یک جزء جدید خمشی چهار گرهی در محدودهٔ پوسته‌های نازک با استفاده از نگره رایزنر ـ میندلین

امیرهوشنگ اخویسی[1]، محمدتقی احمدی[2]*

۱- دانشجوی دکتری سازه، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه تربیت مدرس

۲- استاد مهندسی عمران، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه تربیت مدرس

*** تهران، صندوق پستی ۱۴۳-۱۴۱۱۵**

mahmadi@modares.ac.ir

(دریافت مقاله: آذر ۱۳۸۳، پذیرش مقاله: شهریور ۱۳۸۴)

چکیده - یک جزء خمشی چهار گرهی با ۱۲ درجه آزادی در محدودهٔ پوسته‌های نازک در این مقاله معرفی می‌شود. رابطه‌سازی این جزء براساس نگره رایزنر ـ میندلین انجام و با استفاده از قیدهای گسستهٔ کیرشهف به صفحه‌های نازک گسترش داده شده است. میدانهای تغییر مکان و دوران به‌دست آمده برای این جزء با اجزای دیگری که تاکنون ارائه شده متفاوت است. این جزء به‌علت استفاده از پیوستگی C^0 فرمولبندی ساده‌ای دارد. همچنین به‌منظور نمایش کارایی جزء در محدودهٔ صفحه‌ها و پوسته‌های نازک، نمونه‌های عددی ارائه شده با اجزای مختلف مقایسه می‌شود. نتایج نشان می‌دهند که جزء مزبور در محدودهٔ صفحه‌ها و پوسته‌های نازک بسیار خوب عمل کرده و در مقایسه با جزءهای ابداعی موجود، پاسخهای مناسبی را به‌دست می‌دهد.

کلید واژگان : رایزنر، میندلین، صفحه خمشی نازک، قیدهای گسسته کیرشهف.

۱- مقدمه

تحلیل صفحه‌های خمشی یکی از مهمترین مسائل مورد توجه در روش اجزای محدود است. از دیدگاه رفتاری، صفحه‌های خمشی را می‌توان به دو گروه صفحه‌های نازک و ضخیم تقسیم کرد. به سبب کم بودن نسبت ضخامت به بعد دیگر در صفحه‌های نازک، تغییر شکلهای ناشی از برش در آنها قابل چشم‌پوشی است. نگره حاکم بر صفحه‌های مزبور به‌وسیله کیرشهف[1] ارائه شده است. در نگره کیرشهف برای معادلات حاکم بر صفحه از مشتقهای مرتبه دوم تابع میدان خیز (در روش تغییر مکان) استفاده می‌کنند. در نتیجه، سازگاری C^1 برای تابعهای انتخابی مورد نیاز است. این سازگاری ایجاب می‌کند که مقدار خیز و دورانهای عمود بر مرز میان دو جزء یکسان باشند. شایان توجه است که به‌طور معمول، وارد کردن شرط سازگاری C^1 باعث سخت‌تر شدن جزء و در نتیجه سبب به‌دست آمدن پاسخهایی با دقت کمتر می‌شود. مهمترین جزء چهارپهلوی ناسازگار ارائه شده در این‌خصوص، جزء ACM است. این جزء در سال ۱۹۶۳ به‌وسیله کلاف[2] و آدینی[3] و در سال ۱۹۶۵ به‌وسیله ملوش[4] ارائه شد. این جزء به‌وسیله زینکیویچ[5] و دیو[6] نیز بررسی شده است [۱]. همچنین باگنر، فاکس و اشمیت در سال ۱۹۶۵ یک جزء خمشی سازگار را ارائه کردند. این

1. Kirchhoff

2. Clough
3. Adini
4. Melosh
5. Zienkiewicz
6. Dawe

جزء که با نام BF مشخص شده در محدوده صفحه‌های نازک، تغییر مکانها را با دقت نسبتاً خوبی به‌دست می‌دهد. با این حال مقادیر لنگر و برش در تکیه‌گاهها را به‌خوبیِ جزء ACM ارائه نمی‌دهد [۲].

از سوی دیگر در صفحه‌های ضخیم و نیمه‌ضخیم، اثر تغییر شکلهای برشی ناچیز نبوده و باید به‌گونه‌ای به تحلیل وارد شوند. شیوهٔ ساده‌ای برای این کار، به‌وسیله میندلین و رایزنر ارائه شده است. در این نگره، به سبب استفاده از مشتقات مرتبه اول متغیرهای اصلی میدان، خیز و دوران، فقط به برقراری سازگاری C^0 برای توابع درونیاب نیاز است. به‌طور معمول، از درونیابهای مستقل برای دوران و خیز استفاده می‌شود. براساس این نگره، رابطه‌سازی حاکم بر جزء به‌وسیله بته[1] ارائه شده است [۳]. در این مقاله از جزء مزبور برای مقایسه با پاسخهای به‌دست آمده از اجزای دیگر، جزء بته نامیده می‌شود. یادآوری می‌شود که اجزای ارائه شده براساس این نگره در محدودهٔ صفحه‌های ضخیم کاربرد داشته و قابل‌استفاده در صفحه‌های نازک نیست؛ زیرا در این محدوده دورانها و خیز صفحه‌ها از یکدیگر مستقل نیستند. بر این‌اساس، به‌دلیل رابطه‌سازی ساده‌تر در نگره میندلین و عدم برقراری سازگاری در نگره کیرشهف، محققان مختلف سعی در گسترش رابطه‌سازی نگره رایزنر ـ میندلین در محدودهٔ صفحه‌های نازک کرده‌اند. همانگونه که بیان شد، اجزای ارائه شده براساس نگره رایزنر ـ میندلین در محدودهٔ صفحه‌های ضخیم کاربرد دارند و در حد صفحه‌های نازک سختی برشی زیادی دارند. یکی از روشهای کاهش این سختی، محاسبهٔ ماتریس سختی برشی با تابع اولیه‌گیری از مرتبهٔ پایین‌تر است. این شیوه که با نام تابع اولیه‌گیری کاهش یافتهٔ انتخابی شناخته می‌شود، به‌وسیله زینکویچ و همکاران [۴] ارائه شده است. هینتن [۵] نشان داد که با کاربرد تعداد کمتری نقاط گوس تعدادی حالتهای حرکتی اضافی به‌وجود می‌آید که در بعضی از حالتهای آرایشی تکیه‌گاهها ممکن است این حرکتهای اضافی سبب سخت‌تر شدن جسم و در نتیجه پاسخهای غلط شود.

