مصرف‌کنندگان مطلع بنگاه i از تلاش‌های بازاریابی رقبا دریافت می‌دارد را اندازه می‌گیرد.

η_i : ضریبی است که بیانگر نرخ کاهش معمول در سهم مصرف‌کنندگان مطلع در بازار بنگاه i است.

الف- مدل ساده بازی دیفرانسیلی

برای بازیکن i ام در حالت رقابت بین دو بازیکن (بازار دو انحصاری) خواهیم داشت.

$$\mathrm{Max}_{p_i(t),k_i(t),l_i(t),r_i(t)} J_1 = \int_0^T e^{-\rho t}\{[p_i(t) - c_i(t)]\dot{s}_i(t) - \dot{c}_i(t)k_i(t) - \dot{q}_i(t)l_i(t) - \dot{y}_i(t)r_i(t)\}dt$$

s.t.

$$\dot{s}_i(t) = \alpha_i\left(a_i - b_i p_i(t) + d_j p_j(t) - s_i(t)\right) \qquad s_i(t_0) = s_{i0}$$

$$\dot{c}_i(t) = -\theta_i k_i(t) - \mu_j k_j(t) + \delta_i c_i(t) \qquad c_i(t_0) = c_{i0}$$

$$\dot{q}_i(t) = \omega_i l_i(t) + \varphi_j l_j(t) - \varepsilon_i q_i(t) \qquad q_i(t_0) = q_{i0}$$

$$\dot{y}_i(t) = \tau_i r_i(t) - \xi_j r_j(t) - \eta_i y_i(t) \qquad i, j = 1, 2 \qquad y_i(t_0) = y_{i0}$$

صورت‌بندی و نحوه حل این‌گونه مسائل توسط (یورگنسن، داکنر و سورجر، ۲۰۰۰)، (یورگنسن و زاکور، ۲۰۰۴)، (اریکسون، ۲۰۰۷) و (دراگون، لامبرتینی و همکاران، ۲۰۱۵) ارائه شده است. در روابطی که برای متغیرهای کنترل دو بنگاه به‌دست می‌آید، استراتژی کنترل هر بنگاه به‌صورت تابعی از زمان، پارامترهای همان بنگاه، پارامترهای بنگاه رقیب، نرخ تنزیل، شرایط اولیه بنگاه و شرایط اولیه بنگاه رقیب می‌باشد و این همان انتظاری است که از نتیجه تحلیل یک مدل مبتنی بر بازی دیفرانسیلی می‌رود. در پیوست مقاله، پیرامون حل این مدل و به‌عنوان نمونه در ارتباط با متغیر حالت کیفیت و متغیر کنترل متناظر با آن، توضیحات بیشتری ارائه شده است.

ب- مدل بازی دیفرانسیلی با تأخیرزمانی در سیاست‌های کنترل

مدل ریاضی بازی دیفرانسیلی انحصار دو جانبه به‌صورت و با فرضیات فوق، هرچند دارای متغیرهای زیاد، محدودیت‌های نسبتا کامل‌تر و تابع هدف جامع‌تری است؛ اما قابل ارتقا به مدلی است که با واقعیت انطباق بیشتری داشته باشد. یکی از مواردی که می‌توان به این مدل اضافه کرد، تأخیرهای زمانی است. کاهش هزینه‌های تولید، ارتقای کیفیت و افزایش تعداد مصرف‌کنندگان مطلع در بازار برای یک تولید کننده بلافاصله پس از صرف هزینه‌های تحقیق و توسعه، ارتقای کیفیت و بازاریابی و تبلیغات محقق نمی‌شود، بلکه هر کدام با یک تأخیری زمانی به‌وقوع می‌پیوندد. مدل فوق با در نظر

گرفتن تأخیرهای مزبور تبدیل به یک مدل بازی دیفرانسیلی با تأخیر زمانی و حل آن به‌صورت حل مسئله کنترل بهینه با تأخیر زمانی در می‌آید. بنابراین لازم است تا روی مسئله بهینه‌سازی سیستم‌های دینامیکی (کنترل بهینه) با تأخیر زمانی کمی متمرکز شویم. نحوه حل این‌گونه مسائل توسط (زواره‌ای[1]، جمشیدی[2] ۱۹۸۷) ارائه شده است.

برای بازیکن i ام در حالت رقابت بین دو بازیکن (بازار دو انحصاری) خواهیم داشت.

$$\mathrm{Max}_{p_i(t),k_i(t),l_i(t),r_i(t)} J_1 = \int_0^T e^{-\rho t}\{[p_i(t)-c_i(t)]\dot{s}_i(t) - \dot{c}_i(t)k_i(t) - \dot{q}_i(t)l_i(t) - \dot{y}_i(t)r_i(t)\}dt$$

s.t.

$$\begin{aligned}
&\dot{s}_i(t) = \alpha_i(a_i - b_i p_i(t) + d_j p_j(t) - s_i(t)) && s_i(t_0) = s_{i0}\\
&\dot{c}_i(t) = -\theta_i k_i(t - t_{ki}) + \mu_j k_j(t) + \delta_i c_i(t) && c_i(t_0) = c_{i0}\\
&\dot{q}_i(t) = \omega_i l_i(t - t_{li}) - \varphi_j l_j(t) - \varepsilon_i q_i(t) && q_i(t_0) = q_{i0}\\
&\dot{y}_i(t) = \tau_i r_i(t - t_{ri}) - \xi_j r_j(t) - \eta_i y_i(t) && y_i(t_0) = y_{i0}\\
&k_i(t) = u_{k_i}(t), \qquad -t_{k_i} \le t \le t_0 &&\\
&l_i(t) = u_{l_i}(t), \qquad -t_{l_i} \le t \le t_0 &&\\
&r_i(t) = u_{r_i}(t), \qquad -t_{r_i} \le t \le t_0 &&\\
&i, j = 1, 2 &&
\end{aligned}$$

