

روش جدید شبکه تابع پایه شعاعی تعمیم یافته، به منظور درون‌یابی متغیرهای ناحیه‌ای در علوم زمین

امین حسین مرشدی^{۱*} و حسین معاریان^۲

^۱ استادیار، دانشکده مهندسی معدن و متالورژی، دانشگاه یزد، دانشگاه یزد، ایران
^۲ استاد، دانشکده مهندسی معدن، پردیس دانشکده‌های فنی، دانشگاه تهران، تهران، ایران

تاریخ دریافت: ۱۳۹۳/۰۷/۰۵ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۳/۱۰/۲۲

چکیده

به منظور مدل سازی فضایی یک متغیر ناحیه‌ای در یک منطقه یا سایت، ابزارهای درون‌یابی و برآوردگرهای متفاوتی مورد استفاده قرار می‌گیرد. در این پژوهش، روش درون‌یابی نوینی با استفاده از تعمیم شبکه تابع پایه شعاعی و با در نظر گرفتن مختصات و ساختار فضایی داده‌ها ارائه شده است. در این روش، به منظور درون‌یابی، ابتدا ساختار فضایی و ناهمسانگردی داده‌ها مورد بررسی قرار می‌گیرد و با رسم واریوگرام‌های جهتی، شعاع‌ها و زوایای چرخش بیضوی ناهمسانگردی تعیین می‌شود. با استفاده از بیضوی ناهمسانگردی، فضای همسایگی پیرامون هر نقطه و نقاط قرار گرفته در شعاع همسایگی گره‌های واحد پنهان مشخص می‌شود و بر پایه میانگین فاصله بین نقاط قرار گرفته در این شعاع، ماتریس کوواریانس و عامل شکل توابع انتقال به دست می‌آید. ماتریس تعمیم یافته توابع انتقال متشکل از توابع انتقال تصحیح، مختصات گره‌های واحد پنهان، برای حل ماتریس ضرایب اوزان استفاده و در پایان درون‌یابی در هر نقطه از شبکه منظم (نقاط نمونه برداری نشده) انجام می‌شود. به منظور سنجش کارایی این روش، مجموعه داده مصنوعی عیاری به صورت نامنظم در یک فضای سه‌بعدی مورد مطالعه قرار گرفت و پس از انجام همه مراحل فرایند، درون‌یابی در این فضا صورت گرفت. اعتبارسنجی متقابل میان مقادیر واقعی و درون‌یابی شده، بیانگر ضریب همبستگی ۰/۸۷ و خط برازش شده میان این مقادیر نزدیک به خط ۴۵ درجه است.

کلیدواژه‌ها: درون‌یابی، شبکه تابع پایه شعاعی (RBF)، ناهمسانگردی، ماتریس کوواریانس، عامل شکل، علوم زمین.

* نویسنده مسئول: امین حسین مرشدی

E-mail: morshedy@yazd.ac.ir

۱- پیش‌نوشتار

به داده‌های جدید ارائه شده است. امروزه، توابع پایه شعاعی در مواردی چون برآورد، مدل‌سازی، پیش‌بینی و رده‌بندی در زمینه‌های مختلف از جمله علوم زمین به کار می‌رود (Mustafa et al., 2012; Ostermann, 2011; Zhang et al., 2011; Flyer et al., 2014; Hillier et al., 2014).

پژوهش حاضر، یک روش جدید تعمیم یافته شبکه RBF را پیشنهاد می‌کند که با در نظر گرفتن ساختار فضایی و ناهمسانگردی موجود در داده‌ها، برآورد و ارزیابی را در فضای سه‌بعدی اجرا می‌کند. در این روش، ماتریس اوزان شبکه RBF از وزن هر تابع پایه شعاعی به همراه وزن تابع خطی از ویژگی مختصات هر داده ورودی تشکیل شده و شرایط ناهمسانگردی داده‌های ورودی مرتبط با متغیر ناحیه‌ای در نظر گرفته شده است. در این روش، نه تنها عامل شکل (پنهان) توابع پایه شعاعی روی هر داده ورودی می‌تواند متفاوت باشد، بلکه گسترش فضایی هر تابع پایه شعاعی، بسته به ناهمسانگردی فضایی در جهت‌های مختلف نیز می‌تواند متفاوت باشد. این مهم، توسط ابزاری چون واریوگرافی، ماتریس دوران و کوواریانس ممکن می‌شود.

۲- ساختار شبکه توابع پایه شعاعی

شبکه توابع پایه شعاعی، در ساده‌ترین حالت خود، از ۳ لایه مجزا تشکیل شده است: لایه ورودی که مجموعه‌ای از گره‌های ابتدایی (واحدهای حسی) است؛ لایه دوم که لایه‌ای پنهان با ابعاد بالاست و لایه خروجی که پاسخ شبکه را روی الگوهای فعال‌سازی به کار رفته در لایه ورودی ارائه می‌دهد. تبدیل فضای ورودی به فضای واحد پنهان، دارای رابطه غیر خطی است. در برابر آن، تبدیل فضای پنهان به فضای خروجی دارای رابطه خطی است. توجه ریاضیاتی انتخاب این توابع تبدیل توسط Cover (1965) بدین گونه بیان شده که مسئله رده‌بندی الگوی پیچیده‌ای که در یک فضای بعد بالای غیر خطی شکل گرفته است، محتمل تر است که به صورت خطی در فضای بعد پایین قابل تفکیک باشد؛ همچنین قضیه Cover در بحث جدایش الگوها،

امروزه، با افزایش کاربرد محاسبات در علوم مهندسی، کاربرد توابع ریاضی برای ارزیابی فرایندها، دارای اهمیت دو چندان شده است. بدین منظور، برای افزایش سرعت محاسبات و کاهش حافظه مورد استفاده، به کارگیری انواع تقریب توابع به جای خود توابع ریاضیاتی به صورت دقیق، اجتناب‌ناپذیر شده است. از این رو، استفاده از روش‌های تقریب توابع در علوم مختلف اهمیت دارد. شبکه‌های مبتنی بر تابع پایه شعاعی (RBF: radial basis function)، یکی از ابزار کاربردی برای تقریب توابع چندمتغیره است (Buhmann; 2003).

روش شبکه RBF، یک رویکرد شبکه عصبی با قابلیت طراحی در موضوع برازش منحنی (تقریب) در یک فضای بعد بالاست. فرایند آموزش، معادل یافتن یک تابع مناسب چندبعدی است که بهترین برازش یا انطباق را، با توجه به معیارهای آماری "بهترین برازش"، برای داده‌های آموزش تأمین کند که به طور مشابه، معادل استفاده از سطوح چندبعدی برای درون‌یابی داده‌های آموزش است. با توجه به محدودیت‌های روش‌های سنتی درون‌یابی در یک فضای چندبعدی، روش RBF مورد توجه پژوهشگران در حوزه‌های مختلف علوم قرار گرفته است. واحدهای پنهان در شبکه‌های عصبی، به صورت مجموعه‌ای از توابع به منظور ترکیب بردارهای ورودی بر پایه الگوهای تصادفی بیان می‌شوند؛ توابع مورد استفاده در این نوع شبکه‌ها، توابع پایه شعاعی است (Sahin, 1997; Haykin, 1999).