راه حل دیگری برای کاربرد نگره رایزنر ـ میندلین در محدودهٔ صفحه‌های نازک، استفاده از تحمیل شرایط کیرشهف به‌صورت پیوسته یا گسسته است. در این زمینه بته و هو[2] در سال ۱۹۸۰ جزء مثلثی خمشی ۹ درجه آزادی را براساس کاربرد قیدهای گسستهٔ کیرشهف ارائه کردند. برای این کار ابتدا جزء مثلثی مرتبه ۲ با ۶ گره (سه گره گوشه و سه گره میان پهلویی) و در هر گره سه درجه آزادی، یک تغییر مکان عمود بر صفحه و دو دوران ـ که به‌طور مستقل درونیابی می‌شوند ـ درنظر گرفتند. توابع درونیاب به‌کار رفته در گره‌ها همان توابع درونیاب لاگرانژی برای المان خمشی مثلثی مرتبه دو است. سپس با صفر فرض کردن کرنشهای برشی در گره‌های گوشه و کرنش برشی مماسی در گره میان پهلویی، ۹ معادله برای وابسته ساختن ۹ مجهول گره‌های میانی به گره‌های گوشه به‌دست آمده است [۶]. این جزء DKT نامیده و به‌وسیله بته در سال ۱۹۸۳ برای تحلیل غیرخطی نیز استفاده شد [۷]. با حذف درجه آزادی گره‌های میانی برحسب گره‌های گوشه، جزء مثلثی سه گرهی با ۹ درجه آزادی نتیجه شد. همچنین در سال ۱۹۸۵ میک[3] المان مثلثی ۷ گرهی مرتبه دو را انتخاب کرد به‌طوری‌که شش گره پیرامونی و یک گره در مرکز المان داشت. گره‌های پیرامونی دارای سه درجه آزادی، یک تغییر مکان عمود بر صفحه و دو دوران، و گره مرکزی فقط شامل دو درجهٔ آزادی دورانی بود. سپس با اعمال قیدهای برشی گسسته در شش گره پهلویی و اعمال دو قید برشی پیوسته در مرکز المان، تعداد درجات آزادی المان را از ۲۰ به ۱۲ کاهش دادند. این المان DKL نامیده شده و در صفحه‌های نازک پاسخهای مناسبی را به‌دست می‌دهد.

1. Bathe
2. Ho
3. Meek

باید توجه داشت که المان مزبور دارای سه درجه آزادی مرسوم در سه گره گوشه و تنها تغییر مکان عمود بر صفحه در سه گره میانی که در مجموع دارای ۱۲ درجه آزادی می‌شود [۸]. پولسن در سال ۱۹۹۶ این جزء را برای تحلیل غیرخطی هندسی به‌کار برد [۹].

روش دیگری را برای وارد ساختن شرایط کیرشهف، استولارسکی و همکاران [۱۰، ۱۱] در سال ۱۹۸۸ به‌کار بردند. شیوهٔ مزبور استفاده از حالت ضعیف قیدهای کیرشهف نامگذاری شد. در این شیوه خیزهای کیرشهف دو نقطهٔ A و B در صفحهٔ خمشی، به‌وسیله تابع اولیه‌گیری از میدان دوران در طول خط AB به‌یکدیگر مرتبط می‌شوند. روش دیگری به‌منظور حذف قفل برشی در صفحه‌های خمشی نازک، استفاده از نرمی خمشی مانده[1] است. این روش به‌وسیله مک‌نیل [۱۲] در جزء Quad4 به‌کار رفته است. در ادامه، روش ارائه شده در [۶] به‌وسیله باتوز[2] و همکاران برای ارائه جزء خمشی چهار گرهی به‌کار برده شد [۱۳]. به بیان دیگر باتوز و همکاران با انتخاب المان ۸ گرهی همراه با توابع شکل سرندیپیتی[3] برای گره‌های آن و برابر صفر قرار دادن کرنشهای برشی در دو جهت عمود بر ضخامت صفحه در گره‌های گوشه و همچنین برابر صفر قرار دادن کرنش برشی مماسی در گره‌های میان پهلویی، ۱۲ معادله را برای وابسته ساختن ۱۲ مجهول در ۴ گره میان پهلویی (در هر گره یک درجه آزادی تغییر مکان عمود بر صفحه و دو درجه آزادی دورانی) به درجه‌های آزادی گره‌های گوشه به‌دست آوردند. سپس با حذف درجه آزادی گره‌های میان پهلویی، المان به‌دست آمده دارای ۴ گره و ۱۲ درجه آزادی بود که آن را DKQ نامیدند. در سال ۱۹۹۵ کرتسیک[4] و زهنگ[5] جزء DKQ۴ را ارائه کردند. جزء مزبور بر پایهٔ روابط میندلین استوار بوده به‌منظور قفل نکردن در محدودهٔ صفحه‌های نازک، قیدهای کیرشهف مجزا به‌کار رفته است. این جزء در ابتدا ۸ گره داشت که توابع درونیاب گره‌های گوشه همان توابع درونیاب المان دوخطه لاگرانژی (مرتبه اول) و توابع درونیاب گره‌های میانی همان توابع گره‌های میانی جزء سرندیپیتی هستند. کرتسیک با درنظر گرفتن کرنش برشی مماسی به‌صورت تابع درجه ۲ کامل و سپس برابر صفر قرار دادن مقدار تابع اولیهٔ کرنش برشی مماسی در طول هر خط معین از صفحه خمشی در نقاط گوس، تغییر مکانهای گره‌های میانی را به گوشه وابسته می‌سازد و همچنین دوران عمود بر هر پهلو را به‌عنوان دومین قید کیرشهف به مسأله وارد کرد. در انتها با حذف دو دوران و یک تغییر مکان عمود بر صفحه در هر گره میانی، یک جزء ۴ گرهی با ۱۲ درجه آزادی به‌دست آمده است. پیشنهاددهندگان این جزء، از ۴×۴ نقطهٔ گوس برای تعیین ماتریس سختی جزء سود جستند [۱۴]. در سال ۱۹۸۴ هینتن[6] [۱۵] انرژی حاکم بر المان ۹ گرهی لاگرانژی با فرض میدان کرنش برشی مستقل و میدان کرنش برشی وابسته به تغییر مکانها و دورانها و اعمال ضرایب لاگرانژی را به‌دست آورد. سپس با ساکن کردن انرژی، مجهولهای میدان کرنش برشی فرضی را تعیین کرد. با این کار قفل برشی حذف شده و جزء حاصل Quadh۹ نامگذاری شد. این جزء، شکل توسعه داده شدهٔ جزء Quad۹ است (استفاده از کرنشهای برشی وابسته). شایان توجه است که جزء Quad۹ با کاربرد تابع اولیه‌گیری کاهش یافتهٔ یکنواخت تغییر مکانها را در محدودهٔ پوسته‌های نازک و با ضخامت متوسط به‌خوبی ارائه می‌کند. با این حال مقادیر لنگر در تکیه‌گاه حول مقدار واقعی آن دارای نوسان است. به بیان دیگر، مقادیر لنگر در بعضی از نقاط کمتر و در بعضی دیگر بیشتر از مقدار واقعی است. این عیب به‌وسیله [۱۵] برطرف شده و جزء حاصل Quadh۹ نام نهاده شده است.

