

## شبیه سازی عددی جریان با روش حجم محدود بی سازمان

ابوالفضل شمسائی<sup>۱\*</sup>، حمید رضا وثوقی فر<sup>۲</sup>

۱- استاد دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی شریف

۲- استادیار دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه آزاد اسلامی واحد جنوب-تهران

\* تهران، صندوق پستی ۹۵۱۷-۱۱۳۶۵

Shamsai@sharif.edu

(دریافت مقاله: مهر ۱۳۸۲، پذیرش مقاله: اسفند ۱۳۸۴)

**چکیده-** در این مقاله، روش منفصل سازی معادلات جریان در شبکه‌های نامنظم ارائه شده است. برای بررسی این شبکه‌ها، متغیرهای عددی در مرکز حجمها و مؤلفه‌های نرمال برداری در نقاط مرکزی صفحه‌های مرزی، قرار داده شده است. شار جریان از تقریبهای تفاضل مرکزی یا از تقریب متکی بر بالادست به دست آمده است. از نظر زمان و حافظه کامپیوتری مورد نیاز، اثبات شده که شبکه‌های نامنظم نسبت به شبکه‌های منظم کارایی بیشتری دارند. شبکه‌های نامنظم مزیت ترمیم و اصلاح موضعی را نیز دارند. به وسیله الگوریتم ارائه شده، مسائل ایستایی و جنبشی را می‌توان حل کرد. مقایسه عددی بین استفاده از شبکه‌های ساختار یافته و بی‌سازمان در محاسبه عمق جریان در اطراف اپی کانال نشان می‌دهد که شبکه‌های بی‌سازمان دقت مناسبی دارند. برای محاسبه سرعت افقی جریان در اطراف اپی نیز- بویژه در حالتی که ارتفاع در نظر گرفته شده به سطح آب نزدیک می‌شود- دقت شبیه‌سازی با شبکه‌های بی‌سازمان مناسب ارزیابی می‌شود. در این حالت، خطا نسبت به اطلاعات ثبت شده در آزمایشگاه حدود ۲/۵ درصد است.

**کلید واژگان:** معادله اولر، شبکه ساختار نیافته، تقریب متکی بر بالادست.

## ۱- مقدمه

شبکه‌های بی‌سازمان، نخستین بار توسط پتر لیجین دیریکله<sup>۱</sup> در سال ۱۸۵۰ ارائه شد. بعد از گذشت نیم قرن ورنوی<sup>۲</sup> این شبکه‌ها را اصلاح کرد. از آن پس محققان بسیاری از چند ضلعیهای بی‌سازمان، در زمینه‌های مختلف از جمله هواشناسی، جغرافیا و فیزیک استفاده کردند [۱]. سیدل<sup>۳</sup> نشان داد که برای بررسی شبکه‌های بی‌سازمان متغیرهای عددی در مرکز حجمهای و مؤلفه‌های نرمال برداری در نقاط میانی رویه قرار می‌گیرند [۲]. شار

جریان از تقریبهای تفاضل مرکزی<sup>۴</sup>، متکی بر بالادست<sup>۵</sup> و هایبرید بدست می‌آید. از نظر زمان و حافظه کامپیوتری مورد نیاز، اثبات شده که شبکه‌های نامنظم نسبت به شبکه‌های منظم کارایی بیشتری دارند [۳]. شبکه‌های نامنظم مزیت ترمیم و اصلاح موضعی را نیز دارند. اصلاح موضعی، در مناطقی که مورد نیاز باشد، شبکه را اصلاح می‌کند. در شبکه‌های منظم اصلاح موردی شبکه، بسیار مشکل است. استفاده از هر نوع منفصل سازی، به معادلات جداسازی وزن- فشار منتهی می‌شود. برای اصلاح این روشها از درونیابی ارائه شده توسط رای و

4. Central differencing  
5. Upwind

1. Peter Lijeune Dirichlet  
2. Voronoi  
3. Seidel

استفاده می‌شود. سایر متغیرها معانی خاص داشته و برای آنها از روابط مشخصی استفاده می‌شود. سیستم معادلات به وسیله معادلات فشار با یکدیگر ترکیب می‌شوند:

$$P = \frac{\gamma - 1}{\gamma} [\rho g H - \frac{1}{2} \rho (u^2)]$$

## ۲-۱- روند حل معادلات اولر

برای حل معادلات اولر، سیستم حل همزمانی وجود دارد. برای حل، متغیرهای اولیه که در اینجا متغیرهای  $m$ ,  $\rho$ ,  $\rho H$  هستند، بررسی می‌شوند. با استفاده از تقریب تفاضل مرکزی یا تقریب متکی بر بالادست، برای هر یک از معادلات انتقال، روشهای ساده‌تری به دست می‌آید. حل معادلات زنجیری در حوضه‌های جریان تراکم ناپذیر و معادلات آب کم عمق معمولی رایج است. جامسون<sup>۲</sup>، تارکل<sup>۳</sup> و اشیمت<sup>۴</sup> در این رابطه طرحهایی تحقیقاتی ارائه کرده‌اند [۹]. برای انتگرال‌گیری زمانی از روش ضمنی یا صریح اولر با این فرض که بردارهای حل در تراز زمان  $n$  وجود داشته باشند، استفاده می‌شود. روش حل در تراز دو بعدی زمان در مراحل ذیل انجام می‌شود [۱۰]. با استفاده از معادلهٔ ممتوم منفصل شده و مقادیر  $\rho^n$ ,  $m^n$ ,  $u^n$ ، مقدار  $m^{n+1}$  به دست می‌آید. سپس با استفاده از معادلهٔ پیوستگی منفصل شده و مقادیر  $\rho^n$ ,  $m^{n+1}$ ، مقدار  $\rho^{n+1}$  محاسبه می‌شود. با استفاده از معادلهٔ انرژی منفصل شده و مقادیر  $(\rho H)^n$ ,  $m^{n+1}$ ,  $\rho^{n+1}$  مقدار  $(\rho H)^{n+1}$  محاسبه می‌شود.

## ۲-۲- محل اصلاح متغیرهای نامشخص

شکل ۱، شبکهٔ اصلاح شده را نشان می‌دهد. در این شکل متغیرهای اسکالر در مرکز حجمها مشخص شده است. بردارهای ممتوم، موازی با بردارهای عمود رویهٔ المان در مرکز حجم قرار می‌گیرند. جانمایی ذکر شده،

چاوا<sup>۱</sup> استفاده می‌شود [۴]. برای محاسبه جریانهای تراکم ناپذیر، معمولاً از روشهای اصلاح شده استفاده می‌شود. روشهای اصلاح شده در جریانهای تراکم ناپذیر، کارایی بسیار مناسبی دارند [۵]. برای شبیه‌سازی انتقال، پخش، انحلال و جذب در محیطهای چندگانه، روش حجم محدود توسط محققان ارائه شده است. این روش برای حجمهای چهارگوش یا مثلثی نیز ارائه شده است. در صورت ارائهٔ مدلی برای کاربرد شبکه‌های بی‌سازمان حجم محدود، این روش توانایی بسیار زیادی در شبیه‌سازی انواع محیطهای خاص دارای شرایط مرزی و شکل بسیار پیچیده را خواهد داشت. با توجه به اینکه در دیگرام ورنوی، تعریف نقاطی که اهمیت بیشتری دارند، بسیار آسان است [۶]، بنابراین روش حجم محدود که شبکه‌های بی‌سازمان در آن به کار برده شده باشد، تأثیر وزنی نقاط را به آسانی شبیه‌سازی می‌کند. پس از برآورده شدن نتیجهٔ تحقیق برای هر محدودهٔ پیچیده، از شبکه‌بندی ورنوی می‌توان استفاده کرد. این کار، دقت محاسبات را بسیار بالا برده و حافظهٔ کمی را از کامپیوتر اشغال می‌کند. البته باید به محدودیتهای شبکه‌بندی بی‌سازمان نیز توجه داشت [۷]. در این شبکه‌ها مرزها و المانهای مرزی در اشکال پیچیده براحتی تعریف می‌شود. بنابراین حجم محاسبات بسیار کاهش یافته و لذا خطاهای عددی نیز کاهش می‌یابد [۸].

## ۲- منفصل‌سازی معادلات اولر در شبکه‌های

### ساختار نیافتهٔ اصلاح شده

معادلات اولر دوبعدی چنین است:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot u p &= 0 \\ \frac{\partial \rho E}{\partial t} + \nabla \cdot u (\rho H) &= 0 \\ \frac{\partial m^\alpha}{\partial t} + (u^\beta m^\alpha)_{,\beta} &= -P \end{aligned} \quad (1)$$

$m = (m^x, m^y)$  بردار ممتوم‌ها و  $u = (u^x, u^y)$  بردار سرعتها

است. در معادلهٔ ممتوم از قاعدهٔ جمع انتقال انشتین

2. Jameson  
3. Turke  
4. Schmidt

1. Rhie & Chow

$$U_e = (u_e, N_e)$$

$$\bar{L}_e = L_e(n_e, N_e)$$

در رابطه فوق،  $L_e$  طول رویه است. مقدار سرعت ( $U_e$ ) در حجم محدود مشخص می‌شود. بنابراین به درونیابی نیاز نیست. این مقدار با استفاده از رابطه ممتوم در تراز جدید زمانی و مقدار سرعت از تراز قدیم زمانی، محاسبه می‌شود ( $U_e = m_e^{n+1} / \rho_{e,av}^n$ ). با استفاده از درونیابی وزنی به دست می‌آید. برای مثال با توجه به حالت ترسیم شده در شکل ۲، این متغیر از رابطه ۳ محاسبه می‌شود:

$$\rho_{1,av} = \frac{\Omega_i}{\Omega_i + \Omega_j} \rho_i + \frac{\Omega_j}{\Omega_i + \Omega_j} \rho_j \quad (3)$$

با درونیابی مرکزی، چگالی ( $\rho$ ) از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\rho_1 = \frac{1}{2}(\rho_i + \rho_j)$$

به طور مشابه، روابطی را برای بقیه حجمهای کنترل ( $\rho_2$  و  $\rho_3$ ) برای محاسبه چگالی می‌توان ارائه کرد. برای محاسبه مشتقات انتقال، ولدمن<sup>۴</sup> و رینزما<sup>۵</sup> روابط مورد نیاز را ارائه کرده‌اند.