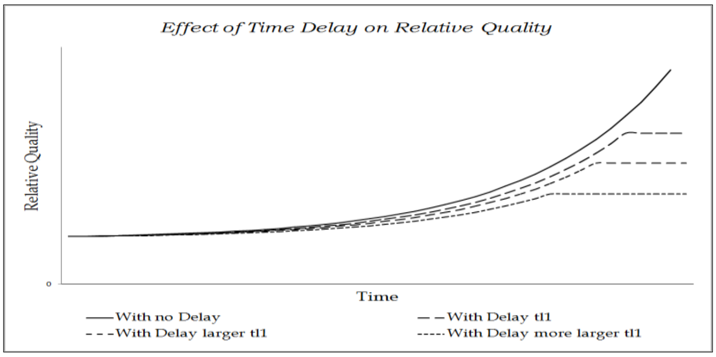
t_{ki}، t_{li} و t_{ri} به‌ترتیب تأخیرهای زمانی متغیرهای کنترل $k_i(t)$، $l_i(t)$ و $r_i(t)$ هستند. در پیوست مقاله، پیرامون حل این مدل و به‌عنوان نمونه در ارتباط با متغیر حالت کیفیت و متغیر کنترل متناظر با آن، توضیحات بیشتری ارائه شده است.

برای اینکه ذهنیت مشهود و تصوری از معادلات حاصل از حل مدل‌های فوق داشته باشیم، کافی است معادلات مربوط به یک مورد از متغیرهای حالت را به‌صورت گرافیکی مورد مطالعه قرار دهیم. متغیر حالت کیفیت برای این منظور انتخاب کرد. بدیهی است می‌توان رفتار بقیه متغیرها را نیز به‌طور مشابه بررسی نمود. هدف از این مطالعه، بررسی اثرات تأخیر نسبی در اعمال سیاست‌های کنترلی بنگاه‌ها است و معمولاً وقتی به بررسی اثرات یک پارامتر در مدلی پرداخته می‌شود، اثرات پارامترهای دیگر ثابت فرض می‌شود، بنابراین فرض شده است که پارامترهای دو بنگاه به غیر از پارامترهای مربوط به تأخیر، کاملاً یکسان هستند. از آنجا که یافتن دو بنگاه کاملاً یکسان در دنیای واقعی و با پارامترهای مشابه عملاً امکان‌ناپذیر است؛ از داده‌ها و مقادیر پارامترهای یک بنگاه واقعی در یک صنعت خاص استفاده شده و دو بنگاه مشابه هم با پارامترهای یکسان در نظر

1. Z. Avarei
2. Jamshidi

گرفته می‌شود. لازم به توضیح است که برای استخراج پارامترها کافی است با داشتن داده‌ها و اطلاعات میزان تولید، قیمت، هزینه متوسط تولید، کیفیت، سهم بازار و ... یکی از بنگاه‌ها برای چند سال متوالی، پارامترهای آن بنگاه را از طریق تحلیل‌های آماری و ریاضی به‌دست آورد و برای بنگاه دوم نیز همان پارامترهای مزبور را مد نظر قرار داد.
برای بررسی اثر تأخیر زمانی روی متغیر حالت کیفیت، تأخیر زمانی مربوط به یک بنگاه تغییر داده می‌شود و خروجی‌های مربوطه در یک نمودار تجمیع شده و با هم و با شرایط بدون تأخیر، مقایسه می‌شوند. برای بررسی اثر تأخیر زمانی روی متغیرهای کنترل دو بنگاه نیز، به تأخیرهای زمانی آنها یعنی t_{l1} و t_{l2}، نسبت به هم مقادیر مشابه یا متفاوتی تخصیص داده می‌شود و خروجی‌های مربوطه با هم مقایسه و مورد تفسیر قرار می‌گیرند. برخی از نتایج و تفسیرهای مربوطه در ادامه ارائه و تشریح شده‌اند.

اولین نمودار حاصل از حل مدل با ملاحظات فوق، نمودار مربوط به رفتار متغیر حالت کیفیت است. همان‌گونه که از نمودار ۱ پیداست، با افزایش تأخیر زمانی در اخذ نتایج حاصل از سرمایه گذاری در ارتقای کیفیت، روند افزایش کیفیت کندتر می‌شود و منحنی کیفیت در حالت بدون تأخیر به سمت پایین متمایل می‌شود و شیب آن کاهش می‌یابد.

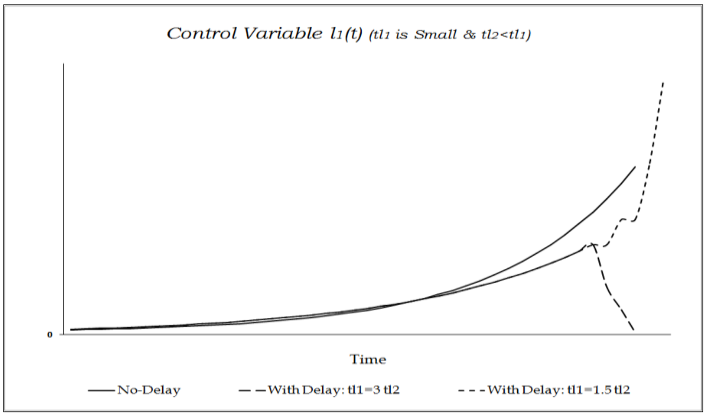


نمودار ۱. رفتار متغیر کیفیت تحت تأخیر زمانی

منبع: یافته‌های پژوهش

اما پیچیدگی رفتاری بیشتر مربوط به سیاست سرمایه‌گذاری بنگاه‌ها در زمینه ارتقای کیفیت می‌شود. اینکه تحت تأخیرهای مختلفی که دو بنگاه می‌توانند داشته باشند، رفتار متغیر کنترل $l_i(t), i=۱,۲$ بنگاه‌ها به چه صورت درمی‌آید.