توابع پایه شعاعی برای اولین بار برای حل مسئله درون‌یابی چندمتغیره مورد استفاده قرار گرفت (Powell, 1977). در حال حاضر، مبحث یاد شده یکی از زمینه‌های اصلی پژوهش در تجزیه و تحلیل عددی است. در زمینه شبکه‌های عصبی، توابع پایه شعاعی برای اولین بار توسط Broomhead & Lowe (1988) به کار گرفته شده است. بخش عمده دیگر استفاده‌های آن، در زمینه نظریه، طراحی و کاربردهای شبکه‌های تابع پایه شعاعی است (Moody & Darken, 1989; Renals, 1989; Poggio & Girosi, 1990). در مقاله Poggio & Girosi (1990) استفاده از تئوری تنظیم برای این گروه از شبکه‌های عصبی به عنوان روشی برای بهبود تعمیم

$$f_p(x) = a_1\phi(\|x - x_1\|) + \dots + a_p\phi(\|x - x_n\|) \quad (4)$$

$$f_k(x) = a_1\phi(\|x - x_1\|) + \dots + a_k\phi(\|x - x_k\|)$$

با فرض چندبعدی بودن خروجی، تابع تعمیم داده خواهد شد؛ که بردار ضرایب $-a$ و ماتریس ضرایب $-W$ است. شبکه RBF، کمی متفاوت از حالت نمایشی، به عنوان لایه‌ای از دو نگاشت است: ابتدا ابعاد فضای نگاشت از R^k به R^n سپس به لایه خروجی R^m نگاشت می‌شود (Haykin, 1999; Zhang & Zhang, 2004).

$$x \rightarrow \begin{bmatrix} \|x - C_1\| \\ \|x - C_2\| \\ \vdots \\ \|x - C_k\| \end{bmatrix} \rightarrow \phi \left(\begin{bmatrix} \|x - C_1\| \\ \|x - C_2\| \\ \vdots \\ \|x - C_k\| \end{bmatrix} \right) \rightarrow W \begin{bmatrix} \phi(\|x - C_1\|) \\ \phi(\|x - C_2\|) \\ \vdots \\ \phi(\|x - C_k\|) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$y_h(x) = \sum_{j=1}^k W_{jh} \phi_j(\|x - C_j\|)$$

که W ، ماتریس ضرایب وزنی خروجی از لایه میانی به لایه خروجی (W_{jh}) است. با حفظ خطی بودن مسئله و با افزودن بردار بایاس $-b$ بُعد W افزایش می‌یابد. در حقیقت، زمانی که مراکز (نقاط) c_1, \dots, c_k ثابت باشند، شبکه با استفاده از داده‌ها برای یافتن ماتریس وزنی و بردار بایاس b آموزش داده می‌شود. این فرایند می‌تواند به صورت یک باره و توسط داده‌ها صورت پذیرد یا می‌توان با افزایش تعداد هسته‌های RBF، تابع وزن را در چند مرحله به روز رسانی کرد.

۴- آموزش شبکه تابع شعاع پایه

عملیات آموزش با تقسیم داده‌ها به مجموعه‌های آموزش و آزمایش آغاز می‌شود. پس از انجام آن، در مورد تعداد و قرارگیری مراکز RBF و تابع انتقال ϕ تصمیم‌گیری می‌شود. آموزش با اجرای مسئله جبر خطی برای اوزان و بایاس، با استفاده هر جفت ورودی x و هر خروجی y ، یک سیستم از معادلات تشکیل داده می‌شود. برای حل این مجموعه معادلات ماتریسی شکل را می‌توان به صورت ساده شده نوشت:

$$W\Phi = Y \quad (6)$$

که Φ یک ماتریس ترانهاده است که هر ستون آن بیانگر تابع شعاع پایه مربوط است.

$$\Phi_j = \phi_j(\|x - C_j\|) \quad (7)$$

که باید بعد ماتریس Φ را با افزودن یک در سطر نهایی (برای بخش بایاس) افزایش داد. برای بهینه‌سازی ماتریس وزن از کمینه‌سازی یک تابع مناسب خطا استفاده می‌شود. یکی از روش‌های معمول استفاده از تابع مجموع مربعات خطاست:

$$E = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{h=1}^m [y_h(x_i) - t_{h,i}]^2 \quad (8)$$

که $t_{m,n}$ مقدار هدف برای خروجی شبکه y_m است؛ زمانی که بردار ورودی شبکه x_n باشد. در پایان، ماتریس W با وارون سازی Φ به دست می‌آید:

$$W = Y\Phi^\dagger \quad (9)$$

در صورتی که دترمینان ماتریس Φ برابر صفر باشد، برای حل معادله بر پایه Φ^{-1} باید از تجزیه مقدار ویژه استفاده کرد. با استفاده از نتایج ماتریس اوزان و بایاس و با در نظر گرفتن ماتریس شبکه RBF، می‌توان مقدار متغیر در یک نقطه جدید را به دست آورد (Sahin, 1997; Haykin, 1999; Zhang & Zhang, 2004).

یکی از نکات مهم در شبکه RBF، انتخاب نوع تابع انتقال است، که بر عهده فرد مدل‌ساز است. یکی از موارد مهم، توجه به ویژگی‌ها و متغیرهای آماری داده‌هاست. برای نمونه در حالتی که نوع RBF، گوسی باشد، عرض آن تابع دارای اهمیت است که باید به گونه‌ای انتخاب شود که از فاصله میان نقاط داده بزرگ‌تر و از بعد داده‌ها کوچک‌تر باشد. یکی از مسائل دیگر در طراحی شبکه‌های RBF، تعداد مراکز مورد استفاده در لایه میانی است. انتخاب تعداد این مراکز رابطه مستقیم با دقت و پیچیدگی

دلیل دیگر را وجود فضای واحد پنهان با بعد بالا در شبکه RBF بیان کرده است (Cover, 1965; Sahin, 1997).

شبکه RBF، به عنوان یک شبکه عصبی، شامل سه لایه ورودی، میانی و خروجی است. لایه ورودی با وجود گره‌های زیاد، دارای ابعاد بالاست. لایه میانی دارای n گره، با مرکز C_n است و فرایندی که در لایه میانی صورت می‌گیرد این است که ابتدا فاصله بردار ورودی از مرکز متناظر محاسبه، تابع انتقال ϕ transfer function اعمال و سپس مقدار عددی حاصل از لایه خروجی y عبور داده می‌شود. آخرین لایه دارای تبدیل خطی است که یک ترکیب خطی از مقادیر لایه میانی است. در مورد بردارهای C به عنوان مراکز RBF، n (تعداد گره‌های لایه میانی) معمولاً بسیار کمتر از m (تعداد نقاط داده‌های ورودی) است (Haykin, 1999؛ شکل ۱).

۳- مدل سازی عددی شبکه تابع پایه شعاعی

الگوریتم RBF، یک تابع از فاصله نقطه مورد نظر تا مرکز واحد میانی است؛ تابع ϕ را یک تابع پایه شعاعی گویند در صورتی که $\phi(x) = \phi(\|x\|)$. بنابراین، این تابع ϕ می‌تواند روی بردار در فضای R^n اعمال شود، اما تنها در قالب فاصله بیان می‌شود. این بدین معنی است که ϕ را می‌توان به عنوان یک تابع عددی در نظر گرفت. این مباحث، کاربرد ماتریس فاصله اقلیدسی Euclidean distance matrix با استفاده از تابع ϕ را بیان می‌کند (Baxter, 1991).

$$EDM = \begin{bmatrix} \|x_1 - x_1\| & \|x_1 - x_2\| & \dots & \|x_1 - x_n\| \\ \|x_2 - x_1\| & \|x_2 - x_2\| & \dots & \|x_2 - x_n\| \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \|x_n - x_1\| & \|x_n - x_2\| & \dots & \|x_n - x_n\| \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$f(x) = a_1\phi(\|x - x_1\|) + \dots + a_n\phi(\|x - x_n\|) \quad (2)$$

که تابع برآوردگر $f(x)$ ، $[a_1, \dots, a_n]$ ضرایب ثابت تابع و ϕ نوعی تابع غیر خطی در فضای $R \rightarrow R^+$ است که اشاره به تابع انتقال دارد. برخی از توابع انتقال پایه شعاعی ϕ افزون بر بستگی به تابع فاصله، به عامل شکل (ε) نیز وابسته هستند که بستگی به میزان کشیدگی و پهن‌شدگی تابع دارد که رابطه آن با انحراف معیار توزیع عادی (σ) به صورت $\varepsilon^2 = 1/2\sigma^2$ است. در جدول ۱، تعدادی از توابع کاربردی پایه شعاعی به همراه روابط ریاضی آنها ارایه شده است (Wright, 2003; Fornberg & Piret, 2008).