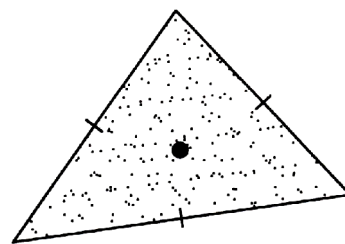
### ۲-۴- منفصل سازی دوبعدی شبکه‌های ساختار نیافته برای معادلات انرژی

معادله انرژی به عنوان یک معادله تکمیلی برای  $\rho H$  در نظر گرفته می‌شود. با انجام عملیات مشابه در حجم کنترل توصیف شده در قسمت قبل، معادله پخش انرژی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\Omega_i \frac{(\rho E)_i^{n+1} - (\rho E)_i^n}{\Delta t} + \sum_e u_e (\rho H)_e \bar{L}_e = 0 \quad (4)$$

سرعت  $U_e$  از روابط چگالی و ممتوم در تراز جدید زمانی به دست می‌آید.

مشابه روش اصلاح شده کلاسیک است. روشهای کلاسیک توسط هارلو<sup>۱</sup> و ولج<sup>۲</sup> [۱۱]، برای شبکه‌های منظم با شکل‌های چهار وجهی مطرح و ارائه شده است. این راهکار توسط ونکر<sup>۳</sup> نیز استفاده شده است [۱۲]. در هر رویه  $e$ ، دو بردار عمود واحد وجود دارد. یکی از این بردارها در راستای رویه و دیگری در جهت مخالف آن است. به وسیله روشهای مناسب در هر رویه یکی از این بردارها انتخاب می‌شود. بردار انتخاب شده، بردار یکه نامیده می‌شود.



شکل ۱ شبکه اصلاح شده بی‌سازمان

### ۲-۳- منفصل سازی معادله پیوستگی در شبکه ساختار نیافته دو بعدی

معادله پیوستگی به عنوان نوعی معادله چگالی در نظر گرفته می‌شود. انتگرال‌گیری بر روی حجم کنترل  $T_i$  در محدوده در نظر گرفته شده در شکل (۲)، به صورت رابطه زیر توصیف می‌شود.

$$\int_{T_i} \frac{\partial P}{\partial t} dx + \int_{T_i} \nabla \cdot u p dx = \frac{d}{dt} \int_{T_i} p dx + \oint_{\partial T_i} (u \cdot n_e) p dT \approx \Omega_i \frac{\rho_i^{n+1} - \rho_i^n}{\Delta t} + \sum_{e=1}^3 u_e \rho_e \quad (2)$$

در رابطه فوق  $n_e$  بردار عمود و جهت آن به سمت خارج مرز  $\partial T_i$  است.  $n$  و  $n+1$  که به صورت شاخص درج شده‌اند، به تراز زمانی خاص اشاره میکنند. مساحت مثلث در نظر گرفته شده  $\Omega_i$ ، مجموع سه رویه مثلث  $e$  و سرعت عمود چنین توصیف می‌شود:

1. Harlow
2. Welch
3. Wenneker

4. Veldman  
5. Rinzema

$$\int_{T_i} (u^\beta m^\alpha N_i^\alpha), \beta dx = \int_{T_i} \nabla \cdot [u(m.N_i)] dx = \int_{\partial T_i} (u.n)(m.N_i) d\Gamma \quad (6)$$

$$\approx \sum_e (U_e.n_e)(m_e.N_i)L_e = \sum_e u_e(m_e.N_i)L_e$$

در ادامه از قانون گوس استفاده می‌شود. در این قانون، اثر حجمها در رویه e در نظر گرفته شده است. نتایج مطالب ذکر شده، در معادله ممتوم منفصل شده زیر ارائه می‌شود:

$$\Omega_i = (\Omega_1 + \Omega_2)$$

$$\Omega_i \frac{m_i^{n+1} - m_i^n}{\Delta t} + \sum_e u_e(m_e.N_i)L_e = -\Omega_i(\nabla P.N)_i$$

در بخش انتقال از وابستگی خطی پیکارد استفاده شده است. مقدار U<sub>e</sub> از معادلات ممتوم و سرعت در تراز زمانی قبل محاسبه می‌شود. در منفصل‌سازی، جابه‌جایی از طریق روند بازسازی تعریف می‌شود. با در نظر گرفتن بردار مماس (t<sub>k</sub>) در حجم کنترل k، تحلیلی در ارتباط با ضریب بازسازی ξ<sub>k</sub> مطابق رابطه زیر ارائه می‌شود:

$$t_k = \xi_i N_i + \xi_j N_j$$

$$t_k = \xi_v N_v + \xi_w N_w$$

$$\text{بردار ممتوم در رویه } k \text{ از رابطه زیر محاسبه می‌شود:}$$

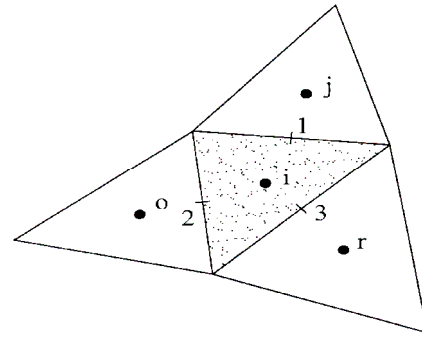
$$m_k = m_k N_k + \tilde{m}_k t_k \quad (7)$$

