روشی برای مدل سازی برخورد غیرخطی و بدون اصطکاک اجسام به‌روش المان محدود*

کسری فراهانی[۱] ابوالحسن وفایی[۲] مسعود مفید[۳]

چکیده در این مقاله، روشی کلی برای حل عددی مسائل تماس - برخورد بدون اصطکاک دو جسم غیرصلب بر مبنای روش المان محدود به نام "روش المانهای متحد" ارائه گردیده است. در حوزه علم مکانیک و سازه، مسئله تماس - برخورد از جمله مشکلترین مسائل محسوب می‌شود، چراکه افزون بر وجود عوامل غیرخطی مادی و هندسی، آخرین عامل غیرخطی ممکن در مکانیک سازه، یعنی تغییر در شرایط مرزی نیز وارد مسئله می‌شود و اصولاً شرایط مرزی، خود به عنوان قسمتی از حل مسئله به دست می‌آید. روشهای معمول برای حل این‌گونه مسائل عمدتاً ریشه در دو روش ضرایب لاگرانژ و تابع جریمه دارند و در هرکدام از آنها سعی می‌شود که شرط تماس به همراه معادلات تعادل و شرایط مرزی به طور همزمان ارضاء گردد. هرکدام از این دو روش از لحاظ ریاضی و نیز محاسباتی دارای کمبودهای ذاتی است که ریشه در نوع اعمال شرایط مرزی تماس دارد. بنابراین در این کار سعی شده است تا با استفاده از مفاهیم فیزیکی و با تکیه بر اصول مکانیک، روش دیگری برای حل مسائل تماس-برخورد بکار برده شود که هم برای برنامه‌نویسی کامپیوتری مناسب باشد و هم کمبودهای ذاتی دو روش فوق را تا حد ممکن جبران نماید.
واژه‌های کلیدی مسائل تماس-برخورد، المان محدود غیرخطی، تغییرشکلهای محدود/بزرگ.

A Method for the Solution of General Nonlinear Contact-Impact Problems

K. Farahani A. Vafai M. Mofid

Abstract *In this paper, a method is presented for the solution of general frictionless nonlinear contact-impact problems, called "United Elements". In the fields of mechanics and structures, contact-impact problems are considered one of the most difficult fields. The reason is that in addittion to the presence of material and geometric nonlinearities, the last possible nonlinearity, the boundary condition nonlinearity, enters the problem. In fact, the boundary condition will be obtained as a part of the solution. The usual methods for these problems stem from Lagrange Multipliers and Penalty Function methods, and in each method, the simultaneous satisfaction of contact constraints and equilibrium equations is sought. Both of these methods have some intrinsic mathematical and numertical deficiencies which relates to the quality of boundary condition exertion. Therefore, in this work, based on the physical concepts and mechanics principals, another method is used for the solution of contact-impact problems. The method is not only suitable for computer programming but also compensates the deficiencies of the other methods.*
Key Words Contact-Impact Problems, Nonlinear Finite Element, Finite-Large Deformation.

---

* نسخه اولیه مقاله در تاریخ ۸۰/۴/۱۹ و نسخه نهایی آن در تاریخ ۸۱/۲/۱۸ به دفتر نشریه رسیده است.
۱ - دانشجوی دکتری سازه، دانشکده عمران، دانشگاه صنعتی شریف
۲ - استاد دانشکده عمران، دانشگاه صنعتی شریف
۳ - دانشیار دانشکده عمران، دانشگاه صنعتی شریف

مقدمه

مسئله تماس- برخورد اجسام و سازه‌ها از جمله مهمترین مسائل مهندسی و صنعتی است. بسیاری از مسائل علمی و عملی طراحی و صنعتی برای مقاصد طراحی و یا محاسبه نیروهای خرابی، ناچار از حل گونه‌ای از این مسئله‌اند. به عنوان مثال، از صنایع پرس صفحات و قالبگیری ورقها که کاربرد فراوان در صنایع ساختمان و مکانیک دارد و یا، صنایع کشتی‌سازی، اتومبیل‌سازی و ... که برای طراحی یا محاسبه ایمنی سیستم باید مقاومت آن در مقابل حالتهای گوناگون تماس- برخورد بررسی گردد، می‌توان نام برد.