1. Residual Bending Flexibility
2. Batoz
3. Serendipity
4. Kratzig
5. Zhang
6. Hinton

در سال ۱۹۸۵ بته و دورکین[1] میدان کرنش برشی را به‌وسیلهٔ توابع درونیاب خطی به کرنشهای برشی میان‌پهلوها ارتباط دادند؛ این جزء به نام Mitc۴ معروف است و در محدودهٔ صفحه‌های نازک و نیمه‌ضخیم پاسخهای مناسبی را به‌دست می‌دهد [۱۶]. در ادامه باتوز در سال ۱۹۸۹ [۱۷] و کاتیلی در سال ۱۹۹۳ [۱۸] میدان کرنش برشی فرضی المان مثلثی را برحسب مشتق دوم دوران مماس بر میان پهلوها ارائه و سپس به نسبت صلبیت خمشی به صلبیت برشی این کرنش برشی فرضی را اصلاح کردند. سپس مانند [۱۶] با درونیابی خطی، میدان کرنشهای برشی فرضی را به کرنش برشی فرضی گره‌های میان پهلویی ارتباط می‌دهند. جزء به‌دست آمده از این روش در محدودهٔ صفحه‌های نازک و نیمه‌ضخیم کاربرد دارد. به همین شیوه کاتیلی در ۱۹۹۳ جزء چهار پهلوی دیگری را به نام DSQ BL ارائه کرد [۱۹]. هر یک از اجزای بحث شده دارای نقاط ضعف و قوتی به‌شرح زیر است: جزء ACM در محدوده صفحه‌ها و پوسته‌های نازک پاسخهای مناسبی را به‌دست می‌دهد. مهمترین مسأله مورد توجه در این جزء، ارائه میدان تغییر مکان است طوری که پیوستگی C^1 را تأمین کند. مقادیر لنگر و برش در نقاط گرهی تکیه‌گاهی با جزء Quad۹ با تابع اولیه‌گیری کاهش یافته یکنواخت و جزء BF دارای نوسان و خطا است. به‌منظور ارائه جزء با پیوستگی C^0 در محدوده صفحه‌های نازک جزء DKQ ارائه شد. این جزء فرمولبندی ساده‌تری نسبت به جزء ACM دارد. با این حال، در شبکه‌بندیهای خشن دقت مناسبی ندارد. جزء DKQ۴ به‌منظور بهبود خطا در جزء DKQ ارائه شد. با این حال فرمولبندی آن مشکل و میدان تغییر مکان آن پیچیده است. همچنین جزء معروف Mitc۴ در محدودهٔ پوسته‌های نازک علاوه بر فرمولبندی پیچیده آن دقت مناسبی ندارد. در ادامه نویسندگان به‌منظور رسیدن به فرمولبندی ساده‌تر و ارائه دقت مناسب یک جزء چهارگرهی را با استفاده از نگره رایزنر- میندلین ـ که در محدودهٔ صفحه‌ها و پوسته‌های نازک کاربرد دارد- بر مبنای جزء DKQ۴ ارائه می‌کنند.