در رابطه فوق  $\tilde{m}_k$  مولفه مماسی و  $m_k$  مولفه عمود ممتوم است. در صورت در نظر گرفتن تقریب درجه اول متکی بر بالادست، ممتوم از رابطه زیر محاسبه می‌شود. در این رابطه جهت جریان از حجم کنترل ۱ بسط ۳ است.

$$\tilde{m}_k \cong m_k t_k = m_k \cdot (\xi_i N_i + \xi_j N_j) \approx \xi_i m_i + \xi_j m_j \quad (8)$$

برای محاسبه عددی گرادیان فشار  $(\nabla P.N)_i$  از انتگرال‌گیری بر روی مسیری که در روابط قبل مطرح شده، استفاده می‌شود. اساس این رابطه بر ایجاد تقریبی از بردار گرادیان فشار  $(\nabla P)_i$  استوار است. انتگرال‌گیری بر روی منحنی از گرادیان فشار، مطابق رابطه زیر تعریف می‌شود [۱۴]:

$$P_b - P_a = \int_a^b \nabla p \cdot dx \quad (9)$$



شکل ۲ حجم کنترل برای متغیرهای اسکار در حجم کنترل i

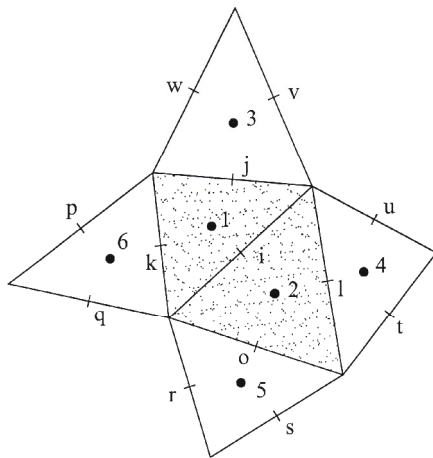
روش کار مشابه روش ارائه شده در قسمتهای قبل است. پخش انرژی جابه‌جا شده در معادله پیوستگی، مشابه پخش چگالی است. برای حل رابطه ۴ مقدار اولیه  $(\rho H)_i^{n+1}$  به صورت رابطه زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$(\rho E)_i = \frac{1}{\gamma} (\rho H)_i + \frac{\gamma - 1}{2\gamma} \rho_i (u.u)_i \quad (5)$$

## ۲-۵- منفصل‌سازی معادلات ممتوم در شبکه‌های ساختار نیافته دوبعدی

مؤلفه ممتوم موازی با بردار عمود رویه حجم کنترل است. روش ذکر شده، با روش متداولی که در آن هر نقطه از شبکه برای مؤلفه‌های X و Y ممتوم، تعریف می‌شود، متفاوت است. بیشتر روشهای ارائه شده، مانند روشهای آسم<sup>۱</sup>، روش کیوس<sup>۲</sup> و روش جانسون، جریان را به صورت مؤلفه عمود ممتوم ( $m_i = (m_i.N_i)$ ) در رویه (i) در نظر می‌گیرند. دو مثلث مجاور رویه (i) نیز جزو این حجم کنترل محسوب می‌شوند (شکل ۳). سپس رابطه‌ای برای  $m_i$  با استفاده از رابطه ممتوم و تقریب  $N_i^\alpha$  بر روی منحنی در نظر گرفته شده  $(T_i)$ ، به دست می‌آید. بردار عمود که به سمت بیرون و مربوط به سطح  $T_i$  است، به صورت  $n_e$  تعریف می‌شود. با توجه به مطالب ذکر شده، جابه‌جایی با رابطه زیر توصیف می‌شود [۱۳]:

1. Ausm  
2. Cusp



شکل ۳ حجم کنترل در نظر گرفته شده برای بردار عمود ممتوم در رویه  $\hat{i}$  که به صورت هاشور مشخص شده است.

### ۳- مطالعه موردی

به عنوان مطالعه موردی، جریان سه بعدی غیر قابل تراکم در اطراف اپی انتخاب شد. این جریان توسط رابطه رینولدز تحلیل می شود. در معادلات ممتوم، فشار به دو بخش هیدرو استاتیک و دینامیک مطابق رابطه زیر تقسیم می شود:

$$P = P_s + P_d \quad (13)$$

$$P_s = \rho g (H(x, y, t) - z) + P_{atmosphere}$$

معادلات ترکیبی تقریب بوسینسک با معادله آشفنگی مرتبه اول به صورت رابطه زیر، بیان می شود:

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -g \frac{\partial H}{\partial x_i} (1 - \delta_{iz}) - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P_d}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (v + v_i) \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right] - \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} g \delta_{iz} \quad (14)$$