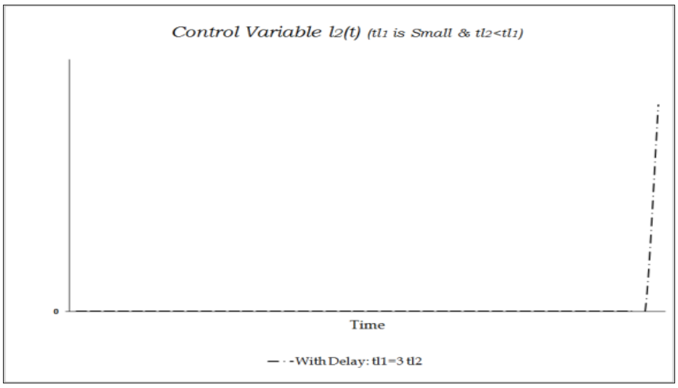
از نمودار ۲ مشخص می‌شود که با افزایش نسبی تأخیر یک بنگاه (بنگاه اول)، بنگاه مزبور از سرمایه‌گذاری بیشتر در مقابل رقیب اجتناب می‌کند. در این‌صورت مطابق نمودار ۳، بنگاه رقیب نیز به تلاش خود در جهت ارتقای کیفیت محصول سرعت زیادی می‌بخشد. ولی با توجه به نمودار ۲، در شرایطی که نسبت میزان تأخیر آن نسبت به تأخیر رقیب کاهش یابد، به تلاش خود در جهت بهبود کیفیت ادامه خواهد داد، هرچند در مقطعی روند این تلاش کند می‌شود. با این وجود بنگاه دارای تأخیر کم (بنگاه دوم) روند ارتقای کیفیت بهتری را با تلاش کمتر مطابق نمودار ۴ خواهد داشت، چون میزان تأخیر کمتری را دارد.



نمودار ۲. رفتار متغیر کنترل تلاش بنگاه اول برای ارتقای کیفیت، تحت حالات مختلف تأخیر زمانی دو بنگاه

منبع: یافته‌های پژوهش

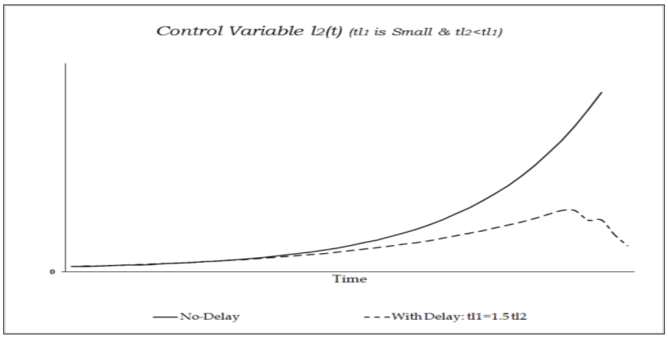
مطابق نمودار ۵، با افزایش تأخیر زمانی، شیب منحنی سرمایه گذاری در تلاش برای ارتقای کیفیت کاهش می‌یابد. اگر نسبت تأخیر بنگاه اول به تأخیر بنگاه دوم زیاد باشد، منحنی سرمایه‌گذاری بنگاه ۱ پس از طی یک دوره با شیب کم، سیر نزولی به خود می‌گیرد. اما اگر نسبت یاد شده کاهش یابد، نمودار مذکور روند صعودی به خود می‌گیرد. مطابق نمودار ۶، رفتار منحنی مربوط به بنگاه دوم نیز پس از طی دوره با شیب کم، در حالتی که نسبت تأخیر بنگاه اول به تأخیر بنگاه دوم زیاد باشد، روند فزاینده با شیب تند پیدا می‌کند.



نمودار ۳. رفتار متغیر کنترل تلاش بنگاه دوم برای ارتقای کیفیت، تحت تأخیر نسبی خیلی پایین نسبت به بنگاه اول

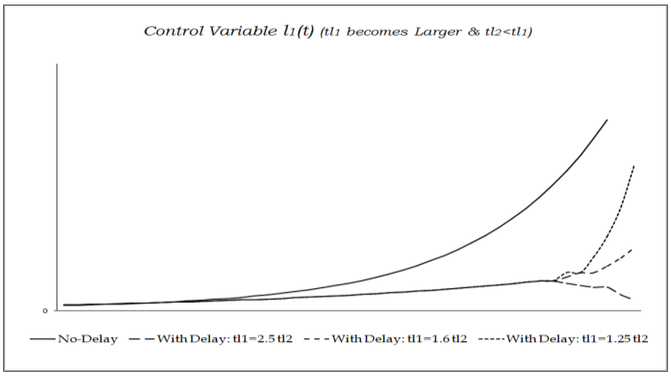
منبع: یافته‌های پژوهش

اما در حالتی که نسبت مذکور کاهش یابد، منحنی سرمایه‌گذاری بنگاه دوم، برخلاف رفتار بنگاه اول، سیر نزولی به خود می‌گیرد. ولی نکته مهم این است که همواره میزان تلاش بنگاه دوم کم‌تر از بنگاه اول و میزان ارتقای کیفیت محصول آن بیشتر از میزان ارتقای کیفیت محصول بنگاه اول است و دلیل این امر این است که تأخیر بنگاه دوم کم‌تر از تأخیر بنگاه اول می‌باشد.