۲- روابط حاکم بر جزء

جزء چهار گرهی برای تحلیل استاتیکی خطی با استفاده از نگره رایزنر ـ میندلین که فرمولبندی آن به‌شرح زیر است ارائه می‌شود:

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_A \kappa^T C_b \kappa \, dA + \frac{1}{2}\int_A \gamma^T C_s \gamma \, dA - \int WP dA \qquad (1)$$

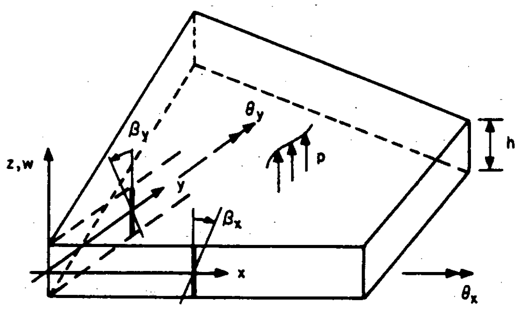
که در آن:

$$\kappa = \left\{ \frac{\partial \beta_x}{\partial x}, -\frac{\partial \beta_y}{\partial y}, \; \frac{\partial \beta_x}{\partial y} - \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \right\}^T \qquad (2)$$

$$\gamma = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial w}{\partial x} + \beta_x \\ \dfrac{\partial w}{\partial y} - \beta_y \end{Bmatrix} \qquad (3)$$

$$C_b = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} ; \; C_S = \frac{Etk}{2(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (4)$$

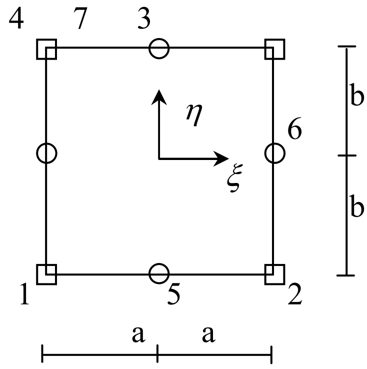
در شکل ۱، β_x , β_y دورانهای مقطع و W تغییر مکان عمود بر میان صفحهٔ جزء است. P بار گستردهٔ واردشونده بر سطح، t ضخامت و A مساحت میان‌صفحهٔ جزء است. E و ν به‌ترتیب ضریب کشسانی و نسبت پواسون و k ضریب تصحیح برشی (معمولاً ۵/۶) است.



شکل ۱ علامتهای استفاده شده برای نگره خمش رایزنر – میندلین

1. Dvorkin

همان‌گونه که در قسمت قبل بیان شد، ساده‌ترین راه برای فرمولبندی المان، استفاده از درونیاب مجزا برای دورانها و تغییر مکان است. این نوع فرمولبندی در [۳] به‌کار رفته است. المان به‌دست آمده از این فرمولبندی در محدودهٔ صفحه‌های ضخیم کاربرد دارد. در اینجا از این روش برای فرمولبندی جزء در محدودهٔ صفحه‌های نازک استفاده می‌شود. یادآوری می‌شود که در محدودهٔ صفحه‌های نازک انرژی کرنش برشی ناچیز بوده و بنابراین دومین جمله از رابطهٔ (۱) در مقایسه با جملات دیگر حذف می‌شود. در کار حاضر برای رسیدن به فرمولبندی جزء در محدودهٔ صفحه‌های نازک با استفاده از نگره رایزنر ـ میندلین، ابتدا جزء ۸ گرهی شکل ۲ درنظر گرفته می‌شود.



شکل ۲ جزء ۸ گرهی به‌کار رفته

برای گره‌های گوشه از توابع شکل لاگرانژی دو خطهٔ جزء چهار گرهی و برای گره‌های میان پهلویی از توابع شکل گره‌های میانی جزء سرندیپیتی در دستگاه مختصات طبیعی استفاده می‌شود. در این جزء برخلاف جزء DKQ۴ برای گره‌های میانی، فقط دو درجه آزادی درنظر گرفته می‌شود. به‌بیان دیگر، تغییر مکان عمود برمیان صفحه و دوران عمود بر میان پهلو در گره‌های میانی، دو درجه آزادی انتخابی است. درجه‌های آزادی به‌کار رفته در گره‌های گوشه همان درجه آزادی مرسوم است (تغییر مکان عمود بر میان صفحه و دو دوران) جزء نشان داده شده در شکل ۲ دارای ۱۲ درجهٔ آزادی در گره‌های گوشه و ۸ درجه آزادی در گره‌های میان پهلوها است. بنابراین میدان تغییر مکان و دورانها به‌شرح زیر درونیابی می‌شوند:

$$
\begin{aligned}
W &= \sum_{i=۱}^{۸} N_i w_i \\
\beta_x &= \sum_{i=۱}^{۴} N_i \theta_y^i + \sum_{j=۵,۷} N_j \theta_y^j \\
\beta_y &= \sum_{i=۱}^{۴} N_i \theta_x^i + \sum_{j=۶,۸} N_j \theta_x^j
\end{aligned}
\tag{۵}
$$

در ادامه به‌منظور دستیابی به فرمولبندی در محدودهٔ صفحه‌های نازک، رابطهٔ(۳) به‌صورت زیر بازنویسی می‌شود.

$$
\begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = [J]^{-۱} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial w}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial w}{\partial \eta} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \beta_x \\ -\beta_y \end{Bmatrix} \tag{۶}
$$

در رابطهٔ فوق $[J]^{-۱}$ معکوس ماتریس ژاکوبی است. با ضرب دو طرف رابطه، رابطهٔ بالا در ماتریس ژاکوبی رابطهٔ (۶) به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$
\begin{Bmatrix} \gamma_۲ \\ \gamma_۱ \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial w}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial w}{\partial \eta} \end{Bmatrix} + [J] \begin{Bmatrix} \beta_x \\ -\beta_y \end{Bmatrix} \tag{۷}
$$

در این رابطه $\gamma_۱$ و $\gamma_۲$ کرنشهای برشی در دستگاه مختصات طبیعی است. ماتریس ژاکوبی برای جزء چهارگرهی به ابعاد $۲a \times ۲b$ چنین است:

$$
[J] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial x}{\partial \eta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & ۰ \\ ۰ & b \end{bmatrix} \tag{۸}
$$

با جاگذاری رابطهٔ (۸) در رابطهٔ (۷)، نتیجه به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$
\begin{aligned}
\gamma_۲ &= \frac{\partial w}{\partial \xi} + a\beta_x \\
\gamma_۱ &= \frac{\partial w}{\partial \eta} - b\beta_y
\end{aligned}
\tag{۹}
$$