برای تبدیل تابع عددی ϕ به ماتریس Φ ، می‌توان از تبدیل درایه‌ها به صورت $\phi(A)_{ij} = \phi(A_{ij})$ استفاده کرد. که تابع ϕ روی ماتریس فاصله اقلیدسی اعمال می‌شود، و نتیجه آن به عنوان ماتریس انتقال نامیده می‌شود. اکنون می‌توان تأثیر تابع انتقال روی تقریب شعاعی را بررسی کرد. زمانی که نوع تابع انتقال تعیین شد، با استفاده از حل تعداد p معادله، روی داده‌های ورودی (x_1, x_2, \dots, x_n) ، می‌توان ضرایب a_1, \dots, a_n را به دست آورد:

$$\begin{aligned} a_1\phi(\|x_1 - x_1\|) + \dots + a_p\phi(\|x_1 - x_n\|) &= y_1 \\ a_1\phi(\|x_2 - x_1\|) + \dots + a_p\phi(\|x_2 - x_n\|) &= y_2 \\ &\vdots \\ a_1\phi(\|x_p - x_1\|) + \dots + a_p\phi(\|x_p - x_n\|) &= y_m \end{aligned} \quad (3)$$

این مجموعه تا زمانی برقرار است که بردارهای $x_i \neq x_j$ برای $i \neq j$ و ماتریس حاصل از مجموعه معادلات، وارون‌پذیر باشد. به منظور برقراری توازن دقت در برابر پیچیدگی، می‌توان از تمام نقاط داده p در این مدل استفاده کرد یا این که تعداد k نقطه، c_1, \dots, c_k را برای مرکز RBF در نظر گرفت؛ که $k \ll n$ است.

مراکز برابر در نظر گرفته شود. برای تعیین عرض تابع پایه شعاعی گوسی، می توان از بررسی ابعاد فضای داده های ورودی (حجم فضای قرارگیری داده ها) به شمار داده های ورودی استفاده کرد:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (d_{i,\max} - d_{i,\min})}{n}} \quad (13)$$

که n تعداد داده های ورودی، N تعداد بعد فضایی که درون یابی در آن صورت می گیرد و $d_{i,\max}$ و $d_{i,\min}$ مقدار بیشینه و کمینه در بعد i ام هستند. عرض تابع گوسی (σ) به دست آمده از معادله ۱۳، در مواردی کاربرد دارد که داده های ورودی به صورت یکنواخت و همسانگرد در فضا پراکنده شده باشند. معیار دیگری برای تعیین عرض تابع گوسی توسط (Haykin, 1999)، بر پایه فاصله بیشینه میان مراکز لایه میانی (d_{\max}) و شمار مراکز لایه میانی (k) ارایه شده است.

$$\sigma = \frac{d_{\max}}{\sqrt{2k}} \quad (13)$$

۷- بررسی عرض واحدهای لایه میانی در فضای ناهمسانگرد

وجود ساختارهای زمین شناسی همچون ناپیوستگی، گسل و تغییر سازند، ضرورت بررسی ناهمسانگردی در داده ها را موجب می شود (Wingle, 1997). در یک سامانه نمونه برداری، معمولاً همه فضا به یک اندازه در دسترس و دارای یک درجه اهمیت نیست. از سوی دیگر یکی از شرایط درستی نمونه برداری، ایجاد یک فضای هم احتمال به منظور نمونه برداری است. در بسیاری از موارد، با توجه به ساختار و پیوستگی فضایی، شبکه نمونه برداری به صورت نامنظم طراحی می شود؛ با وجود این شرایط، نمی توان از عرض برابر برای همه نقاط استفاده کرد. بر این اساس، در مواردی که شبکه نمونه برداری نامنظم باشد، عرض واحدهای لایه میانی را باید با در نظر گرفتن پراکندگی و چگالی نمونه ها تعیین کرد. در مناطق چگال تر، عرض توابع پایه شعاعی کوچک تر و در مناطق با چگالی کمتر، عرض توابع پایه شعاعی بزرگ تر می شود. در شکل ۲، اهمیت تفاوت فاصله ساختار فضایی نسبت به اقلیدسی در فضای زمین شناسی نشان داده شده است.

۷-۱. تعیین بیضی ناهمسانگردی و دوران آن

واریوگرافی به منظور تعیین ساختار فضایی و تشخیص ناهمگنی هایی که موجب بروز ناهمسانگردی فضایی می شود، مورد استفاده قرار می گیرد. ناهمسانگردی به تغییرات دامنه تأثیر و یا سقف واریوگرام در جهت های مختلف گفته می شود که به دو صورت هندسی و منطبقه ای وجود دارد. در فضای همسانگرد، واریوگرام های رسم شده در همه جهت ها همانند هستند؛ ولی در فضای ناهمسانگرد، واریوگرام های رسم شده در جهت های مختلف بسته به نوع ناهمسانگردی دارای شعاع های تأثیر و یا سقف های متفاوتی خواهند بود. برای شناخت ناهمسانگردی در یک محیط خاص، ابتدا واریوگرام ها در جهت های مختلف رسم شده، سپس به دامنه های تأثیر در فضای سه بعدی، یک بیضی برازش داده می شود تا دامنه تأثیر را به عنوان تابعی از جهت نشان دهد (حسین مرشدی و معماریان، ۱۳۹۱). برای نمایش بیضی، تعیین ۳ زاویه چرخش و ۳ دامنه تأثیر، یا نسبت قطر بزرگ بیضی ناهمسانگردی به قطر کوچک آن و نسبت قطر بزرگ بیضی ناهمسانگردی به قطر متوسط آن (ضرایب ناهمسانگردی) ضروری است (Myers & Journel, 1990; Webster & Margaret, 2007). در روش پیشنهادی، عرض تابع انتقال پایه شعاعی بر پایه تابع کوواریانس و با استفاده از مدل سازی واریوگرام به دست می آید. این نکته را باید یادآور شد که از دید روابط ریاضی، توابع انتقال با مدل های واریوگرام شباهت دارند (Lin & Chen, 2004).

پس از مدل سازی واریوگرافی جهت، روی شعاع های تأثیر در فضای سه بعدی، یک بیضی (بیضی ناهمسانگردی) برازش داده می شود تا شعاع تأثیر را به عنوان تابعی از جهت نشان دهد. بدین منظور ابتدا لازم است موقعیت بیضی

شبکه دارد، بنابراین این مراکز باید به گونه ای انتخاب شود که توازن میان دقت مورد نظر و پیچیدگی برقرار شود (Rippa, 1999; Haykin, 1999; Lin & Chen, 2004).