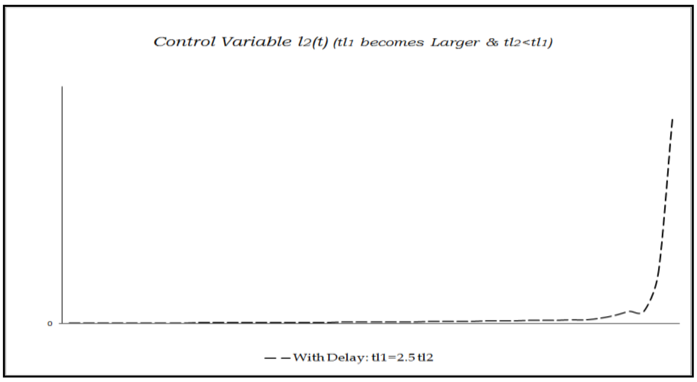
نمودار ۴. رفتار متغیر کنترل تلاش بنگاه دوم برای ارتقای کیفیت، تحت تأخیر نسبی کم نسبت به بنگاه اول

منبع: یافته‌های پژوهش



نمودار ۵. رفتار متغیر کنترل تلاش بنگاه اول برای ارتقای کیفیت، تحت شرایطی که تأخیر بنگاه اول افزایش می‌یابد، ولی کماکان تأخیر بنگاه دوم نسبت به بنگاه اول کم‌تر است.

منبع: یافته‌های پژوهش



نمودار ۶. رفتار متغیر کنترل تلاش بنگاه دوم برای ارتقای کیفیت، تحت شرایطی که تأخیر بنگاه اول افزایش می‌یابد و نسبت تأخیر بنگاه اول به تأخیر بنگاه دوم زیاد است

منبع: یافته‌های پژوهش

۴- جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

بیشتر پدیده‌هایی که در سیستم‌های پیچیده دنیای واقعی، به‌ویژه در سیستم‌های اقتصادی رخ می‌دهند، تأثیرگذاری آنی ندارند و با تأخیرهایی تظاهر می‌کنند، لذا لزوماً تغییر در متغیرهای حالت هم‌زمان با متغیرهای کنترل محقق نمی‌شود، بلکه هر کدام با یک تأخیر زمانی به‌وقوع می‌پیوندند. بدین معنی که کاهش هزینه‌های تولید، ارتقای

کیفیت و افزایش تعداد مصرف‌کنندگان مطلع در بازار برای یک تولید کننده، بلافاصله پس از صرف هزینه‌های تحقیق و توسعه، ارتقای کیفیت و بازاریابی و تبلیغات اتفاق نمی‌افتد، بنابراین ملاحظه تأخیرهای زمانی در متغیرهای کنترل به مدل ماهیت واقع بینانه‌تری خواهد داد و لذا لازم است تا نتایج حل دو مدل با هم مقایسه شوند. از روابط به‌دست آمده برای متغیرهای کنترل دو بنگاه در هر دو سناریوی بدون تأخیر و با تأخیر مشخص می‌شود که استراتژی کنترل هر بنگاه تابعی از زمان، پارامترهای همان بنگاه، پارامترهای بنگاه رقیب، نرخ تنزیل، شرایط اولیه بنگاه و رقیب آن و تأخیرهای زمانی دو بنگاه است و این همان انتظاری می‌باشد که از نتیجه تحلیل بازی دیفرانسیلی می‌رود. توجه به این نکته حائز اهمیت است که نتایج ناشی از تأخیر از ابتدا قابل پیش‌بینی نیست و جهت احصای اثرات ناشی از آن روی متغیرهای حالت و کنترل بنگاه‌ها، نیازمند توسعه مدلی هستیم که در این مقاله ارائه شده است.

تأخیر، پدیده نامناسبی برای بنگاه‌ها در فرآیند رقابت بین آنهاست و بنگاه‌ها باید رفتار تعادلی خاصی را که از حل مدل بازی دیفرانسیلی در هر مورد و هر حالت از تأخیری که دارند استخراج می‌شود، از خود نشان دهند. با افزایش تأخیرزمانی هر بنگاه، پیش‌بینی می‌شود، متغیرهای حالت هزینه تولید، کیفیت و سهم مصرف‌کنندگان مطلع آن بنگاه شرایط نامطلوب‌تری را نسبت به شرایط بدون تأخیر پیدا می‌کنند. رفتار متغیرهای کنترل متناظر با تلاش برای کاهش هزینه تولید، ارتقای کیفیت و افزایش سهم مصرف‌کنندگان مطلع هر بنگاه نیز نه تنها متاثر از میزان تأخیر زمانی آن بنگاه است، بلکه از تأخیر زمانی بنگاه رقیب نیز تأثیر می‌پذیرد.

اگر دو بنگاه دارای تأخیر زمانی در متغیرهای کنترل خود (مثلاً سرمایه‌گذاری در تلاش برای ارتقای کیفیت محصولات) باشند، بنگاه دارای تأخیر کم‌تر، قادر است تا با تلاش کم‌تر، بهبود بیشتری را در متغیرهای حالت خود (مثلاً ارتقای کیفیت بالاتری) محقق کند. چنانچه فاصله تأخیر بنگاه دارای تأخیر بیشتر، بنگاه رقیب زیاد باشد، باید از ادامه سرمایه‌گذاری در جهت بهبود متغیرهای حالت خود (مثلاً تلاش برای بهبود کیفیت) خودداری کند و چنانچه فاصله تأخیر آن با بنگاه رقیب کم باشد، می‌تواند به تلاش خود در جهت بهبود متغیرهای حالت ادامه دهد. هرچند سرمایه‌گذاری بیشتر و بهبود کم‌تری را در مقایسه با بنگاه رقیب خواهد داشت.