همانند دیگر مسائل مکانیکی سازه، به علت پیچیدگی ذاتی مسئله بجز در حالتهای خاص بقیه موارد این مسائل باید با روشهای عددی مورد بررسی قرار گیرند. و از این‌رو، مانند بسیاری از مسائل هندسی با افزایش قدرت کامپیوترها گرایش به حل این‌گونه مسائل فزونی یافت و روزبه‌روز فرمولبندی‌ها ریاضی و تکنیکهای بهتر و سریعتری برای این مسئله ارائه گردید. در واقع تحقیقات و مطالعات علمی این رشته از اوائل دهه هفتاد به طور جدی شکل گرفت و تا به امروز پس از گذشت بیش از ۳۰ سال همچنان مورد توجه است و مقالات علمی فراوانی در این زمینه همچنان ارائه و منتشر می‌گردد. شایان ذکر است که در مسائل تماس یا برخورد، معمولاً بیشتر، یا تمامی، عواملی که منجر به غیرخطی شدن یک مسئله مکانیک سازه می‌شود موجود است. به طور کلی این عوامل عبارتند از :

۱- رفتار مصالح که غیرخطی بودن مواد نامیده می‌شود و ناشی از غیرخطی بودن یا غیرالاستیک بودن مواد در محدوده کرنشهای مورد نظر مسئله است. همچنین، عوامل غیرخطی ناشی از حرارت و ویسکازیته می‌تواند از آن جمله باشد.

۲- تغییرات قابل توجه در هندسه سازه اعم از تغییر مکانها و دورانهای بزرگ که غیرخطی هندسی نامیده می‌شود.

۳- خود مسئله تماس که ناشی از تغییر در شرایط مرزی مسئله به هنگام تحلیل است. همچنین مسئله اصطکاک که می‌تواند منجر به تغییر در شرایط مرزی نیروهای سطحی شود، می‌تواند در این دسته قرار گیرد.

هدف از این تحقیق، ارائه یک روش برای حل مسئله تماس-برخورد با درنظرگرفتن عوامل غیرخطی است. البته روش فوق به طور مستقل از عوامل غیرخطی ارائه می‌شود و هر یک از این عوامل می‌تواند در مسئله موجود باشد یا نباشد. در تحقیق حاضر می‌توان از اثر اصطکاک چشم‌پوشی نمود، ولی موضوع مورد بحث به قوت خود باقی می‌ماند زیرا روش فوق قابل تعمیم به مسائل اصطکاکی نیز هست. روش عددی پایه مورد استفاده برای حل مسئله تماس، روش المان محدود است. به طور خلاصه، در این روش سعی می‌شود پس از تقسیم‌بندی المان محدود اجسام در تماس، با وارد نمودن صریح شرایط مرزی تماس در ترکیب ماتریس سختی سازه‌ها، و استفاده از روشها و فرمولبندی‌های غیرخطی مناسب، به طور همزمان معادلات غیرخطی تعادل و شرایط مرزی را برقرار نمود.

تئوری‌های پایه مسائل تماس - برخورد

تعداد زیاد مقالات و تحقیقاتی که به شبیه‌سازی عددی مسائل تماس یا تماس - برخورد اختصاص داده می‌شود، نشان از کاربرد و اهمیت زیاد این موضوع دارد. از نقطه‌نظر ریاضی، در حالت کلی یک مسئله تماس به طور ذاتی غیرخطی است چرا که سطح تماس در ابتدا ناشناخته است و شرایط مرزی، خود به عنوان قسمتی از

حل مسئله تعیین می‌شوند. طی سه دهه اخیر تکنیکهای عـددی متفاوتی برای شبیه‌سازی مسائل تماس و تماس- برخورد براساس روش المان محدود ارائه شده است. به‌کمک این روشها، مسائل فوق با تمام پیچیدگیها و درجه بالایی از غیرخطی بودن به دلیل وجود تغییرشکلهای بزرگ، اصطکاک و معادلات رفتاری مصالح، با دقت قابل قبولی حل می‌شوند. مهمترین قسمت این روشها، چگونگی وارد کردن شرایط و قیود تماس در مسئله است. در بیشتر روشها، برای منظور کردن قیود تماس و شرط عدم نفوذ، فرمولبندیهای تغییراتی بکار برده می‌شود. در روشهای تغییراتی، قیود تماسی از همان ابتدا در فرمولبندیهای تغییراتی وارد می‌شوند. پایه این روشها را می‌توان روشهای تابع جریمه و ضرایب لاگرانژ دانست.