معادلات به صورت ترکیبی با مدل آشفنگی  $k-\epsilon$  در نظر گرفته شده است. تحلیل رابطه ۱۴ با دیوارهای مرزی را رودی<sup>۱</sup> در سال ۱۹۸۰ انجام داد [۱۵]. الگوریتم حل ساده<sup>۲</sup> و تقریب ترکیبی برای انجام مطالعات در نظر گرفته شده است. برای حل معادلات جریان آزاد در سال ۱۹۸۹ روش

رابطه فوق به صورت رابطه زیر منفصل سازی می شود:

$$(\nabla p \cdot N)_i = \sum_{j=1}^6 \gamma_j P_j \quad (10)$$

در شبکه های منظم، نقطه مرکزی حجم  $(i)$  در مجاورت خطوط  $x_2, x_1$  قرار می گیرد. رابطه زیر به تنهایی برای محاسبه  $(\nabla p)_i$  کافی نیست. رابطه ۱۱ با توجه به در نظر گرفتن مسیرهای متفاوت، تنظیم شده است:

$$P_3 - P_6 + P_4 - P_5 \cong \nabla_{pi} \cdot (x_3 - x_6 + x_4 - x_5) \quad (11)$$

با حل سیستم حاصل از روابط ۸ تا ۱۱، گرادیان فشار  $(\nabla p)_i$  منفصل سازی و سپس مشخصات داخلی مربوط به بردار  $N_i$  محاسبه می شود. برای محاسبه ضریب گرادیان  $\gamma_j$ ، روابط ذیل تعریف می شوند.

$$x_j = (x_j, y_j), \quad a_{11} = x_2 - x_1$$

$$a_{21} = x_3 - x_6 + x_4 - x_5$$

$$N_i = (N_x, N_y), \quad a_{12} = y_2 - y_1$$

$$a_{22} = y_3 - y_6 + y_4 - y_5$$

با معرفی روابط و متغیرهای فوق، ضرایب گرادیان به صورت رابطه زیر تعریف می شود.

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \frac{a_{21} N_y - a_{22} N_x}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}},$$

$$\gamma_3 = \gamma_4 = \gamma_5 = -\gamma_6 = \frac{a_{11} N_y - a_{12} N_x}{a_{22} a_{2z} - a_{1z} a_{21}} \quad (12)$$

اگر بردار  $(x_2 - x_1)$  با بردار  $N_i$  موازی باشد، شرایط ویژه ای به وجود می آید. در این حالت انتگرال گیری بر روی مسیر، به صورت زیر تعریف می شود:

$$(\nabla p \cdot N)_i = \frac{P_2 - P_1}{|x_2 - x_1|}$$

اگر در شکل ۳ تعدادی از حجمها حذف شوند، برای تطبیق مسیرها در روابط ۱۰ و ۱۱ باید اصلاحاتی انجام شود:

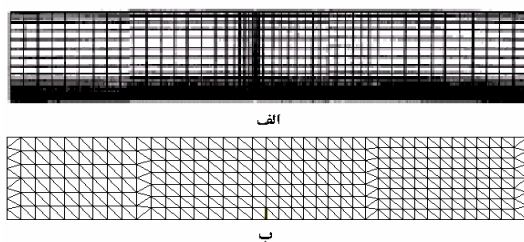
$$P_b - P_a \cong (\nabla p)_{ab} \cdot (x_b - x_a)$$

1. Rodi  
2. Simple

پیشنهاد کلیک و رودی در معادلات آشفتگی  $k-\epsilon$  مد نظر قرار می‌گیرند. برای محاسبه مقدار  $W_s$  شرایط جنبشی معادله زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\frac{\partial H}{\partial t} + U_x \frac{\partial H}{\partial x} + V_x \frac{\partial H}{\partial y} = W_s \quad (15)$$

در روند حل به‌جای معادله پیوستگی موضعی، معادله عمق پیوستگی (رابطه ۱۵) استفاده می‌شود. در ورودی به بازه در نظر گرفته شده، شرایط مرزی مطابق شرایط آزمایشگاهی تنظیم می‌شود. انرژی آشفتگی جنبشی  $k$  برابر  $U^2 \cdot 0.02$  در نظر گرفته شده است. در خروجی، ارتفاع آب  $22/86$  سانتیمتر ثابت مد نظر قرار می‌گیرد. مقدار ذکر شده با توجه به گزارشهای آزمایشها و بنابر متوسط ارتفاع  $23$  سانتیمتر در بازه، انتخاب شده است. برای بقیه موارد، شرایط نیومن مد نظر قرار گرفته است. حداکثر ارتفاع زبری بستر برابر  $3$  میلی‌متر است. برای مدلسازی عددی بازه در نظر گرفته شده، دو نوع شبکه‌بندی مد نظر قرار گرفته است. شکل ۵-الف شبکه‌بندی منظم را که ولیون و دارتوس در سال ۱۹۹۷ در نظر گرفته اند نشان می‌دهد [۱۷]. شکل ۵-ب حجم‌بندی ناحیه ذکر شده را با شبکه‌های بی‌سازمان نشان می‌دهد.