رقابت بین بنگاه‌ها و اتخاذ و تنظیم سیاست‌های کنترلی آنها فقط به پارامترهای سمت بنگاه‌ها وابسته نیست بلکه رفتارها، روحیات و سلایق مصرف‌کنندگان نیز روی این پدیده تأثیر می‌گذارد که می‌بایست در بررسی ساختار بازار و در پیش‌بینی تغییرات

زمانی سهم‌های بار بنگاه‌ها، کنش‌ها و برهم کنش‌های مکرر هر دو طرف تولیدکنندگان و مصرف‌کنندگان در قالب یک مدل جامع مورد ملاحظه قرار گیرد. چنانچه بنگاه‌ها با مصرف‌کنندگانی که کیفیت‌گرا نیستند، مواجه باشند، گرایشی به سرمایه‌گذاری در ارتقای کیفیت نخواهند داشت و متغیرهای کنترل دیگری مانند قیمت، تلاش برای بازاریابی و تبلیغات و تحقیق و توسعه برای کاهش هزینه‌های تولید را فعال خواهند کرد. بررسی تغییرات ساختار بازار با تغییر پارامترهای مختلف بنگاه‌ها و با شرط عدم اطلاع بنگاه‌ها از پارامترهای همدیگر می‌توانند زمینه‌هایی برای پژوهش‌های آینده باشند که عدم اطلاع بنگاه‌ها از پارامترهای همدیگر به نوبه خود بحث بازی‌های دیفرانسیلی تصادفی و تعادل نش حلقه بسته را پیش می‌کشد.

پیوست

الف - توضیح مختصری پیرامون حل مدل بازی دیفرانسیلی ساده و نتایج حل فقط برای متغیرحالت کیفیت و متغیر کنترل متناظر با آن

هامیلتونی برای بازیکن اول به‌صورت زیر خواهد بود.

$$\begin{aligned} H_1 = {} & [p_1(t) - c_1(t)]\dot{s}_1(t) - \dot{c}_1(t)k_1(t) - \dot{q}_1(t)l_1(t) - \dot{y}_1(t)r_1(t) \\ & + \lambda_{11}(t)\big[\alpha_1\big(a_1 - b_1p_1(t) + d_2p_2(t) - s_1(t)\big)\big] \\ & + \lambda_{12}(t)[-\theta_1k_1(t) - \mu_2k_2(t) + \delta_1c_1(t)] \\ & + \lambda_{13}(t)[\omega_1l_1(t) + \varphi_2l_2(t) - \varepsilon_1q_1(t)] + \lambda_{14}(t)[\tau_1r_1(t) - \xi_2r_2(t) \\ & - \eta_1y_1(t)] \end{aligned}$$

برای بازیکن اول معادلات زیر تشکیل و حل می‌شوند.

$$\frac{\partial H_1}{\partial p_1} = \dot{s}_1(t) - \alpha_1b_1\lambda_{11}(t) = 0$$

$$\frac{\partial H_1}{\partial k_1} = -\dot{c}_1(t) - \theta_1\lambda_{12}(t) = 0$$

$$\frac{\partial H_1}{\partial l_1} = -\dot{q}_1(t) + \omega_1\lambda_{13}(t) = 0$$

$$\frac{\partial H_1}{\partial r_1} = -\dot{y}_1(t) + \tau_1\lambda_{14}(t) = 0$$

$$\dot{s}_1(t) = \alpha_1\big(a_1 - b_1p_1(t) + d_2p_2(t) - s_1(t)\big)$$

$$\dot{c}_1(t) = -\theta_1k_1(t) - \mu_2k_2(t) + \delta_1c_1(t)$$

$$\dot{q}_1(t) = \omega_1l_1(t) + \varphi_2l_2(t) - \varepsilon_1q_1(t)$$

$$\dot{y}_1(t) = \tau_1r_1(t) - \xi_2r_2(t) - \eta_1y_1(t)$$

$$\dot{\lambda}_{11}(t) = \rho\lambda_{11}(t) - \frac{\partial H_1}{\partial s_1(t)}$$

$$\dot{\lambda}_{12}(t) = \rho\lambda_{12}(t) - \frac{\partial H_1}{\partial c_1(t)}$$
$$\dot{\lambda}_{13}(t) = \rho\lambda_{13}(t) - \frac{\partial H_1}{\partial q_1(t)}$$
$$\dot{\lambda}_{14}(t) = \rho\lambda_{14}(t) - \frac{\partial H_1}{\partial y_1(t)}$$
$$\lim_{t\to\infty} e^{-\rho t}\lambda_{11}(t) = 0$$
$$\lim_{t\to\infty} e^{-\rho t}\lambda_{12}(t) = 0$$
$$\lim_{t\to\infty} e^{-\rho t}\lambda_{13}(t) = 0$$
$$\lim_{t\to\infty} e^{-\rho t}\lambda_{14}(t) = 0$$

برای بازیکن دوم نیز به طریق مشابه عمل می‌شود.