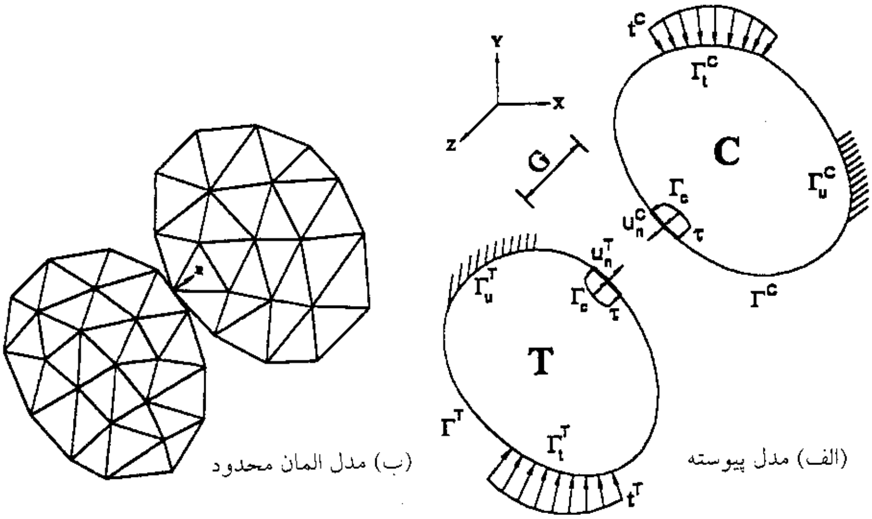
روش ضرایب لاگرانژ برای حل مسئله تماس – برخورد . در روش ضرایب لاگرانژ، قیود تماسی توسط معرفی ضرایب لاگرانژ در فرم تغییراتی وارد و برروی سطوح تماس به طور دقیق اعمال می‌شوند. مهمترین نقاط ضعف این روش آن است که ابعاد دستگاه معادله حاصله به علت استفاده از پارامترهای مستقل لاگرانژ افزایش می‌یابد و ماتریس ضرایب معادلات به علت وجود اعضای قطری صفر، دیگر مثبت معین نبوده و در این حالت احتیاج به تصحیح در روش حل معادلات است. در این روش، ضرایب لاگرانژ مربوط به قیود تغییرمکانی تماس یک تغییر فیزیکی دارند و این ضرایب در واقع عبارتند از نیروی تماسی بین دو جسم. بنابراین برای حل دستگاه، نیروهای تماسی که در ابتدا مجهول‌اند با تغییرمکانهای مجهول ترکیب می‌شوند. به عنوان برخی کارهای مهم این روش می‌توان به مراجع [1-4] اشاره نمود.

روش تابع جریمه برای حل مسئله تماس- برخورد . در روش تابع جریمه، نیروهای تماسی متناسب با مقدار نفوذ دو جسم از یکدیگر با معرفی یک پارامتر جریمه فرض می‌شوند. از لحاظ فیزیکی، این به معنای قراردادن یک سری فنرهای اضافی در لایه بین سطوح تماس دو جسم است. از این‌رو، معادلات نهایی شامل هیچ متغیر اضافه‌ای نبوده و ماتریس سیستم همچنان مثبت معین است. یک نقطه ضعف این روش این است که دقت حل تقریبی آن بستگی تام به عدد جریمه به‌کار رفته دارد. در مقایسه با روش ضرایب لاگرانژ، قیود تماس فقط به طور تقریبی ارضاء شده و نفوذ دو جسم اجتناب‌ناپذیر است. مراجع [5-9] از جمله کارهای برجسته در این روش است. این روش، در برنامه‌های کامپیوتری بطور وسیعی مورد استفاده قرار گرفته است.