۵- درون یابی شبکه تابع پایه شعاعی

در مواردی که از توابع پایه شعاعی برای درون یابی استفاده می شود، به منظور دستیابی به دقت بالا، تعداد مراکز با بعد داده های ورودی برابر در نظر گرفته می شود. برای انجام درون یابی می توان از روش RBF تعمیم یافته استفاده کرد که به ساختار اولیه RBF، تابع چندجمله ای $p(x)$ از درجه q افزوده می شود که به صورت زیر بیان می شود (Wright, 2003):

$$f = \sum_{i=1}^n W_i \phi(\|x - x_i\|) + \sum_{l=1}^{M(q)} a_l p_l(x) \quad (10)$$

که p_l به طوری که $l = 1, \dots, M$ ، چندجمله ای از درجه q (معمولاً خطی) را تشکیل می دهد. معادلات برای تعیین ضرایب W و a به صورت زیر بیان می شود:

$$\sum_{i=1}^n W_i \phi(\|x_j - x_i\|) + \sum_{l=0}^M a_l p_l(x_j) = f_j, \quad j = 1, \dots, n \quad (11)$$

$$\sum_{i=1}^n W_i p_l(x_i) = 0, \quad l = 1, \dots, M$$

ساختار معادلات RBF تعمیم یافته، در صورتی که بخواهیم به صورت ماتریسی و برای درون یابی فضای سه بعدی مورد استفاده قرار بگیرد، بدین صورت است (Hillier et al., 2014; Skala, 2010):

$$\begin{bmatrix} \phi_{1,1} & \dots & \phi_{1,N} & x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \phi_{N,1} & \dots & \phi_{N,N} & x_n & y_n & z_n & 1 \\ x_1 & \dots & x_n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ y_1 & \dots & y_n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ z_1 & \dots & z_n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_1 \\ \vdots \\ W_n \\ a_x \\ a_y \\ a_z \\ a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$\begin{bmatrix} B & P \\ P^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow Ax = b$$

$$\sum_{l=0}^M a_l p_l(x_j) = a^T x_j + a_0 = a_0 + a_x x_j + a_y y_j + a_z z_j$$

برای حالتی که درون یابی در یک فضای سه بعدی و با استفاده از n نقطه صورت پذیرد، یک مجموعه ماتریس RBF شامل $n+4 \times n+4$ وجود خواهد داشت که با حل آن ماتریس وزن به دست می آید.

۶- بررسی عامل شکل (عرض) در توابع پایه شعاعی

در طراحی شبکه های تابع پایه شعاعی، در بیشتر موارد شمار واحدهای لایه مرکزی به طور قابل توجهی کمتر از شمار داده های ورودی است؛ ولی در حالت درون یابی با استفاده از تابع پایه شعاعی، شمار مراکز لایه میانی با ابعاد داده های ورودی برابر و مراکز آن منطبق داده های ورودی است. در مواردی که تابع انتقال به متغیری جز تابع فاصله وابسته است، برای نمونه تابع گوسی (به متغیر σ نیز وابسته است) و به دلیل اینکه در بسیاری از مدل ها داده ها به صورت گوسی (عادی) فرض می شوند، تعیین عرض تابع دارای اهمیت است. در اینجا، عامل عرض تابع مشخصه نرمی و کشیدگی تابع انتقال را کنترل می کند. زمانی که عرض تابع کوچک باشد، فضای مرتبط و نمایندگی تابع نیز کوچک است، بنابراین شمار زیادی از مراکز برای آموزش مورد نیاز است. در برابر آن، در صورتی که فضای مرتبط و نماینده تابع گسترده باشد، دقت برآورد کاهش می یابد (Rippa, 1999; Haykin, 1999; Lin & Chen, 2004; Fornberg & Piret, 2008).

در روش های درون یابی با استفاده از تابع پایه شعاعی متداول است که عرض همه

است. سپس برای هر یک از گره‌ها، بر پایه ماتریس کوواریانس و ساختار داده‌ها، تابع انتقال گوسی به دست می‌آید و ماتریس تعمیم یافته توابع انتقال با استفاده از مختصات استاندارد شده در بازه ۱- تا ۱ و مقادیر تابع انتقال گوسی تشکیل می‌شود. در مرحله بعد، به ماتریس وزنی گره‌ها، با استفاده از عملیات جبری روی ماتریس، مقادیر عیاری ۱۰۰ داده می‌شود و ماتریس تعمیم یافته توابع انتقال، به دست می‌آید. به منظور درون‌یابی، شبکه منظم با فواصل ۱۰ متر در ۳ بعد تشکیل و درون‌یابی شبکه تابع پایه شعاعی برای هر یک از ۱۰۰۰ نقطه این شبکه منظم انجام شد که در شکل ۷، مدل سه‌بعدی درون‌یابی شده عیار نمایش داده شده است.

به منظور ارزیابی و اعتبارسنجی الگوریتم، می‌توان داده‌ها را به صورت تک به تک یا به صورت دسته‌بندی شده از لایه ورودی بیرون آورد و با استفاده از باقیمانده نقاط، برآورد را در مختصات نقطه (نقاط) خروجی انجام داد. در مطالعه حاضر، با توجه به شمار محدود نقاط لایه ورودی، نقاط تک به تک از لایه ورودی بیرون آورده و درون‌یابی انجام شد که خط برازش شده بر داده‌های برآوردی نسبت به داده‌های واقعی نزدیک به خط ۴۵ درجه و دارای ضریب همبستگی ۰/۸۷ است (شکل ۸).

۹- بحث

در این پژوهش، الگوریتمی با یک رویکرد نوین در زمینه درون‌یابی متغیرهای ناحیه‌ای در علوم زمین ارائه شده است. نوآوری الگوریتم پیشنهادی را می‌توان به دو بخش تقسیم کرد. بخش اول مربوط به ماتریس RBF است که به صورت تعمیم یافته ارائه شده و مختصات واحدهای میانی به صورت یک تابع خطی در حل جبری ماتریس به کار رفته است. در بخش دوم نوآوری، چگونگی تعیین عامل شکل RBF مورد بحث قرار گرفته که ناهمسانگردی فضایی داده‌ها در نظر گرفته شده است. به جای حالت مرسوم که یک عدد ثابت برای عامل شکل RBF (تابعی از واریانس برای حالت گوسی) تعیین می‌شود، در حالت سه‌بعدی عامل شکل (برای نمونه) به صورت یک ماتریس کوواریانس 3×3 بر پایه ۳ زاویه چرخش و ۳ شعاع بیضوی ناهمسانگردی و واریوگرافی جهت‌تعیین شده. ماتریس کوواریانس (بیضوی ناهمسانگردی) و RBF برای هر واحد میانی بر پایه میانگین فاصله نقاط قرار گرفته در شعاع همسایگی واحد میانی، به صورت محلی مقیاس و تصحیح می‌شود. در شکل ۹ مراحل مختلف اجرای درون‌یابی شبکه RBF تعمیم یافته نشان داده شده است.

۱۰- نتیجه گیری

در روش درون‌یابی شبکه تابع پایه شعاعی تعمیم یافته، مختصات گره‌های لایه میانی به عنوان جزئی از ماتریس تعمیم یافته توابع انتقال در حل ماتریس ضرایب اوزان استفاده و ابعاد لایه میانی برابر با لایه ورودی در نظر گرفته شد.

در روش ارائه شده، توابع انتقالی مانند تابع گوسی که در برگیرنده عامل شکل است، عامل شکل در هر گره از لایه میانی بر پایه آرایش داده‌های شعاع همسایگی، متفاوت تعیین و متغیرهای ناهمسانگردی در تابع شکل در نظر گرفته شد.

برای به دست آوردن عامل شکل در توابع انتقال، ساختار فضایی و ویژگی‌های ناهمسانگردی داده‌ها با استفاده از واریوگرافی جهت‌تعیین استخراج شد و با توجه به متغیرهای بعدی و جهت‌تعیین بیضوی ناهمسانگردی و نقاط قرار گرفته در شعاع همسایگی، ماتریس کوواریانس و عامل شکل تابع انتقال شعاع پایه به دست آمد.