حال با صفر کردن کرنشهای برشی در دستگاه

مختصات طبیعی (γ_1، γ_2) در چهار نقطه گوس (۲×۲ نقطه انتگرالگیری)، ۸ رابطه برای تعیین ۸ درجه آزادی اضافی میان پهلوها برحسب درجه‌های آزادی گره‌های گوشه به‌دست می‌آیند. با حل این دستگاه ۸ معادله و ۸ مجهول، درجه‌های آزادی میان پهلوها به‌شرح زیر نتیجه می‌شوند:

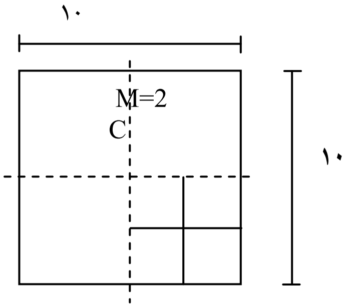
$$w_5 = \frac{a}{4}\left(\theta_y^1 - \theta_y^2\right)$$
$$w_6 = \frac{b}{4}\left(\theta_x^3 - \theta_x^2\right)$$
$$w_7 = -\frac{a}{4}\left(\theta_y^3 - \theta_y^4\right)$$
$$w_8 = -\frac{b}{4}\left(\theta_x^1 - \theta_x^4\right)$$
$$\theta_y^5 = \frac{3}{4}\left(\theta_y^1 + \theta_y^2\right) + \frac{3}{4a}\left(w_2 - w_1\right) - \frac{b}{8a}\left(\theta_x^1 - \theta_x^2 + \theta_x^3 - \theta_x^4\right)$$
$$\theta_y^7 = \frac{3}{4}\left(\theta_y^3 + \theta_y^4\right) + \frac{3}{4a}\left(w_3 - w_4\right) - \frac{b}{8a}\left(\theta_x^1 - \theta_x^2 + \theta_x^3 - \theta_x^4\right)$$
$$\theta_x^6 = \frac{3}{4}\left(\theta_x^2 + \theta_x^3\right) - \frac{3}{4b}\left(w_3 - w_2\right) - \frac{a}{8b}\left(\theta_y^1 - \theta_y^2 + \theta_y^3 - \theta_y^4\right)$$
$$\theta_x^8 = \frac{3}{4}\left(\theta_x^1 + \theta_x^4\right) - \frac{3}{4b}\left(w_4 - w_1\right) - \frac{a}{8b}\left(\theta_y^1 - \theta_y^2 + \theta_y^3 - \theta_y^4\right) \qquad (10)$$

ممکن است ایــن جزء با جزء DKQ۴ به‌طور اشتــباه یکسان فرض شــود. بایــد توجه داشت که دورانهای به‌دست آمده در جزء حاضر با جزء DKQ۴ کاملاً متفاوت است. به‌عنوان نمونه علامت جمله دوم θ_y^5 در کار حاضر منفی و جملهٔ سوم نیز نسبت به جزء DKQ۴ اضافه شده است. در ادامه با جاگذاری رابطهٔ (۱۰) در رابطهٔ (۵)، میدان تغییر مکان و دوران به‌صورت مجزا درونیابی می‌شود. سپس با ساکن کردن رابطـهٔ (۱) و جاگذاری میدانهای مجزای به‌دست آمده، ماتریس سختی جزء به‌دست می‌آید. ماتریس کرنش تغییر مکان مورد نیاز برای تعیین ماتریس سختی در پیوست آورده شده است.

جزء پـیشنهاد شده را AMQ۴ نامگذاری می‌کنیم، قابل توجه است که این جزء به آزمایش وصله نیز پاسخ می‌دهد. به‌منظور مقایسه با اجزای دیگر، برنامهٔ رایانه‌ای به زبان فرترن نوشته شد که شامل جزء‌های AMQ۴، MITC۴، ACM و BF [۴] است. نمونه‌های عددی فراوانی با این اجزا تحلیل شد که در ادامــه چند نمونه آورده می‌شود.

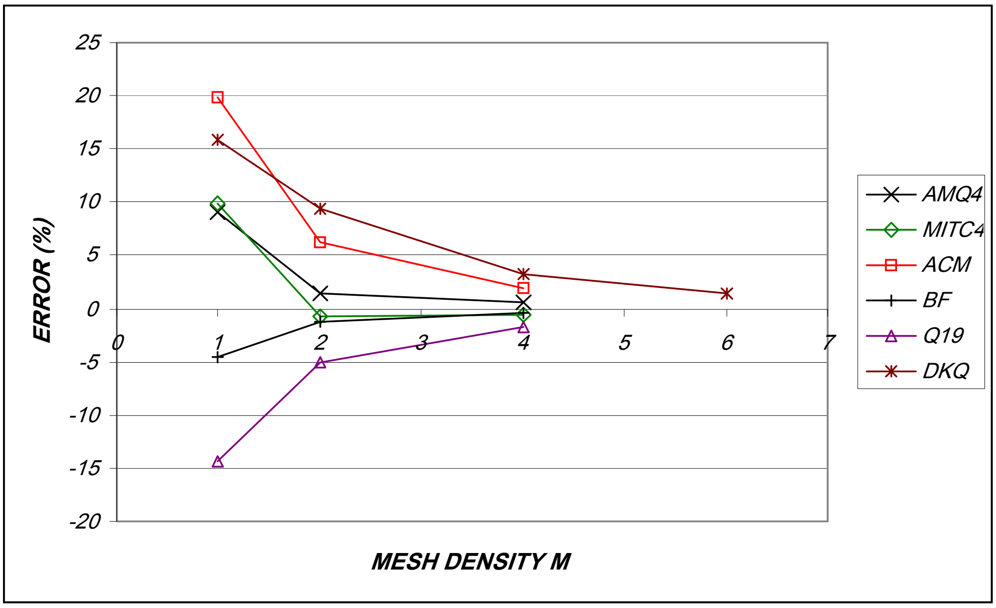
نمونهٔ عددی ۱ـ صفحهٔ خمشی

صفحه‌ای مربعی بـه ابـعاد ۱۰×۱۰ بـا شـرایط تکیه‌گاهی ساده، ضریب کشسانی E=۱۰/۹۲، نـسبت پواسون v=۰/۳ و ضخامت ۰/۰۱ در دو حالت بارگذاری تحلیل می‌شود شکل ۳. ابتدا بار گسترده با شدت $q = \frac{1}{25}$ عمود بر سطح صفحه وارد می‌شود. سپس این صفحه زیر اثر بار مـتمرکز P = ۱ در مرکز صفحه قرار می‌گیرد.