شکل ۵ شبکه‌بندی در نظر گرفته شده برای انجام محاسبات عددی. الف- شبکه‌بندی ساختار یافته ب- شبکه‌بندی بی‌سازمان

### ۳-۳- مدلسازی عددی

پس از انجام مدلسازی عددی، نتایج به‌صورت منحنیهای هم‌ارتفاع و هم‌سرعت ارائه شده است. شکل ۶ ارتفاع آب

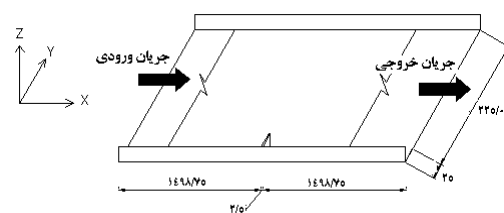
جدید HH-Simple توسط زیو و زهانگ<sup>۱</sup> ارائه شده است [۱۶]. به‌وسیله این روش، معادله غیر هیدرواستاتیک ۱۴ با ارتفاع سطح آب  $H$ ، از طریق معادلات فشار و ممتوم محاسبه می‌شود:

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\alpha(H-z_0)\bar{U}}{\partial x} + \frac{\alpha(H-z_0)\bar{V}}{\partial y} = W(z_0)$$

در رابطه فوق  $\bar{U}$ ،  $\bar{V}$  بترتیب متوسط سرعت افقی و عمودی و  $W(z_0)$  سرعت عمودی در محل تلاقی با بستر است.

### ۳-۱- اطلاعات مورد نیاز برای آزمایش عددی

مدلی آزمایشگاهی به طول  $30$  متر، عرض  $2/5$  متر با دیوارهای صاف در نظر گرفته شده است. برای ایجاد شرایط آزمایشگاهی با عدد مانینگ  $0.02$ ، کف مدل با شبکه‌ای فلزی پوشیده شده است. اپی در نظر گرفته شده، طول  $25$  سانتیمتر و عرض  $2/5$  سانتیمتر دارد. مدل ذکر شده در آزمایشگاه هیدرولیک دلفت<sup>۲</sup> در مؤسسه فرانسیس و آزمایشگاه مکانیک سیالات کاربردی در دانشگاه هانور مدلسازی شده است. شکل ۴ مقطعی از کانال را که در آزمایشگاه مدل شده نشان می‌دهد.

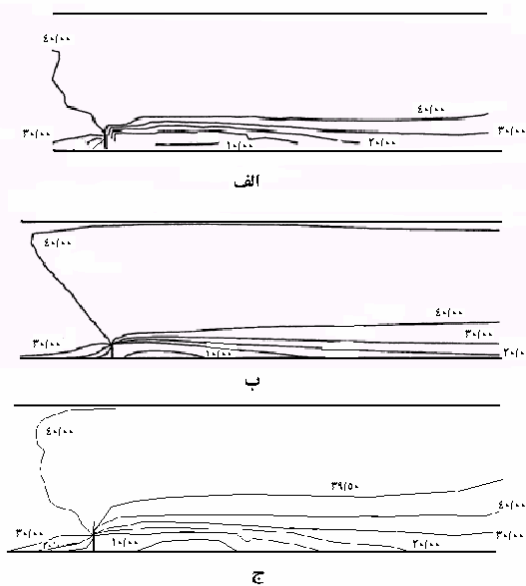


شکل ۴ ابعاد بازه ای در نظر گرفته شده برای آزمایش

### ۳-۲- شرایط مرزی و اولیه

در شرایط جریان آزاد، مؤلفه افقی سرعت  $U_s$  و مؤلفه عمودی سرعت  $V_s$  به‌وسیله معادلات رینولدز محاسبه می‌شوند. فشار هیدرواستاتیک شبیه شرایط مرزی، به

1. Zhuo & Zhang  
2 Delft



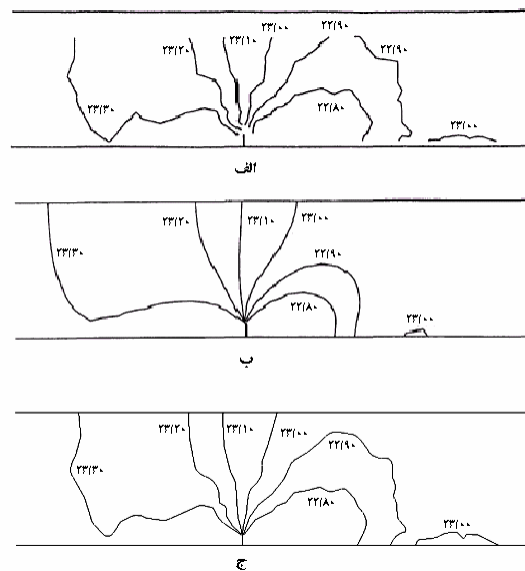
شکل ۷ مؤلفه افقی هم‌سرعت در ارتفاع ۵ سانتیمتری در اطراف اپی، الف- اطلاعات ثبت شده در آزمایشگاه، ب- مقادیر عددی شبکه‌های ساختار یافته [۱۷]، ج- مقادیر عددی شبکه‌های بی‌سازمان