نتایج حل معادلات فوق برای متغیر حالت کیفیت و متغیرهای الحاقی و کنترل متناسب با آن به‌صورت زیر خواهد بود.

$$q_1(t) = \frac{\omega_1 l_1(t_0)+\varphi_2 l_2(t_0)-q_{10}\varepsilon_1}{\rho+\varepsilon_1}\left(e^{(\rho+\varepsilon_1)(t-t_0)} - 1\right) + q_{10}$$
$$q_2(t) = \frac{\omega_2 l_2(t_0)+\varphi_1 l_1(t_0)-q_{20}\varepsilon_2}{\rho+\varepsilon_2}\left(e^{(\rho+\varepsilon_2)(t-t_0)} - 1\right) + q_{20}$$

توابع مربوط به متغیرهای الحاقی در توابع هامیلتونی مربوط به دو بازیکن نیز به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند.

$$\Lambda_{13}(t) = \frac{\omega_1 l_1(t_0)+\varphi_2 l_2(t_0)-q_{10}\varepsilon_1}{\omega_1} e^{(\rho+\varepsilon_1)(t-t_0)}$$
$$\lambda_{23}(t) = \frac{\omega_2 l_2(t_0)+\varphi_1 l_1(t_0)-q_{20}\varepsilon_2}{\omega_2} e^{(\rho+\varepsilon_2)(t-t_0)}$$

ج- به‌دست آوردن متغیرهای کنترل تلاش (سرمایه‌گذاری) برای حصول سطح کیفیت نسبی

با داشتن متغیرهای الحاقی $\lambda_{13}(t)$ و $\lambda_{23}(t)$ و با تعریف پارامترهای زیر:

$$L_1 = \omega_1\lambda_{13}(t) + \varepsilon_1 q_1(t)$$
$$L_2 = \omega_2\lambda_{23}(t) + \varepsilon_2 q_2(t)$$

متغیرهای کنترل $l_1(t)$ و $l_2(t)$ از طریق روابط زیر قابل محاسبه خواهند بود.

$$l_1(t) = \frac{\omega_2 L_1-\varphi_2 L_2}{\omega_1\omega_2-\varphi_1\varphi_2} \qquad l_2(t) = \frac{\omega_1 L_2-\varphi_1 L_1}{\omega_1\omega_2-\varphi_1\varphi_2}$$

ب- توضیح مختصری پیرامون حل مدل بازی دیفرانسیلی با تأخیر زمانی و نتایج حل فقط برای متغیرحالت کیفیت و متغیر کنترل متناظر با آن

هامیلتونی برای بازیکن اول به‌صورت ذیل خواهد بود.

$$\begin{aligned}H_1 = e^{-\rho t}\{[p_1(t) - c_1(t)]\dot{s}_1(t) - \dot{c}_1(t)k_1(t) - \dot{q}_1(t)l_1(t) - \dot{y}_1(t)r_1(t)\} \\ + \lambda_{11}(t)\left[\alpha_1\left(a_1 - b_1p_1(t) + d_2p_2(t) - s_1(t)\right)\right] \\ + \lambda_{12}(t)[-\theta_1k_1(t - t_{k1}) - \mu_2k_2(t) + \delta_1c_1(t)] \\ + \lambda_{13}(t)[\omega_1l_1(t - t_{l1}) + \varphi_2l_2(t) - \varepsilon_1q_1(t)] + \lambda_{14}(t)[\tau_1r_1(t - t_{r1}) \\ - \xi_2r_2(t) - \eta_1y_1(t)]\end{aligned}$$

اگر u^* بردار کنترل بهینه منتجه در یک حالت بهینه $x^*(t)$ باشد، آن‌گاه مسیر بردار الحاقی $\lambda(t)$ به‌صورتی وجود خواهد داشت که همراه با $x(t)$ و $u(t)$ معادله حالت زیر را برآورده نماید.

$$\begin{aligned}&\dot{x}(t) = \nabla_\lambda H(.) = f(x(t), x(t - h_x), u(t), u(t - h_u), t) \\ &x(t) = \varphi(t), \qquad -h_x \le t \le t_0 \\ &u(t) = \eta(t), \qquad -h_u \le t \le t_0\end{aligned}$$

معادله الحاقی:

$$\begin{aligned}&\dot{\lambda}(t) = -\nabla_x H(.) - \nabla_{x_d} H(., s)\big|_{s=t+h_x}, \qquad t_0 < t < t_f - h_x \\ &= -\nabla_x H(.), \qquad t_f - h_x < t < t_f \\ &\lambda(t_f) = \nabla_{x(t_f)} F(x(t_f), t_f),\end{aligned}$$

و معادله حداکثرسازی:

$$\begin{aligned}&0 = \nabla_u H(.) + \nabla_{u_d} H(., s)\big|_{s=t+h_u}, \qquad t_0 < t < t_f - h_u \\ &= \nabla_u H(.), \qquad t_f - h_u < t < t_f\end{aligned}$$

که x_d و u_d به‌ترتیب بیان کننده $x(t - h_x)$ و $u(t - h_u)$ هستند.

نتایج حل برای متغیر حالت کیفیت

$$q_1(t) = q_{10} + \frac{(\omega_1 u_{l_1}(-t_{l_1}) - \varphi_2 l_2(t_0) - \varepsilon_1 q_{10})}{\varepsilon_1 + \rho}\left(e^{(\varepsilon_1+\rho)(t-t_0)} - 1\right)$$
$$t_0 < t < T - t_{l_1}$$
$$q_1(t) = q_{10} + \left(\frac{\omega_1 u_{l_1}(-t_{l_1}) - \varphi_2 l_2(t_0) - \varepsilon_1 q_{10}}{\varepsilon_1 + \rho}\right)\left(e^{(\varepsilon_1+\rho)(T-t_{l_1}-t_0)} - 1\right)$$
$$T - t_{l_1} < t < T$$

به طریق مشابه $q_2(t)$ را نیز می‌توان به‌دست آورد.