به منظور اعتبارسنجی روش ارائه شده، از مجموعه داده مصنوعی استفاده شد که به صورت نامنظم در یک فضای سه‌بعدی نمونه‌برداری شده است. درون‌یابی با استفاده از شبکه تابع پایه شعاعی تعمیم یافته انجام شد که دارای ضریب همبستگی بالایی ۰/۸۷ میان داده‌های واقعی و برآوردی و نزدیک به خط ۴۵ درجه است.

$$\phi_G(\|x - x_i\|) = \exp\left[-\frac{1}{2}(x - x_i)^T \Sigma_i^{-1}(x - x_i)\right] \quad (21)$$

۶) همه مراحل مرتبط با درون‌یابی شبکه تابع پایه شعاعی با استفاده از تابع به دست آمده انجام می‌شود.

۸- کاربرد روی داده‌های مصنوعی

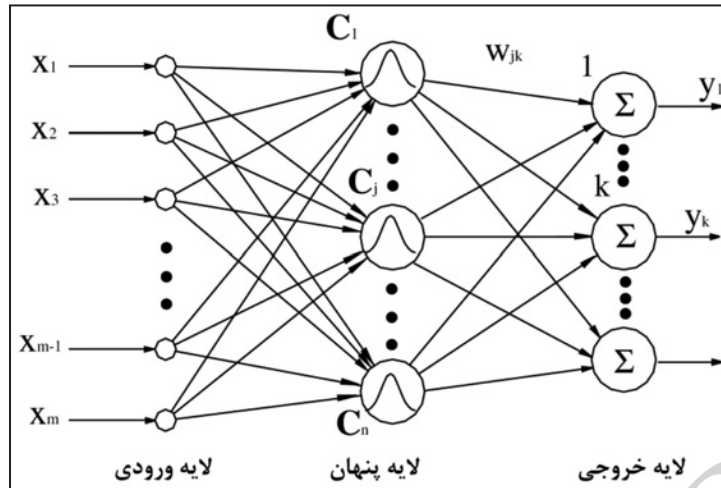
برای ارزیابی روش ارائه شده، مجموعه‌ای از داده‌های مصنوعی بر پایه توزیع فضایی نامنظم، توزیع آماری غیرعادی با فراوانی محدود نمونه‌های کرانی و چگالی فضایی مناسب نمونه‌ها تولید شد. این مجموعه داده‌های عیار ماده معدنی، از یک فضای سه‌بعدی به حجم $100 \times 100 \times 100$ متر مکعب برداشت شده است. در این مدل مصنوعی، ۱۰۰ نمونه به صورت نامنظم و تصادفی برداشت شده‌اند. مقادیر عیار این نمونه‌ها، دامنه‌ای میان ۰ تا ۱۰۰ درصد با میانگین تقریبی ۵۰ درصد دارد. در شکل ۴، بخش الف توزیع دونمایی این داده‌های مصنوعی در فضای سه‌بعدی و در بخش ب، نمودار توزیع فراوانی عیار نمونه‌ها نمایش داده شده است.

برای بررسی ساختار فضایی و تعیین ویژگی‌های ناهمسانگردی این داده‌ها، واریوگرافی جهت‌تعیین سه‌بعدی در راستاهای مختلف صورت گرفت و مدل‌ها روی واریوگرام‌های تجربی برازش داده شد. در جهت اصلی ناهمسانگردی که بیشترین پیوستگی را دارد، مدل کروی واریوگرام (استاندارد شده) دارای بخش ساختاردار قابل توجهی نسبت به بخش تصادفی (اثر قطعه‌ای) است (شکل ۵- الف). بر پایه واریوگرام‌های به دست آمده در جهت‌های مختلف و تغییرات شعاع تأثیر در راستاهای متفاوت، می‌توان بیضوی ناهمسانگردی را مدل سازی کرد. در شکل‌های ۵- ب تا ه، شکل سه‌بعدی بیضوی ناهمسانگردی و تصویر بیضوی ناهمسانگردی به همراه نقشه واریوگرام نمایش داده شده است. این بیضوی ناهمسانگردی، توسط متغیرهای ۳ شعاع بزرگ، متوسط و کوچک و ۳ زاویه آزیموت، شیب و میل مشخص شده است.

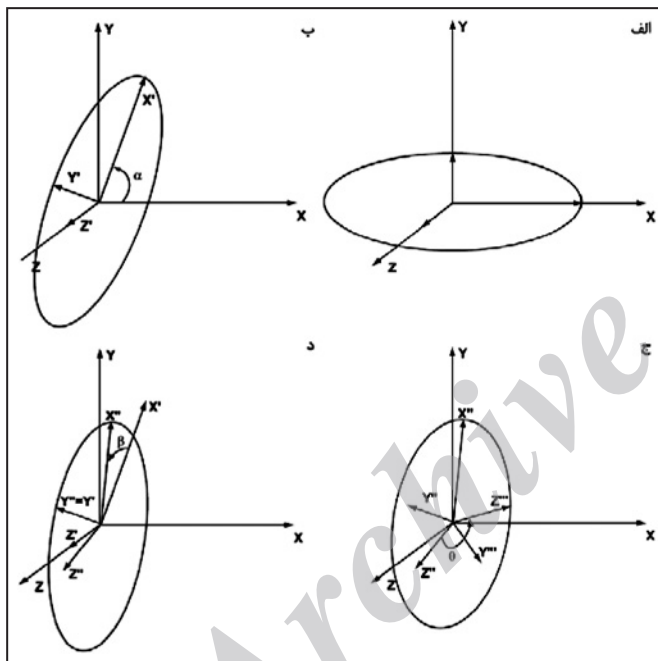
بیضوی ناهمسانگردی، فضای همسایگی نقطه مورد برآورد را بررسی می‌کند و بیانگر این است که کدام نقاط در شعاع همسایگی نقطه مورد برآورد قرار می‌گیرند. مرکز بیضوی ناهمسانگردی روی گره‌های لایه میانی شبکه تابع پایه شعاعی قرار گرفتند و بر پایه شعاع و زوایای چرخش، نقاط شعاع همسایگی مرتبط با هر گره لایه میانی مشخص شد. با توجه نقاط همسایگی و بر پایه نصف میانگین فاصله نقاط شعاع همسایگی، ضریب تصحیح و شعاع‌های تصحیح شده با توجه به رابطه ۱۹ به دست می‌آید. بنابراین برای هر گره لایه میانی، بیضوی تعریف می‌شود که از دید خواص جهت‌یکسان، ولی از دید متغیرهای جهت‌تعیین با در نظر گرفتن ضرایب ناهمسانگردی و فواصل همسایگی، می‌توان برای هر یک از بیضوی‌ها ماتریس کوواریانس را به دست آورد.

برای تعیین ماتریس کوواریانس، از ویژگی‌های بیضی ناهمسانگردی استفاده می‌شود. حالتی که چرخش زوایا به صورت پادساعت‌گرد و بزرگ‌ترین شعاع بیضوی روی محور X منطبق باشد، نسبت به حالتی که چرخش زوایا به صورت ساعت‌گرد و بزرگ‌ترین شعاع بیضوی روی محور Y منطبق باشد، دارای اختلاف فاز در آزیموت، حالت قرینه در شیب و زاویه میل یکسان است. در شکل ۶، تعیین یک ماتریس کوواریانس 3×3 بیضوی ناهمسانگردی با متغیرهای مقدار ویژه $(\lambda_1 = 38, \lambda_2 = 33, \lambda_3 = 27)$ و متغیرهای جهت $(\psi^{12} = 75^\circ, \psi^{13} = 50^\circ, \psi^{23} = 80^\circ)$ نمایش داده شده است. ماتریس کوواریانس به صورت تابعی از عامل شکل در توابع انتقال قابل بسط است.