بیان ریاضی مسئله تماس

در هر صورت، در تمام روشهای فوق دو اصل اساسی به عنوان مبنای حل ریاضی یا عددی مسئله اختیار می‌شود که عبارتند از اصل عدم نفوذ دو جسم در یکدیگر، و اصل تساوی و تقابل نیروهای عمل و عکس‌العمل بین دو جسم. بدین ترتیب هدف تمام روشهای فوق آن است که تغییرمکانهای دو جسم به گونه‌ای محاسبه گردد که پتانسیل سیستم مینیمم شود بدون آنکه دو اصل فوق نقض گردد. در ادامه بحث به تشریح بیشتر این روشها به همراه ارائه مثال پرداخته خواهد شد. بدین منظور شکل (۱)، دو جسم در حال تماس را در زمان جاری t نمایش می‌دهد. مطابق آنچه در ادبیات مکانیک تماس مرسوم است یکی از دو جسم تماسگر (Contactor) و دیگری هدف (Target) نامیده می‌شود.

در حقیقت شکل (۱-الف) نشان دهنده مدل واقعی یا پیوسته تماس است. همچنین $V^{(x)}$ و $\Gamma^{(x)}$ به ترتیب



شکل ۱ مدل پیوسته و المان محدود اجسام تماسی و هدف

نمایش دهنده حجم و سطح دو جسم است، که X می‌تواند C و یا T باشد. سطح هر کدام از دو جسم C یا T می‌تواند به دو قسمت مطابق زیر افراز شود :

$$\Gamma^{(x)} = \Gamma_t(x) \quad \cup \Gamma_u^{(x)} \quad ; \quad \Gamma_t^{(x)} \cap \Gamma_u^{(x)} = \varnothing \quad (۱)$$

که $\varnothing$ مجموعه تهی بوده، و Γ_t و Γ_u به ترتیب نشان دهنده سطوح با نیروهای سطح معلوم و با تغییرمکانهای مشخص هستند. هنگام تماس، دو جسم به صورت عمل و عکس‌العمل، نیروهایی را به یکدیگر وارد می‌کنند که در سراسر طول مشترک تماس Γ_c گسترده می‌شود به طوری که :

$$\Gamma_c = \Gamma^{(c)} \cap \Gamma^{(x)} \quad ; \quad \Gamma_c \neq \varnothing \quad (۲)$$

واضح است که طی تماس، شرط نفوذناپذیری که عبارت است از :

$$V^{(c)} \cap V^{(T)} = \varnothing \quad (۳)$$

همواره برقرار خواهد بود. بر هر نقطه روی سطح تماس Γ_c، یک مختصات محلی راست گرد ($\vec{t}$, $\vec{n}$) می‌تواند اختیار شود که $\vec{n}$ بردار عمود بر سطح به سمت خارج است. طبق تعریف $\vec{n}^{(T)} = \vec{n}$ بوده و البته $\vec{n}^{(C)} = -\vec{n}^{(T)}$ که در آنها بالانویس راست نشان می‌دهد که بردار نرمال به سمت خارج متعلق به کدام جسم است. در این تحقیق از اثر اصطکاک چشم‌پوشی شده است، و از این‌رو، نیروهای تماس نرمال بر سطح هدف است. تغییرمکان نقاط تماس اجسام C و T در جهت $\vec{n}$ به ترتیب $U_n^{(C)}$ و $U_n^{(T)}$ و فاصله آزاد بین دو جسم در این نقطه g نامیده می‌شود. بنابراین از لحاظ یک مسئله مکانیک محیط پیوسته، فرمولاسیون مسئله عبارت است از :

$$\sigma_{ij,j} + \rho b_i = \rho \ddot{U}_i \quad ; \text{ in } V^{(x)} \quad \text{(equilibrium)} \quad (۴)$$

$$f(\sigma) = g(F) \quad ; \text{ in } V^{(x)} \text{ (constitutive equation)} \quad (۵)$$

$$\sigma_{ij}\, n_i = \bar{t}_j \quad ; \quad \text{on } \Gamma_t^{(x)} \quad (۶)$$

$$U_i = \bar{U}_i \quad ; \quad \text{on } \Gamma_u^{(x)} \quad (۷)$$

$$g \geq 0, \; g = U_n^{(C)} - U_n^{(T)} + G \quad ; \quad \text{on } \Gamma_u^{(x)} \quad (۸)$$