شکل ۳ صفحهٔ خمشی با تکیه‌گاههای ساده

در حالت بارگذاری گسترده یکنواخت تمام صفحه با استـفاده از المان AMQ۴ برای شبکه‌بندیهای مختلف (M*M)، M تعداد المان در هر جهت، تحلیل شده و نـتایج در جدول ۱ با تغییر مکان دقیق به‌دست آمده در مرکز صفحه از تئوری صفحات و پوسته‌ها، $W_{max} = 1624000$، مقایسه شد. واضح است که همگرایی المان با ریزشدن شبکه به پاسخ دقیق برای بارگذاری گسترده بسیار مناسب است.



شکل ۴ درصد خطای تغییر مکان مرکز صفحهٔ مربعی زیر بار متمرکز

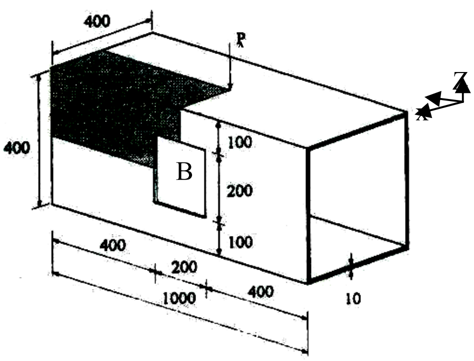
جدول ۱ تغییر مکان بیشینه در مرکز صفحه

M*M	۱×۱	۲×۲	۴×۴	۶×۶
AMQ۴	۱۲۶۴۲۶۰	۱۵۰۹۱۵۰	۱۵۹۷۰۹۰	۱۶۱۴۱۵۰
درصد خطا	۲۲/۱۵	۷/۰۷	۱/۶۶	۰/۶۰۶

سپس ایـن صفحـه زیـر اثر بار متمرکز در وسط، برای شبکه‌بندیهای مختلف تحلیل شد. نتایج به‌دست آمده در شکل ۴ رسم شده است. با توجه به شکل ۴ جزء AMQ۴ نسبت به اجزای دیگر به‌ویژه جزء DKQ، ACM و Q۱۹ [۲۰] و BF [۴] پاسخهای مناسبی را به‌دست می‌دهد.

نمونه عددی ۲ ـ تیر جعبه‌ای

در اینجا جعبه‌ای توخالی به طول ۱۰۰۰ سانتیمتر ـ کـه سوراخ مربعـی در دو طـرف آن وجـود دارد- درنظـر گرفته می‌شود. همان‌گونه که در شکل ۵ دیده می‌شـود، مقطع عرضی این جعبه مربعی است و دو بار متمرکز P به اندازهٔ ۲ton در میانهٔ سازه بـه‌صـورت متقـارن تـأثیر می‌کند. مسأله دارای تقارن نسبت بـه سـه صـفحه yz, xz, xy است. تکیه‌گاههای سازه در دو طـرف نـسبت به تغییر مکانهای عمودی و جـانبی مقیـد شـده اسـت. ضـخامت سـازه برابـر ۱۰cm، ضـریب کشـسانی آن $E = ۲/۱ \times ۱۰^۶ \dfrac{kg}{Cm^۲}$ و نسبت پواسون $\nu = ۰/۴۸$ است.