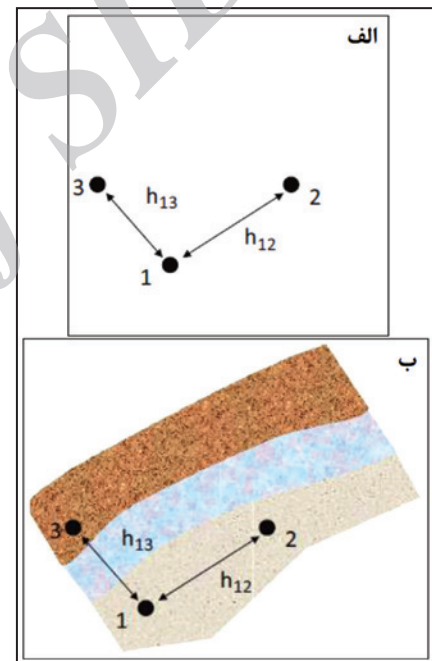
در روش درون‌یابی شبکه تابع پایه شعاعی، شمار گره‌های لایه میانی برابر با بعد لایه ورودی است که برای مجموعه داده مصنوعی مورد مطالعه برابر با ۱۰۰



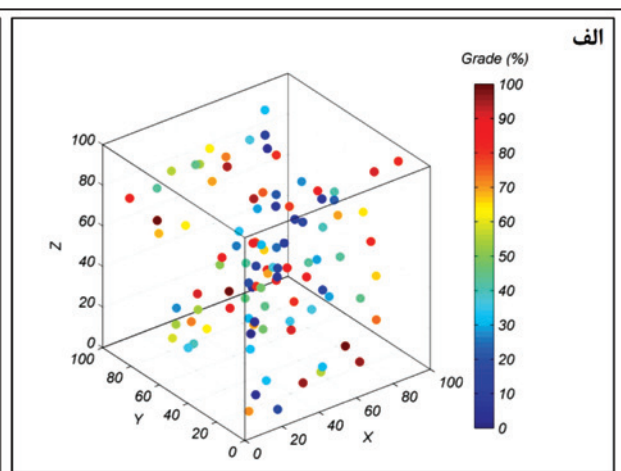
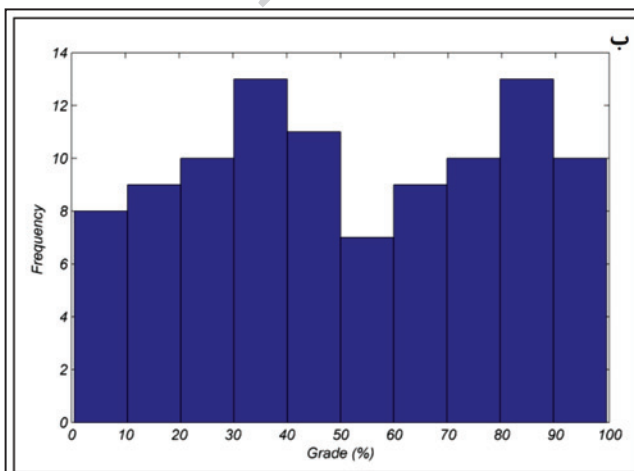
شکل ۱- نمایش تصویری شبکه رایج RBF.



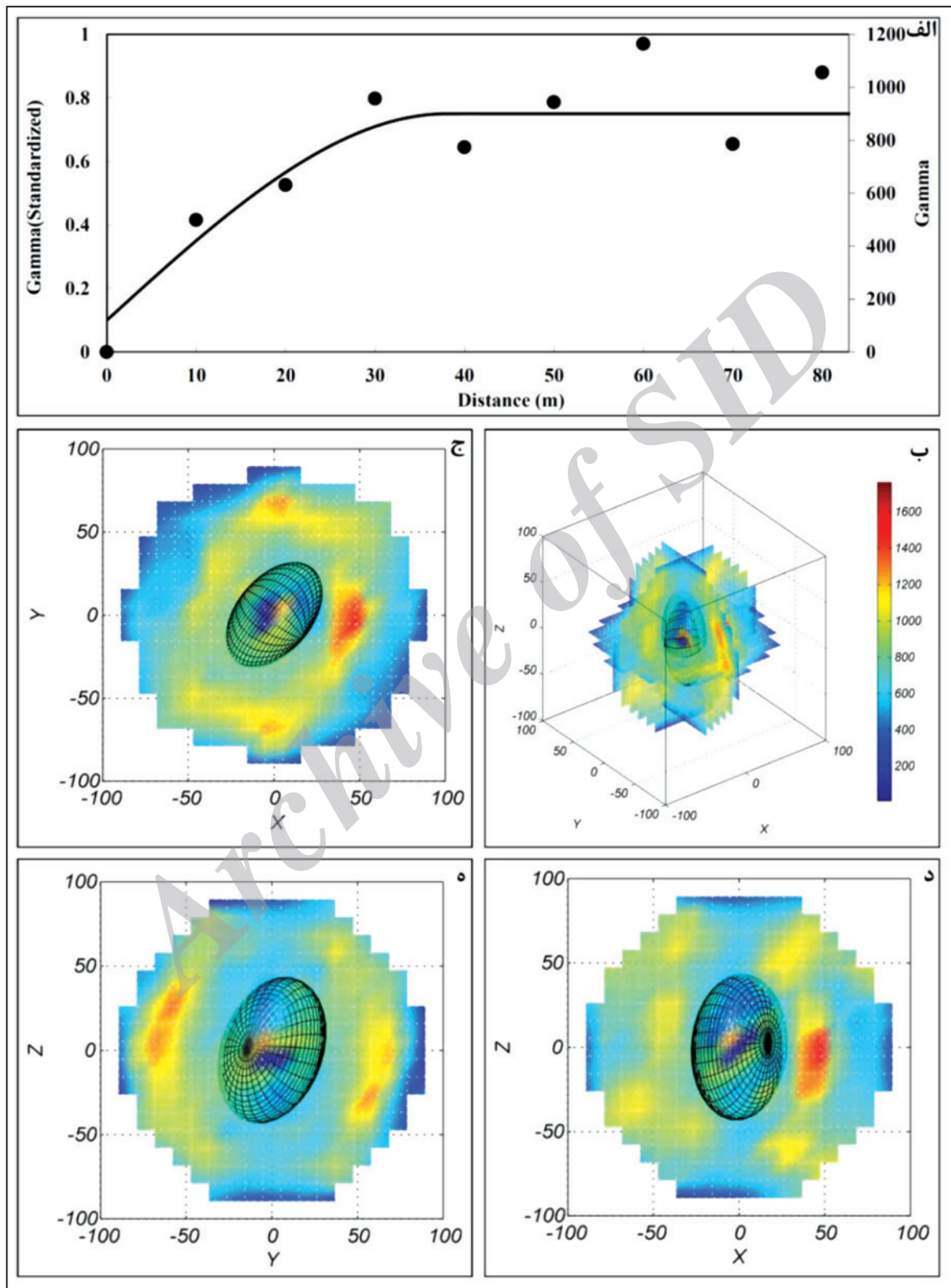
شکل ۳- نمایش بیضوی در حالت: الف) ثابت؛ ب) دوران در امتداد Z؛ ج) دوران در امتداد Y؛ د) دوران در امتداد X (Remy, 2004).