$$q_2(t) = q_{20} + \frac{(\omega_2 u_{l_2}(-t_{l_2}) - \varphi_1 l_1(t_0) - \varepsilon_2 q_{20})}{\varepsilon_2 + \rho}\left(e^{(\varepsilon_2+\rho)(t-t_0)} - 1\right)$$
$$t_0 < t < T - t_{l_2}$$
$$q_2(t) = q_{20} + \left(\frac{\omega_2 u_{l_2}(-t_{l_2}) - \varphi_1 l_1(t_0) - \varepsilon_2 q_{20}}{\varepsilon_2 + \rho}\right)\left(e^{(\varepsilon_2+\rho)(T-t_{l_2}-t_0)} - 1\right)$$
$$T - t_{l_2} < t < T$$

بدون از دست دادن کلیت فرض می‌کنیم که

$$t_0 < T - t_{l_1} < T - t_{l_2} < T$$

در مرحله اول، فرض می‌کنیم که $t_0 < t \le T - t_{l_1}$

در این‌صورت برای مرحله اول خواهیم داشت.

$$L_{11}(t) = \left(\omega_1 u_{l_1}(-t_{l_1}) - \varphi_2 l_2(t_0) - \varepsilon_1 q_{10}\right)\left(1 + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1+\rho}\right) e^{(\varepsilon_1+\rho)(t-t_0)}$$
$$+\varepsilon_1\left(q_{10} - \frac{\left(\omega_1 u_{l_1}(-t_{l_1}) - \varphi_2 l_2(t_0) - \varepsilon_1 q_{10}\right)}{\varepsilon_1+\rho}\right)$$
$$L_{21}(t) = \left(\omega_2 u_{l_2}(-t_{l_2}) - \varphi_1 l_1(t_0) - \varepsilon_2 q_{20}\right)\left(1 + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_2+\rho}\right) e^{(\varepsilon_2+\rho)(t-t_0)}$$
$$+\varepsilon_2\left(q_{20} - \frac{\left(\omega_2 u_{l_2}(-t_{l_2}) - \varphi_1 l_1(t_0) - \varepsilon_2 q_{20}\right)}{\varepsilon_2+\rho}\right)$$

برای مرحله اول یعنی بازه زمانی $t_0 < t < T - t_{l1}$ ،$l_{11}(t)$ و $l_{21}(t)$ را به‌صورت زیر خواهیم داشت:

$$l_{11}(t) = \frac{1}{\varphi_1}\left(\omega_2 u_{l_2}(-t_{l_2}) - L_{21}(t_0)\right)\left(\frac{\varphi_1}{\omega_1}\left(\frac{L_{11}(t_0)+\varphi_2 u_{l_2}(t_0)}{\omega_2 u_{l_2}(-t_{l_2}) - L_{21}(t_0)}\right)\right)^{-\left(\frac{t-t_0}{t_{l_1}}\right)}$$
$$l_{21}(t) = \frac{1}{\varphi_2}\left(\omega_1 u_{l_1}(-t_{l_1}) - L_{11}(t_0)\right)\left(\frac{\varphi_2}{\omega_2}\left(\frac{L_{21}(t_0)+\varphi_1 u_{l_1}(t_0)}{\omega_1 u_{l_1}(-t_{l_1}) - L_{11}(t_0)}\right)\right)^{-\left(\frac{t-t_0}{t_{l_2}}\right)}$$

در مرحله دوم، فرض می‌کنیم که $T - t_{l_1} < t \leq T - t_{l_2}$ در این‌صورت

$$L_{12} = \varepsilon_1\left(q_{10} + \left(\frac{\omega_1 u_{l_1}(-t_{l_1}) - \varphi_2 l_2(t_0) - \varepsilon_1 q_{10}}{\varepsilon_1+\rho}\right)\left(e^{(\varepsilon_1+\rho)(T-t_{l_1}-t_0)} - 1\right)\right)$$
$$L_{22}(t) = \left(\omega_2 u_{l_2}(-t_{l_2}) - \varphi_1 l_1(t_0) - \varepsilon_2 q_{20}\right)\left(1 + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_2+\rho}\right) e^{(\varepsilon_2+\rho)(t-t_0)}$$
$$+\varepsilon_2\left(q_{20} - \frac{\left(\omega_2 u_{l_2}(-t_{l_2}) - \varphi_1 l_1(t_0) - \varepsilon_2 q_{20}\right)}{\varepsilon_2+\rho}\right)$$

بنابراین برای مرحله دوم یعنی بازه زمانی $T - t_{l1} < t < T - t_{l2}$ ،$l_{12}(t)$ و $l_{22}(t)$ را به‌صورت زیر خواهیم داشت:

$$l_{12}(t) = l_{11}(T - t_{l1})\left(\frac{L_{12} + \varphi_2 l_{21}(T-t_{l1})}{\omega_1 l_{11}(T-t_{l1})}\right)^{-\left(\frac{t+t_{l1}-T}{t_{l1}}\right)}$$
$$l_{22}(t) = l_{21}(T - t_{l1})\left(\frac{L_{22}(T-t_{l1}) + \varphi_1 l_{11}(T-t_{l1})}{\omega_2 l_{21}(T-t_{l1})}\right)^{-\left(\frac{t+t_{l1}-T}{t_{l2}}\right)}$$