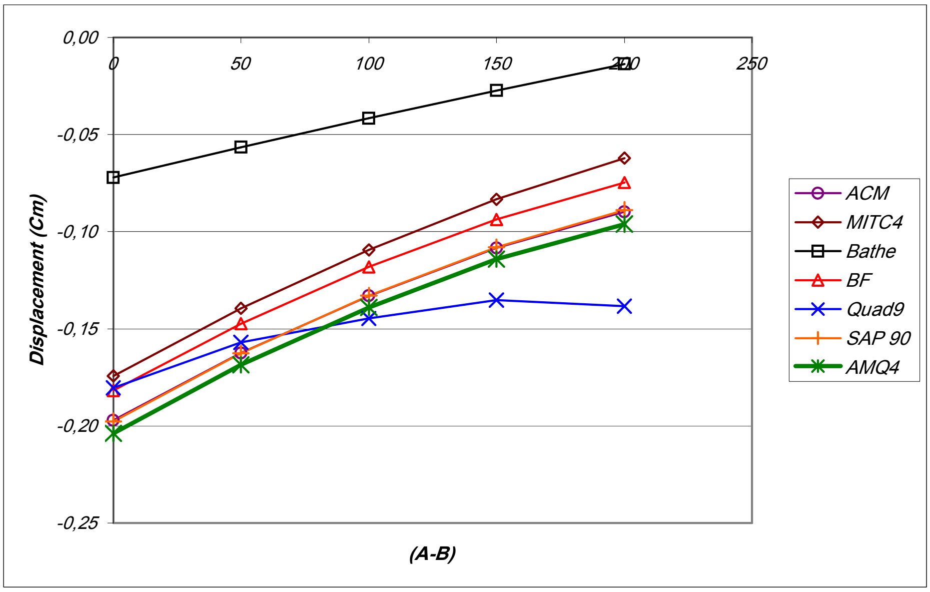


شکل ۵ جعبهٔ توخالی با سوراخ مربعی

جدول ۲ بیشینه تغییر مکان قائم جعبهٔ توخالی

مرجع	[۲۱]	ACM	MITC۴	Bathe	BF	AMQ۴	Quad۹	Sap۹۰
تعداد اجزای به‌کار رفته در تحلیل	۷۶	۶۰	۶۰	۶۰	۶۰	۶۰	۱۵	۶۰
تعداد گره‌ها	۹۵	۷۷	۷۷	۷۷	۷۷	۷۷	۷۷	۷۷
W_A (Cm)	−۰/۲۲۹۲۲	−۰/۱۹۷۱۹	−۰/۱۷۴۲۶	−۰/۰۷۲۱۴	−۰/۱۸۱۸	−۰/۲۰۳۸۱۷	−۰/۱۸۰۴۵	−۰/۱۹۱۱۳

به‌دلیل تقارنی که مسأله در سه جهت دارد، $\frac{1}{8}$ مسأله برای تحلیل انتخاب می‌شود. $\frac{1}{8}$ از این سازه در [۲۱] با ۹۵ گره تحلیل شده است. در اینجا نویسندگان از ۷۷ گره برای تحلیل استفاده کرده‌اند. تغییر مکان به‌دست آمده در زیر نقطه اثر بار در جدول ۲ و تغییر مکان در امتداد AB (نصف عرض مقطع در جهت Y) در شکل ۶ رسم شده است. با توجه به نتایج به‌دست آمده واضح است که جزء AMQ۴ نتایج بسیار خوبی را ارائه داده است. همچنین جزء Quad۹ همان جزء ۹ گرهی لاگرانژی است که به‌وسیلهٔ اجزای خمیده فرمولبندی شده است [۱۵]. شایان توجه است که پاسخ به‌دست آمده از جزء بته نشان می‌دهد که این جزء در محدودهٔ صفحه‌ها و پوسته‌های ضخیم کاربرد دارد و استفاده از آن در محدودهٔ صفحه‌های نازک سبب قفل برشی می‌شود.



شکل ۶ تغییر مکان امتداد خط A به B برحسب سانتیمتر

از تحلیلهای فوق واضح است که جز Mitc۴ – که میدان کرنش برشی را به‌وسیله توابع درونیاب خطی به کرنشهای برشی میان پهلوها با یک فرمولبندی پیچیده ارتباط می‌دهد- در مقایسه با جز ACM به‌دست آمده براساس نگره کیرشهف، با قبول ۱۱/۶۳ درصد خطا در نمونه عددی ۲، می‌توان در تحلیل پوسته‌ها و صفحه‌های خمشی به‌کار برد. تغییر مکان به‌دست آمده در طول خط AB با استفاده از المان Quad۹ با سایر المانها متفاوت است. این مسأله ممکن است ناشی از استفاده از تابع اولیه‌گیری کاهش‌یافته یکنواخت برای المان Quad۹ باشد. شایان توجه است که با کاربرد تابع اولیه‌گیری کاهش‌یافته یکنواخت، حالتهای اضافی حرکتی

به‌وجود می‌آید که در بعضی از شرایط تکیه‌گاهی سبب ارائه پاسخ نامناسب می‌شوند [۵]. باید توجه داشت که جزء AMQ۴ نسبت به اجزای دیگر پاسخ بهتری را در مقایسه با [۲۱] ارائه کرده است.

۳- نتیجه‌گیری

جزء AMQ۴ که براساس نگره رایزنر ـ میندلین و با استفاده از قیدهای برشی گسسته به‌دست آمده، با اجزای دیگر متفاوت بوده و نتایج مناسبی را در محدودهٔ صفحه‌ها و پوسته‌های نازک ارائه می‌کند. فرمولبندی این جزء براساس توابع شکل لاگرانژی و پیوستگی C^0 به‌صورت ساده ارائه می‌شود. با توجه به نمونه‌های عددی مختلف تحلیل شده براساس جزء AMQ۴، نتایج نشان می‌دهند که این جزء در محدودهٔ صفحه‌ها و پوسته‌های نازک دچار قفل‌شدگی نشده و مقادیر لنگر، برش و تغییر مکان را با دقت بسیار زیادی ارائه می‌دهد. از سوی دیگر، این جزء در مقایسه با جز چهار گرهی معروف Mitc۴ و جزء ۹ گرهی لاگرانژی Quad۹ در محدوده پوسته‌های نازک بهتر عمل کرده و پاسخهای بسیار خوبی را ارائه می‌دهد. همچنین به‌وسیله جزء AMQ۴ با شبکه‌بندی درشت به نسبت جزء DKQ می‌توان پاسخهای مناسبی را به‌دست آورد.

۴- پیوست

با توجه به رابطه (۱) و پس از ساکن کردن آن، ماتریس سختی خمشی جزء به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$k = \int B^T C_b B \; dV$$

$$[B] = \begin{bmatrix} b1 & b2 & b3 & -b1 & -b2 & b4 & b5 & b2 & -b4 & -b5 & -b2 & b6 \\ b7 & b8 & b9 & b10 & b11 & -b9 & -b10 & b11 & b9 & -b7 & b12 & -b9 \\ b13 & b14 & b15 & -b13 & -b14 & b16 & b13 & b17 & b18 & -b13 & -b17 & -b15 \end{bmatrix}$$

$$b1 = 0.75\xi(\eta-1)/a^2$$
$$b2 = -.25b\xi/a^2$$
$$b3 = -(0.75\xi-.25)(\eta-1)/a$$
$$b4 = -(0.75\xi+0.25)(\eta-1)/a$$
$$b5 = 0.75\xi(\eta+1)/a^2$$
$$b6 = (0.75\xi-0.25)(\eta+1)/a$$
$$b7 = 0.75\eta(\xi-1)/b^2$$
$$b8 = (\xi-1)(0.75\eta-0.25)/b$$
$$b9 = 0.25a\eta/b^2$$
$$b10 = -0.75\eta(\xi+1)/b^2$$
$$b11 = -(\xi+1)(0.75\eta-0.25)/b$$
$$b12 = (\xi-1)(0.75\eta+0.25)/b$$
$$b13 = 0.375(\xi^2+\eta^2-2)/ab$$
$$b14 = (0.375\eta^2-0.25\eta-0.125)/a$$
$$b15 = -(0.375\xi^2-0.25\xi-0.125)/b$$
$$b16 = -(0.375\xi^2+0.25\xi-0.125)/b$$
$$b17 = -(0.375\eta^2+0.25\eta-0.125)/a$$
$$b18 = (0.375\xi^2+0.25\xi-0.125)/b$$