که در آنها σ_{ij} و b_i و U_i و $\ddot{U}_i$ و t_j و n_i و F به ترتیب مؤلفه‌های تنش کوشی، نیروهای حجمی، تغییرمکان، شتاب، نیروی سطحی، نرمال سطح و گرادیان

تغییرشکل، و g و f توابع یا اپراتورهای دیفرانسیل برای بیان معادله رفتاری است و پارامترهای با علامت (¯) نشان دهنده مقادیر از پیش معلوم هستند. در اینجا شرط نفوذناپذیری دو جسم به صورت معادله (۸) بیان می‌شود که در واقع G فاصله آزاد اولیه بین دو جسم است. در حالتی که اثر اینرسی نیز حضور داشته با شد، شرایط اولیه نیز باید به مسئله اضافه شود.

فرم ریاضی روش ضرایب لاگرانژ برای حل مسئله تماس

مطابق معادلات (۴) تا (۸) و با استفاده از اصل کار مجازی، صورت مسئله تماس - برخورد بدون اصطکاک فوق به همراه شرایط تماس به صورت زیر قابل بیان است :

$$\int_{^oV} S_{ij}\,\delta E_{ij}\,dV + \int_{^tV} \rho\,\ddot{U}_i\,\delta U_i\,dV + \int_{\Gamma_c} \tau_n\,\delta(U_n^{(C)} - U_n^{(T)})\,d\Gamma = \int_{^tV} \rho\,b_i\,\delta U_i\,dV + \int_{\Gamma_c} t_i\,\delta U_i\,d\Gamma \quad (۹)$$

که در آن τ_n عبارت است از مؤلفه نیروی تماسی روی جسم هدف عمود بر سطح هدف و

$$\Gamma_t = \Gamma_t^{(C)} \cup \Gamma_t^{(T)} \quad ; \quad V^{(C)} = \cup V^{(T)} \quad (۱۰)$$

همچنین S و E دو تنش و کرنش مزدوج انرژی (energitically conjugate) می‌باشند و $\delta G = 0$.

پس از مجزا سازی المان محدود، تغییرمکان مجازی از طرفین معادله حذف می‌شود و τ در نقاط تماس بصورت مجهولات اضافه در معادلات باقی می‌ماند. در این صورت این مقادیر بصورت ضرایب مجهول لاگرانژ در معادلات وارد می‌شوند و به این ترتیب به معادلات اضافی برای حل این مجهولات احتیاج است. این معادلات اضافی همان معادلات نفوذناپذیری (۸) هستند. به این ترتیب حل مسئله به روش ضرایب لاگرانژ ارائه می‌گردد.

فرم ریاضی روش تابع جریمه برای حل مسئله تماس

حال از دیدگاه دیگری می‌توان فرض نمود که نیروهای تماسی متناسب با نفوذ دو جسم در یکدیگرند. یعنی :

$$\tau_n \propto g \quad ; \quad \tau_n = \alpha g \quad (۱۱)$$

که در آن α یک تابع حقیقی است که روی مرز تماس تعریف می‌شود و مقدار آن فقط وقتی غیرصفر است که $g>0$ باشد. در این حالت، معادله (۹) به صورت زیر نوشته می‌شود :

$$\int_{^oV} S_{ij}\,\delta E_{ij}\,dV + \int_{^tV} \rho\,\ddot{U}_i\,\delta U_i\,dV + \int_{\Gamma_c} \alpha\,g\,\delta g\,d\Gamma = \int_{^tV} \rho\,b_i\,\delta U_i\,dV + \int_{\Gamma_c} t_i\,\delta U_i\,d\Gamma \quad (۱۲)$$

مجدداً با تقسیم‌بندی المان محدود دو جسم، سطح تماس به چند نقطه تبدیل می‌شود. در این حالت، α در سراسر سطح تماس تعریف نمی‌شود و فقط در نقاط تماس قابل تعریف است. با حذف تغییرمکانهای مجازی از طرفین معادله و تشکیل معادلات سیستم، مقادیر جریمه α به نقاط خاصی از ماتریس معادلات و یا ماتریس سختی اضافه می‌گردد. بدین صورت با حل دستگاه معادلات که بدون افزایش تعداد مجهولات صورت گرفته، مسئله تماسی حل می‌شود. در این حالت، ماتریس ضرایب همچنان مثبت معین باقی می‌ماند که این از مزایای روش محسوب می‌گردد. بدین ترتیب حل مسئله به روش تابع جریمه نیز ارائه می‌شود.