#### ۴- بحث

شکل ۶ نشان می‌دهد که در صورت استفاده از شبکه‌های ساختار یافته، حدود ۵ درصد خطا در محاسبات عددی ایجاد می‌شود. در صورت استفاده از شبکه‌های بی‌سازمان میزان خطا تا حدود ۰/۵ درصد کاهش می‌یابد. شکل ۷ و ۸ نحوه تغییر پروفیل سرعت را از کف به سمت قسمت بالای اپی نشان می‌دهند. خطای مدلسازی با شبکه‌های ساختار یافته در عمق ۵ سانتیمتری، در حدود ۱۲ درصد است. در این حالت استفاده از شبکه‌های بی‌سازمان، خطا را تا حدود ۲/۵ درصد کاهش می‌دهد. خطا در ارتفاع ۱۷ سانتیمتری در صورت استفاده از شبکه‌های ساختار یافته، در حدود ۲۱ درصد است.

شکل ۸- ج نشان می‌دهد که در صورت استفاده از شبکه‌های بی‌سازمان، میزان خطا به حدود ۲/۵ درصد کاهش می‌یابد. استفاده از شبکه‌های ساختار نیافته، موجب می‌شود که بتوان هر محدوده‌ای را، با هر گونه پیچیدگی به آسانی مدلسازی کرد. بنابراین استفاده از این

را در اطراف اپی نشان می‌دهد. شکل ۶- الف نتایج اندازه‌گیری شده در آزمایشگاه را نشان می‌دهد. شکل ۶- ب ارتفاع آب را در حالت مدلسازی عددی با شبکه‌های ساختار یافته و شکل ۶- ج نتایج مدلسازی عددی را با شبکه‌های بی‌سازمان نشان می‌دهد.



شکل ۶ ارتفاع آب در اطراف اپی، الف- اطلاعات ثبت شده در آزمایشگاه، ب- مقادیر عددی شبکه‌های ساختار یافته [۱۷]، ج- مقادیر عددی شبکه‌های بی‌سازمان

شکل ۷ نمودارهای مؤلفه افقی هم‌سرعت را در ارتفاع ۵ سانتیمتری از کف نشان می‌دهد. شکل ۷- الف نتایج اندازه‌گیری شده در آزمایشگاه، شکل ۷- ب ارتفاع آب در حالت مدلسازی عددی با شبکه‌های ساختار یافته و شکل ۷- ج نتایج مدلسازی عددی با شبکه‌های بی‌سازمان را نشان می‌دهد.

شکل ۸ مقادیر عددی محاسبه شده سرعت افقی را در ارتفاع ۱۷ سانتیمتری از بستر نشان می‌دهد. قسمت الف این شکل مقادیر اندازه‌گیری شده در آزمایشگاه، قسمت ب مقادیر عددی محاسبه شده توسط شبکه‌های ساختاریافته، و قسمت ج مقادیر عددی سرعت افقی محاسبه شده توسط شبکه بی‌سازمان را نشان می‌دهد.

ضروری نیست.

۲- استفاده از منفصل‌سازی با تقریب متکی بر بالادست به‌جای هایپرید در شبکه‌های ساختار نیافته به روش حجم محدود، موجب افزایش راندمان محاسبات محاسبه سطح و سرعت آب در اطراف اپی‌ها می‌شود.

۳- مقایسه مقادیر ارتفاع آب در اطراف اپی، محاسبه شده با استفاده از شبکه‌های ساختار یافته و شبکه‌های بی‌سازمان، با مقادیر ثبت شده در آزمایشگاه، نشان می‌دهد که شبکه‌های بی‌سازمان دقت مناسبی دارند.

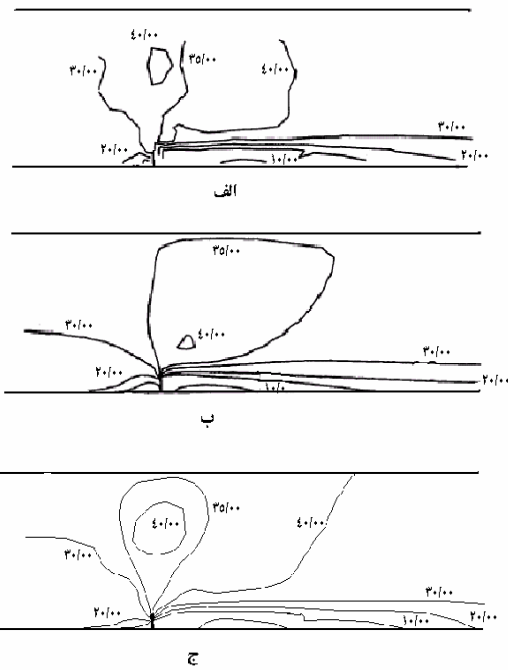
۴- مقایسه مقادیر سرعت آب در اطراف اپی، محاسبه شده با استفاده از شبکه‌های ساختار یافته و شبکه‌های بی‌سازمان، با مقادیر ثبت شده در آزمایشگاه، نشان می‌دهد که در صورت استفاده از شبکه‌های بی‌سازمان، خطا تا حد قابل توجهی کاهش می‌یابد.