۵- منابع

[1] Dawe, D. J; *Matrix and Finite Element Displacement Analysis Of Structures*; Oxford University Press, NewYork; 1984.

[2] Bogner,F.K.; Fox,R.L.; Schmit ,L.A.; "The Generation of Interelement – Compatible Stiffness and Mass matrices by the Use of Interpolation Formulae"; Proc. Conf. Mat. Meth. Struc. Mech.; AFIT, Wright – Patterson Base, Ohio; 1965; pp. 397-443.

[3] Bathe Klaus-Jurgen; *Finite Element Procedures In Engineering Analysis*; Prentice-Hall, 1982.

[4] Zienkiewicz, O.C; *The Finite Element Method*, Mc Graw- Hill Book Company, 1977.

[5] Hinton E. Huang; H. C.; "A Family Of Quadrilateral Mindlin Plate Elements with Substitute Shear Strain Fields"; Comput. Struct. 23; pp. 409-431; 1986.

[6] Batoz; Jean-Louis; "A Study of Three-Node Triangular Plate Bending Elements"; Int. J. Numer. Eng.; Vol 15; pp. 1771-1812; 1980.

[7] Bathe, Klaus-Jurgen; Eduardo Dovrkin; Lee W.HO.; "Our Discrete-Kirchhoff and Isoparametric Shell Elements for Nonliner Analysis An Assessment"; Computers & Structures, Vol16, No 1; pp. 89-98, 1983.

[8] Meek, J. L.; Tan, H.S.; "A Discrete Kirchhoff Plate Bending Element with Loof Nodes"; Computers & Structures; Vol21, No 6, pp. 1197-1212, 1985.

[9] Poulsen, Peter Noe; "A Flat Triangular Shell element with Loof Nodes"; Int. J. Numer. Meth. Eng.; Vol 39; pp. 3867-3887, 1996.

[10] Stolarski, Henryk K.; Chiang, Martin. Y. M.; "Thin Plate Elements with Relaxed Kirchhoff Constraints"; Int. J. Numer. Meth. Eng.; Vol26 ; pp. 913-933, 1988.

[11] Stolarski, H.K.; Chiang, M.Y.; "Assumed Strain Formulation For triangular C0 Plate Elements Based on a Weak Form of the Kirchhoff Constraints"; Int. J. Numer. Meth. Eng.; Vol28 ; pp. 2323-2338; 1989.

[12] Mac Neal, Richard H.; "A Simple Quadrilateral Shell Element"; Computers & Structures; Vol8 ; PP. 175-183; 1978.

[13] Batoz, Jean-Louis; Tahar, Mabrouk-Ben; "Evaluation of a New Quadrilateral Thin Plate Bending Elements"; Int.J. Numer. Meth. Eng.; Vol18 ; pp. 1655-1677; 1982.

[14] Kratzig, Zhang; "A Simple Four Node Quadrilateral Finite Elements for Plates"; Finite Elements and Des.; pp. 19, 195-207, 1995.

[15] Huang, H.C.; Hinton, E.; "A Nine Node Langrangian Mindlin Plate Element with Enhanced Shear Interpolation"; Eng. Comput.; Vol1 ; December 1984.

[16] Bathe, Klaus-Jurgen; Dvorkin; Eduardon; "Short Communication: a Four Node Plate Bending Element Based on Mindlin/Reissner Plate Theory and a Mixed Interpolation"; Int. J. Numer Meth. Eng.; Vol 21; pp. 367-383, 1985.

[17] Batoz, J.L; Lardeur, Nad; "A Discrete Shear Triangular Nine D.O.F. Element for the Analysis of Thick to Very Thin Plates"; Int. J. Numer. Meth. Eng.; Vol 28; pp. 533-560; 1989.

[18] Katili, Irwan; "A New Discrete Kirchhoff-Mindlin Elements Based on Mindlin- Reissner Plate Theory and Assumed Shear Strain Fields- Part I: An Extended DKT Element for Thick- Plate Bending Analysis"; Int. J. Numer. Meth. Eng.; Vol 36; pp.1859-1883; 1993.

[19] Katili, Irwan; "A New Discrete Kirchhoff-Mindlin Elements Based on Mindlin- Reissner Plate Theory and Assumed Shear Strain Fields- Part II: An Extended DKQ Element for Thick- Plate Bending Analysis"; Int. J. Numer. Meth. Eng; Vol 36; pp. 1885-1908; 1993.

[20] Clough, R.W.; Felippa, C.A.; "A Refined Quadrilateral Element for Analysis of Plate Bending"; In L. Berke, R. M. Bader, W. J. Mykytow; J. S. Przemienicki; M.H. Shirk (eds); Proc. 2nd Conf. Matrix Methods in Structural Mechanics; Volume

AFFDL-TR-68-150; pp. 399-440; Air Force Flight Dynamics Laboratory, Wright Patterson Air Force Boue, OH; October 1968.

[21] Choi, Chang-Koon; Lee; Wan Hoon; “Versatile Variable Node Flat Shell Element”; J. Of Eng. Mechanics; pp. 432-441; May 1996.