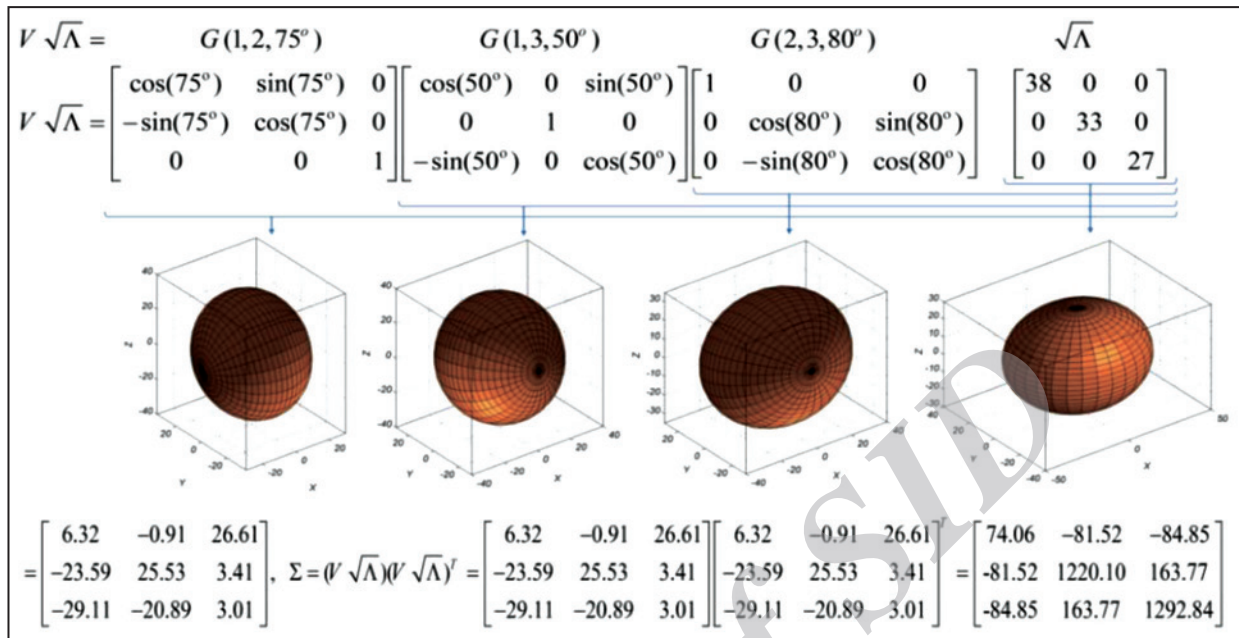
شکل ۲- مقایسه میان فواصل: الف) اقلیدسی؛ ب) واریوگرام (Caers, 2011).



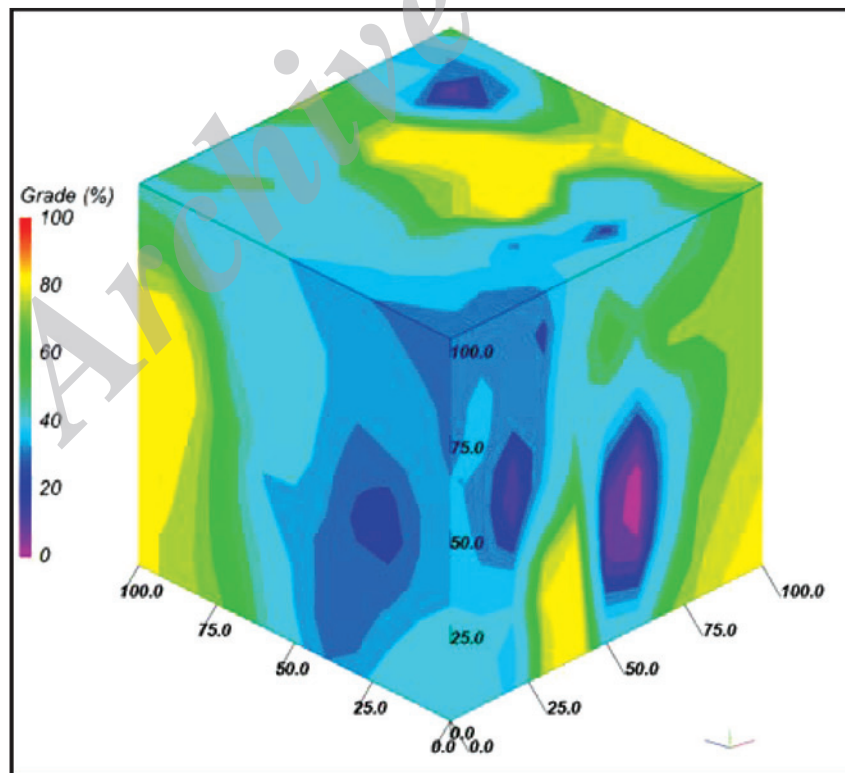
شکل ۴- الف) مجموعه داده مصنوعی در فضای سه بعدی؛ ب) توزیع فراوانی عیار مجموعه داده مصنوعی.



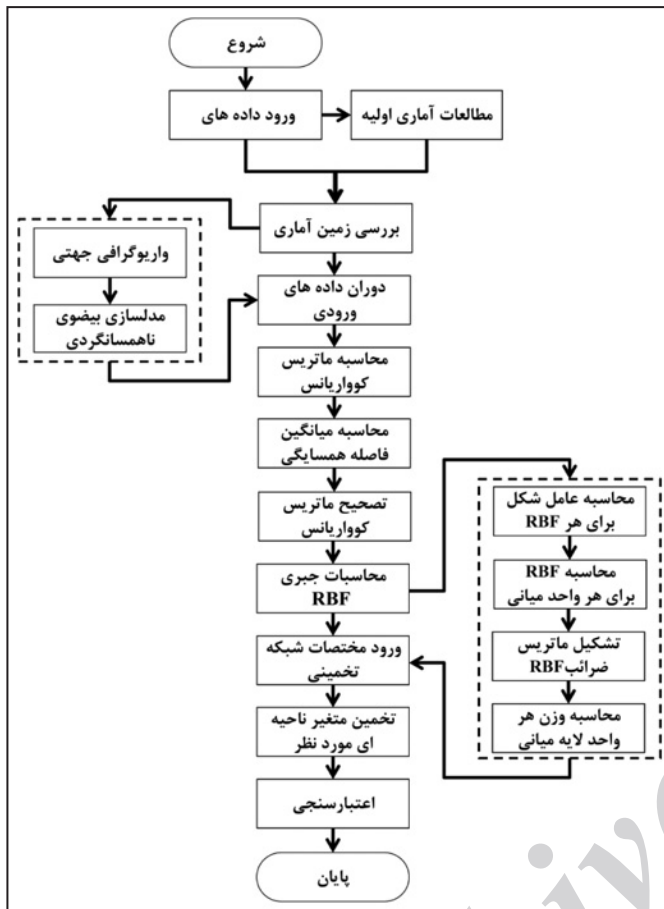
شکل ۵- الف) واریوگرافی به همراه مدل برازش شده در جهت اصلی: نمایش بیضوی ناهمسانگردی؛ ب) سه بعدی؛ ج) XY؛ د) XZ؛ ه) YZ.