۵- خطا برای محاسبه سرعت در اطراف اپی، با افزایش عمق آب نسبت به کف کانال افزایش می‌یابد. اما در صورت استفاده از شبکه‌های بی‌سازمان در شبیه‌سازی، خطا ناچیز می‌باشد.

## ۶- منابع

- [1] Aurenhammer, F., Klein; R.; "Voronoi diagrams, in: Handbook of Computational Geometry (Eds. J. Sack, J. Urrutia)"; Elsevier; 2000.
- [2] Seidel, R.; "Constrained Delaunay triangulations and Voronoi diagrams"; Report 260 IIG-TU; Graz, Austria; 1988; pp178-191.
- [3] Veldman, A.E.; Rinzema, K; "Playing with nonuniform grids."; J.Eng.Math,26;1992; pp 19-130.
- [4] Laney, C.B.; "Computational Gasdynamics." Cambridge.; University Press, UK; 1998; pp 87-103.
- [5] Harlow, F.H.; Welch, J.E.; "Numerical calculation of time-dependent viscous

شبکه‌ها در محیط‌های مختلف، در کاهش حافظه و افزایش سرعت محاسبات، در برآورد ارتفاع و سرعت آب در اطراف اپی، بسیار مؤثر است.



شکل ۸ مؤلفه افقی هم سرعت در ارتفاع ۱۷ سانتیمتری در اطراف اپی، الف- اطلاعات ثبت شده در آزمایشگاه، ب- مقادیر عددی شبکه‌های ساختار یافته [۱۶]، ج- مقادیر عددی شبکه‌های بی‌سازمان

## ۵- نتایج

۱- نتایج نشان می‌دهد که استفاده از شبکه‌های ساختار نیافته، از روش‌های رایج برای معادلات اولر و بوسینسک بسیار ساده تر است. با استفاده از این روش تعیین جریان‌های عددی در حجم کنترل توسط روش‌های قبلی ضروری نیست. به‌وسیله الگوریتم ارائه شده، مسائل ایستایی و جنبشی را به‌صورت هم‌زمان می‌توان حل کرد. این، مشکلات موجود در حل توأم مسائل ایستایی و جنبشی را برطرف می‌کند. در صورت استفاده از شبکه‌های بی‌سازمان، استفاده از شبکه‌های جابه‌جا شده<sup>۱</sup>

1. Staggered grids



- [12] Suli, E.; "Convergence of finite volume schemes for Poisson equation on nonuniform meshes"; SIAM J. Numer. Anal, 28; 1991; pp 1419-1430.
- [13] Jameson, A.; "Analysis and design of numerical schemes for gas dynamics, 2: artificial and diffusion and discrete shockstructure."; int.J.Comp.Fluid Dyn.5; 1995; pp1-38.
- [14] Arora, M.; Roe,P.L.; "A well-behaved TVD limiter for high-resolution calculations of unsteady flow"; J. Comp. Phys., 132; 1997; pp 3-11.
- [15] Rodi, W. "Turbulence models and their applications in hydraulics- a state of the art review", International Association for Hydraulic Research, Delft, The Netherlands, 1980.
- [16] Zhou, S. V., and Zhang, S. N., "Application of the HH-SIMPLE algorithm for the numerical simulation of some free surface flow problems for 3-Dimensional situations" Hydraulic and environmental modeling of coastal, estuarine and river waters, R. A. Falconer, P. Goodwin, and R. G. S. Matthew, eds, Gower Technical, Aldershot, U. K., 1989, pp. 526-535.
- [17] Ouillon, S. and Dartus D., "Three-Dimensional Computation of Flow Around Groyne" Journal of Hydraulic Engineering, November 1997, pp. 962-970.
- incompressible flow of fluid with a free surface." The Physics of fluids, 8; 1965; pp 2182-2189.
- [6] Renka, R.; "ALGORITHM 772 STRIPACK: Delaunay triangulation and Voronoi diagrams on the surface of a sphere." ACM Trans. Math. Soft. 23; 1997; pp 416-434.
- [7] Lindenbergh, R.C.; "Limits of Voronoi diagrams"; PhD thesis; Utrecht University, xxMG/0210345; 2002.
- [8] Gallouet, T.; Herbin, R.; Vignal, M.; "Error estimates on the approximate finite volume solution of convection diffusion equations with general boundary conditions." SIAM J. Numer. Anal. 37; 2000; pp 1935-1972.
- [9] Jameson, A.; Schmidt, S.; Turkel, E.; "Numerical Solution of the Euler Equation by FiniteVolume Methods Using Runge-Kutta Time Stopping Scheme"; AIAA; 1991; pp81-1259.
- [10] Van der Heul, D.R.; Vuik, C.; Wesseling, P.; "A staggered scheme for hyperbolic conservation laws applied to unsteady sheet cavitation"; Computing and Visualization in Science, 2 ;1999; pp 63-68.
- [11] Knabner, P.; Frolkovic, A.; "Consistent velocity approximation for finite volume or element discretizations of density driven flow in porous media."; Proceeding of XI. International Conference on Computational Methods in Water Resources, Cancun, Mexico; 1996.