روش المانهای متحد (United Elements Method)

همان‌طور که ذکر شد، دو روش پایه حل مسائل تماس - برخورد عبارتند از روش ضرایب لاگرانژ و تابع جریمه که هر کدام دارای محاسن و معایب خاص خود هستند.

در روش ضرایب لاگرانژ، نیروی تماس به عنوان مجهولات اضافه وارد معادلات می‌گردد. و از این‌رو، بر

تعداد مجهولات افزوده می‌شود. همچنین، به علت وجود اعضای قطری صفر، ماتریس ضرایب معادلات دیگر مثبت معین نیست و از این‌رو باید در روش حل دستگاه معادلات تصحیحاتی بعمل آید. ولی حسن این روش آن است که پس از حل معادلات، شرایط مرزی عدم نفوذ برقرار می‌شود و ضرایب لاگرانژ به عنوان نیروهای تماسی فوراً در دسترس هستند.

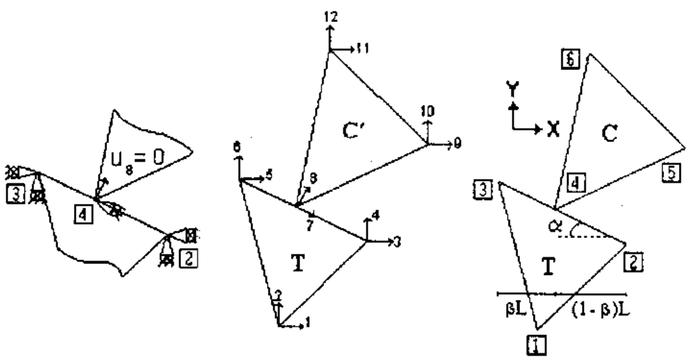
در روش تابع جریمه، از لحاظ فیزیکی اعضای بسیار سخت و صلبی وارد مدل می‌گردند تا جلوی نفوذ دو جسم را در یکدیگر بگیرند. وجود این اعضا باعث افزایش خطای محاسباتی می‌شود و از طرفی نفوذ دو جسم در یکدیگر هرچند کم، اما اجتناب‌ناپذیر است. با این حال سهولت بیشتر در برنامه‌نویسی کامپیوتری و مثبت معین بودن ماتریس ضرایب و عدم نیاز به تغییر در روش حل معادلات از مزایای این روش محسوب می‌گردد.

شکل (۱-الف) نشان دهنده مدل واقعی یا پیوسته، و شکل (۱-ب) نشان دهنده مدل المان محدود یک مسئله تماس است. از آنجا که ایده اصلی این تحقیق ارائه یک روش برای حل مسائل گره-بر سطح است که بسیاری از مسائل تماس را در برمی‌گیرد، در اینجا جسمی که پس از شبکه‌بندی المان محدود گره تماسی دارد جسم تماسگر C و دیگری که دارای سطح تماسی است جسم هدف T نامیده می‌شود.

هدف از این کار ارائه روشی است که با حفظ محاسن هر دو روش، تا حد ممکن عاری از کمبودهای آنها باشد. ایده اصلی این روش عبارت است از متحد کردن المانهای در تماس با هم و در نظر گرفتن نیروی تماسی به عنوان نیروی داخلی المان متحد فوق و تحقق شرایط تماس در حالت تغییر شکلهای بزرگ. به همین دلیل آن را "روش المانهای متحد" یا UEM می‌نامیم[10].

مطابق شکل (۲) دو المان مجاور تماسی C و هدف T را در نظر می‌گیریم. برای سادگی بیان، از المانهای صفحه‌ای که فقط دارای درجات آزادی تغییرمکانی هستند استفاده شده است.

فرض دیگر اینکه عکس‌العمل بین دو المان در نقطه تماس از نوع فشاری بوده و المانها تمایل به جدا شدن از یکدیگر ندارند. همچنین، مختصات XY برای حل مسئله اختیار شده است و درجات آزادی المانها به موازات محورهای مختصات کلی انتخاب شده‌اند. مطابق شکل فوق، اصطلاحاً سطح ۳-۲ را سطح هدف و گره ۴ را گره تماسی می‌نامند.