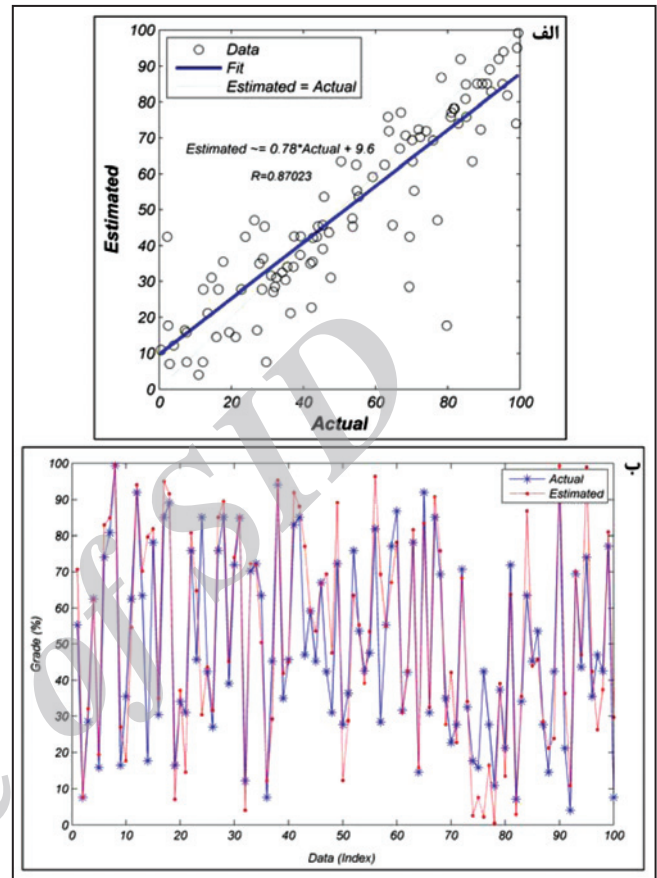
شکل ۶- نمایش چگونگی محاسبه ماتریس کوواریانس برای مجموعه داده مصنوعی.



شکل ۷- مدل سازی سه بعدی درونیابی شبکه تابع پایه شعاعی مجموعه داده مصنوعی.



شکل ۹- فرایند انجام درون یابی شبکه RBF تعمیم یافته برای متغیر ناحیه ای در علوم زمین.



شکل ۸- الف) نمودار اعتبارسنجی مقاطع مقادیر واقعی و برآوردی؛ ب) مقایسه مقادیر واقعی و برآوردی عیار.

جدول ۱- توابع انتقال مورد استفاده در تابع پایه شعاعی.

نام تابع	رابطه ریاضیاتی
خطی (همانی)	$\phi(r) = r$
مکعبی	$\phi(r) = r ^3$
صفحه باریک	$\phi(r) = r^2 \ln r $
گوسی	$\phi(r, \varepsilon) = e^{-(\varepsilon r)^2}$
کشی	$\phi(r, \varepsilon) = \frac{1}{1 + \varepsilon r}$
ربعی وارون	$\phi(r, \varepsilon) = \frac{1}{1 + (\varepsilon r)^2}$
چندربعی	$\phi(r, \varepsilon) = \sqrt{1 + (\varepsilon r)^2}$
چندربعی وارون	$\phi(r, \varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\varepsilon r)^2}}$

کتابنگاری

حسین مرشدی، ا. و معماریان، ح.، ۱۳۹۱- پهنه‌بندی شاخص کیفی سنگ در ساختگاه سد سمیلان، براساس گسل‌ها و شبکه عصبی خودسازمانده، با استفاده از کریجینگ و شبکه عصبی، فصلنامه علمی- پژوهشی علوم زمین، شماره ۸۴، ص. ۹۹-۱۱۲.

References

- Ari, Ç., Aksoy, S. & Arıkan, O., 2012- Maximum likelihood estimation of Gaussian mixture models using stochastic search. *Pattern Recognition*. 45, 2804–2816.
- Baxter, B. J., 1991- Conditionally positive functions and p-norm distance matrices. *Constructive Approximation*. 7, 427–440.
- Broomhead, D. S. & Lowe, D., 1988- Multivariable Functional Interpolation and Adaptive Networks. *Complex Systems*. 2, 321-355.
- Buhmann, M. D., 2003- Radial basis functions: theory and implementations. Cambridge University Press, New York.
- Caers, J., 2011- Modeling Uncertainty in the Earth Sciences. Wiley-Blackwell, Chichester.
- Cover, T. M., 1965- Geometrical and Statistical Properties of Systems of Linear Inequalities with Applications in Pattern Recognition. *IEEE Transactions on Electronic Computers EC*. 14, 326-334.
- Deutsch, C. V. & Journel, A. G., 1998- GSLIB - Geostatistical Software Library and User's Guide, Second ed. Oxford University Press, Oxford, New York.
- Flyer, N., Wright, G. B. & Fornberg, B., 2014- Radial basis function-generated finite differences: A mesh-free method for computational geosciences. *Handbook of Geomathematics*. Springer, Berlin.
- Fornberg, B. & Piret, C., 2008- On choosing a radial basis function and a shape parameter when solving a convective PDE on a sphere. *J. Comput. Phys*. 227, 2758–2780.
- Golub, G. H. & Van Loan, C. F., 1996- Matrix Computations, 3rd ed.. Johns Hopkins University Press.
- Haykin, S., 1999- Neural Networks: A Comprehensive Foundation. 2nd edition. Prentice-Hall, New Jersey.
- Hillier, M. J., Schetselaar, E. M., de Kemp, E. A. & Perron, G., 2014- Three-Dimensional Modelling of Geological Surfaces Using Generalized Interpolation with Radial Basis Functions. *Mathematical Geosciences*, 1-23.
- Lin, G. F. & Chen, L. H., 2004- A spatial interpolation method based on radial basis function networks incorporating a semivariogram model. *Journal of Hydrology*. 288, 288–298.
- Moody, J. E. & Darken, C. J., 1989- Fast Learning in Networks of Locally-Tuned Processing Units. *Neural Computation*. 1, 281-294.
- Mustafa, M. R., Rezaur, R. B., Rahardjo, H. & Isa, M. H., 2012- Prediction of pore-water pressure using radial basis function neural network. *Engineering Geology*, 135, 40-47.
- Myers, D. E. & Journel, A. G., 1990- Variograms with zonal anisotropies and noninvertible kriging systems. *Mathematical Geology*. 22, 779-785.
- Ostermann, I., 2011- Modeling heat transport in deep geothermal systems by radial basis functions. PhD Thesis, TU Kaiserslautern, Geomathematics Group, Dr. Hut Verlag, Munich, Germany.
- Poggio, T. & Girosi, F., 1990- Networks for Approximation and Learning. *Proceedings of the IEEE*. 78, 1481-1497.
- Powell, M. J. D., 1977- Restart Procedures for the Conjugate Gradient Method. *Mathematical Programming*. 12, 241-254.
- Remy, N., 2004- Geostatistical Earth Modeling Software: User's Manual. Stanford University, CA.
- Renals, S., 1989- Radial Basis Function Network for Speech Pattern Classification. *Electronics Letters*. 25, 437-439.
- Rippa, S., 1999.-An algorithm for selecting a good value for the parameter c in radial basis function interpolation. *Adv. Comput. Math*. 11, 193–210.
- Sahin, F., 1997- A radial basis function approach to a color image classification problem in a real time industrial application. Ph.D. Thesis, Polytechnic Institute of Virginia.
- Skala, V., 2010- Progressive RBF Interpolation. *Afrigraph 2010 proceedings*, 17-20, ACM.
- Webster, R. & Margaret, A., 2007- Geostatistics for Environmental Scientists, second ed. John Wiley & Sons Ltd, Chichester.
- Wingle, W. L., 1997- Evaluating Subsurface Uncertainty Using Modified Geostatistical Techniques. Degree of Doctor of Philosophy (Geological Engineer), Colorado School of Mines, 180 pp.
- Wright, G. B., 2003- Radial basis function interpolation: numerical and analytical developments. Ph.D. thesis. University of Colorado, Boulder.
- Zhang, A. & Zhang, L., 2004- RBF neural networks for the prediction of building interference effects. *Comput Struct*. 82, 2333–2339.
- Zhang, M., Wang, K., Zhang, C., Chen, H., Liu, H., Yue, Y., Luffman, I. & Qi, X., 2011- Using the radial basis function network model to assess rocky desertification in northwest Guangxi, China. *Environmental Earth Sciences* 62, 69-76.