در مرحله سوم، فرض می‌کنیم که $T - t_{l_2} < t \leq T$ در این‌صورت

$$L_{13} = \varepsilon_1\left(q_{10} + \left(\frac{\omega_1 u_{l_1}(-t_{l_1}) - \varphi_2 l_2(t_0) - \varepsilon_1 q_{10}}{\varepsilon_1+\rho}\right)\left(e^{(\varepsilon_1+\rho)(T-t_{l_1}-t_0)} - 1\right)\right)$$
$$L_{23} = \varepsilon_2\left(q_{20} + \left(\frac{\omega_2 u_{l_2}(-t_{l_2}) - \varphi_1 l_1(t_0) - \varepsilon_2 q_{20}}{\varepsilon_2+\rho}\right)\left(e^{(\varepsilon_2+\rho)(T-t_{l_2}-t_0)} - 1\right)\right)$$

بنابراین برای مرحله سوم یعنی بازه زمانی $T - t_{l2} < t < T$، $l_{23}(t)$ و $l_{13}(t)$ را به‌صورت زیر خواهیم داشت:

$$l_{13}(t) = l_{12}(T - t_{l2}) \left(\frac{L_{13}+\varphi_2 l_{22}(T-t_{l2})}{\omega_1 l_{12}(T-t_{l2})}\right)^{-\left(\frac{t+t_{l2}-T}{t_{l1}}\right)}$$
$$l_{23}(t) = l_{22}(T - t_{l2}) \left(\frac{L_{23}+\varphi_1 l_{12}(T-t_{l2})}{\omega_2 l_{22}(T-t_{l2})}\right)^{-\left(\frac{t+t_{l2}-T}{t_{l2}}\right)}$$

منابع

1. Ardalan, K. (2007). Markets: a paradigmatic look. International Journal of Social Economics, 34, 943–960.
2. Bianca. C., Ferrara. M., & Guerrini. L. (2013). The Time Delays' Effects on the Qualitative Behavior of an Economic Growth Model. Journal of Abstract and Applied Analysis. 2013, Article ID 901014, 10 pages
3. Case, J. H. (1979). Economics and the Competitive Process. New York University Press.
4. Chiarella, C., Kopel, M., Bischi, G. I., & Szidarovszky, F. (2010). Nonlinear Oligopolies Stability and Bifurcations. Springer-Verlag.
5. Chintagunta, P. K., & Rao, V. R. (1996). Pricing strategies in a dynamic duopoly: A differentialgame model. Informs Management Science, 42, 1501–1514.
6. Dana, Y. F., & Fong, Jr. J. D. (2011). Product quality, reputation, and market structure. International Economic Review, 52, 1059–1076.
7. Dockner, E., & Jorgensen, S. (1988). Optimal pricing strategies for new productsin dynamic oligopolies. Informs Marketing Science, 7, 315–334.
8. Dragone, D., Lambertini, L., Leitmann, G., & A. Palestini. (2015). Hamiltonian potential functions for differential games. Automatica, 62, 134–138.
9. Erickson, G. M. (2007). Differential games in marketing science. Informs Tutorials in Operations Research, 62–78.
10. Erickson, G. M. (2009). Advertising competition in a dynamic oligopoly with multiple brands. Inform Operations Research, 57, 1106–1113.
11. Fruchter, G. E. (1999). The many-player advertising game. Informs Management Science, 45, 1609–1611.
12. Isaacs, R. (1975). Differential games. Robert E. Krieger Publishing Company.
13. Jorgensen, S. (1982). A differential games solution to a logarithmic advertising model. The Journal of the Operational Research Society, 33, 425–432.
14. Jorgensen, S., Van Long, N., Dockner, E., & Sorger, G. (2000). Differential Games in Economics and Management Science. Cambridge University Press.

15. Jorgensen, S., & Zaccour, G. (2004). Differential games in marketing. Springer Science + Business Media, LLC.
16. Jorgensen, S., & Zaccour, G. (2014). A survey of game-theoretic models of cooperative advertising. European Journal of Operational Research, 237, 1–14.
17. Lambertini, L., Cellini, R., & Leitmann, G. (2003). Advertising in a differential oligopoly game. Journal of Optimization Theory and Applications, 116, 61–81.
18. Lambertini, L. (2010). Oligopoly with hyperbolic demand: A differential game approach. Journal of Optimization Theory and Applications, 145, 108–119.
19. Ledvina, A., & Sircar, R. (2011). Dynamic bertrand oligopoly. Applied Mathematics and Optimization, 63, 11–44.
20. Malek-Zavarei. M., & Jamshidi. M. (1987). Time delay Systems, Analysis, Optimization and Applications – North-Holland Systems and Control Series.
21. Matsumoto A., & Szidarovszky F. (2010). Delay Differential Nonlinear Economic Models. In: Bischi G., Chiarella C., Gardini L. (eds) Nonlinear Dynamics in Economics, Finance and Social Sciences. Springer, Berlin, Heidelberg. 195-214.
22. Mukhopadhyay, S. K., & Kouvelis, P. (1997). A differential game theoretic model for duopolistic competition on design quality. Operations Research, 45, 886–893.
23. Nakao, T. (1983). Profitability, market share, product quality and advertising in oligopoly. Journal of Economic Dynamics and Control, 6, 153–171.
24. Prasad, A., Naik, P. A., & Sethi, S. P. (2008). Building brand awareness in dynamic oligopoly markets. Informs Management Science, 54, 129–138.
25. Robinson. S. (2013). CONCEPTUAL MODELING FOR SIMULATION, Proceedings of the 2013 Winter Simulation Conference
26. Sbragia, L., Bischi, G. I., & Szidarovszky, F. (2008). Learning the demand function in a repeated cournot oligopoly game. International Journal of Systems Science, 39, 403–419.
27. Shy, O. (1995). Industrial Organization Theory and Applications – The MIT Press.
28. Thompson, G. L., & Sethi, S. P. (2000). Optimal Control Theory Applications to Management Science and Economics. Springer-Verlag.