(الف) دو المان در موقعیت تماس (ب) درجات آزادی پس از دوران (ج) عدم استقلال درجه آزادی نرمال

شکل ۲ المانهای تماسی و هدف

اولین گام عبارت است از دوران درجات آزادی گره تماسی به موازات و عمود بر سطح هدف. فرض می‌شود که ماتریس سختی مماسی المان C و T به ترتیب K^C و K^T باشد. استفاده از لفظ ماتریس سختی مماسی بدین معنی است که تمامی عوامل غیرخطی در ماتریسهای سختی منظور شده است و مسئله در کلی‌ترین حالت خود حل می‌گردد. از آنجا که پس از تماس، مرز دو المان با هم مرتبط می‌شود، طبیعی است که حرکات مرزی یکدیگر را تحت اثر قرار دهند. اگر به این اثر دقت شود و از لحاظ ریاضی بتوان آن را بیان کرد، این امکان وجود دارد که بتوان حرکت یکی را بر حسب دیگری بیان نمود و بدین صورت آن المانها را با یکدیگر ترکیب کرد. به عنوان مثال برای شکل (۲) می‌توان نوشت :

$$u_8 = \beta \sin(\alpha) u_3 + \beta \cos(\alpha) u_4 + (1-\beta) \sin(\alpha)\, u_5 + (1-\beta) \cos(\alpha)\, u_6 \qquad (۱۳)$$

که پارامترهای آن در شکل (۲) نمایش داده شده است. یک راه برای بیان متحدسازی المانها و یا سازه‌های تماس یافته استفاده از ماتریس سختی سازه‌های تماس یافته پتانسیل سیستم است که به صورت :

$$\Pi = \frac{1}{2} U^t . K . U - U^t . f \qquad (۱۴)$$

تعریف می‌شود، که در آن K، U و f به ترتیب عبارتند از ماتریس سختی، بردار تغییرمکان، و بردار نیروی کل سازه. حال اگر پارامترهای فوق به صورت زیر تفکیک گردد :

$$K = \begin{bmatrix} K^{CC} & 0 & K^{CR} \\ 0 & K^{TT} & K^{TR} \\ K^{CR} & K^{TR} & K^{RR} \end{bmatrix}; \quad U = \begin{bmatrix} U^C_n \\ U^T \\ U^R \end{bmatrix}; \quad f = \begin{bmatrix} f^C_n \\ f^T \\ f^R \end{bmatrix} \qquad (۱۵)$$

عبارت (۱۵) فقط یک قسمت‌بندی ماتریس سختی سازه به بخشهای تماسی، هدف و بقیه درجات آزادی، به ترتیب متناظر با بالانویسهای راست C، T و R است، و زیرنویس راست n نشان دهنده عمود بودن بر سطح هدف است. اعضای غیرقطری صفر نشان دهنده عدم ارتباط فیزیکی بین درجات آزادی تماسی و هدف، بدون حضور شرط تماس است. شرط تماس یا عدم نفوذ، به صورت :

$$U^C_n = F(U^T) \qquad (۱۶)$$

بین بردار درجات آزادی نرمال گره‌های هدف U^C_n، و بردار درجات آزادی سطوح هدف U^T، قابل بیان و F تابع تماس یا اتصال است. در حالت کلی، رابطه (۱۶) می‌تواند به طور معادل، به فرم ماتریسی زیر نوشته شود :

$$U^C_n = A.\, U^T \qquad (۱۷)$$

در رابطه فوق، A را می‌توان ماتریس اتصال نامید. با جایگذاری (۱۵) و (۱۶) در (۱۴) نتیجه می‌شود :

$$\delta\Pi = \left\langle \frac{\partial F}{\partial U^T} . \delta U^T\ \delta U^T\ \delta U^R \right\rangle \cdot \begin{bmatrix} K^{CC} & 0 & K^{CR} \\ 0 & K^{TT} & K^{TR} \\ K^{CR} & K^{TR} & K^{RR} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F \\ U^T \\ U^R \end{bmatrix} - \left\langle \frac{\partial F}{\partial U^T} . \delta U^T\ \delta U^T\ \delta U^R \right\rangle \cdot \begin{bmatrix} f^C \\ f^T \\ f^R \end{bmatrix} \qquad (۱۸)$$

از آنجا که $A = \frac{\partial F}{\partial U^T}$ است، با توجه به شرط تعادل $\delta\Pi = 0$ می‌توان نوشت :

$$\begin{bmatrix} A^t . K^{CC} . A + K^{TT} & A^t . K^{CR} + K^{TR} \\ K^{CR} . A + K^{TR} & K^{RR} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} U^T \\ U^R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f^T + A^t . f^C_n \\ f^R \end{bmatrix} \qquad (۱۹)$$

ماتریس سختی عبارت (۱۹) در واقع همان K^U یا ماتریس سختی متحد کل سازه است. مجدداً از معادله (۱۹) مشاهده می‌گردد که ماتریس متحد سازه، همچنان مثبت معین است و هیچگونه مشکل عددی ناشی از اختلاف توان اعضاء در آن به چشم نمی‌خورد. تعداد سطرهای ماتریس A برابر تعداد گره‌های تماسی و تعداد ستونهای آن برابر تعداد درجات سطح هدف است.

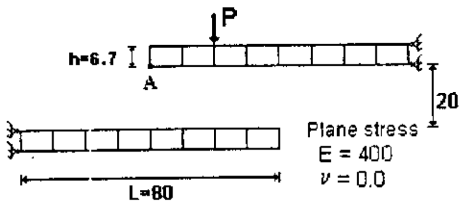
نتایج عددی و مثالها

به منظور نمایش عملی استفاده از روش ارائه شده و قابلیت آن در رویارویی با مسائل و موارد مختلف، برنامه‌ای کامپیوتری برای آنالیز مسائل تماس - برخورد بدون اصطکاک با در نظر گرفتن کلیه آثار غیرخطی و به نام NCIS (Nonlinear Contact-Impact Solver) تهیه گردیده است. مثالهای حل شده استاتیکی و دینامیکی توسط برنامه در ادامه ارائه گردیده است. در تمام این مثالها برای حل معادلات غیرخطی تعادل و ارضای شرایط تماس، از فرمولبندی لاگرانژی کامل و روش تکرار نیوتن - رافسون اصلاح شده، و معادله رفتاری

$$S_{ij} = 2\mu E_{ij} + \lambda \delta_{ij} E_{kk} \qquad (۲۰)$$

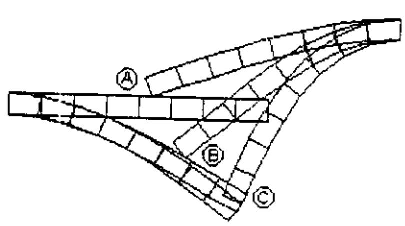
استفاده گردیده است، که در آن S و E به ترتیب تنسورهای تنش دوم پیولا-کریشهف و کرنش گرین - لاگرانژ، λ و μ ثوابت لامه، و δ کرونکر دلتا می‌باشد و در آن از بیان اندیسی استفاده شده است.[12]

مثال ۱: شکل (۳) دو سیستم سازه‌ای غیرصلب به شکل تیر را که هرکدام از ۸ المان تنش مسطح چهارگرهی تشکیل شده است، نشان می‌دهد. مشخصات مکانیکی و هندسی آنها در شکل فوق نشان داده شده است. خصوصیات هندسی و مکانیکی، به همراه شرایط مرزی و بارگذاری این مسئله به گونه‌ای است که تغییر شکل آن باحالت یا پدیده پرش ناگهانی (snap through) همراه خواهد بود. به عبارت دیگر، پس از تماس میان دو سازه و مقداری تغییر شکل و تجمع انرژی الاستیک درونی، سیستم فوق از مسیر خاصی مقداری از این انرژی را به طور ناگهانی آزاد می‌نماید. در حالتی که مسئله دینامیکی باشد، این پدیده با ارتعاش همراه خواهد بود، و در حالت استاتیکی حاضر، باید برای مشاهده آن از روش کنترل تغییرمکان استفاده نمود.



شکل ۳ تماس به همراه پرش ناگهانی

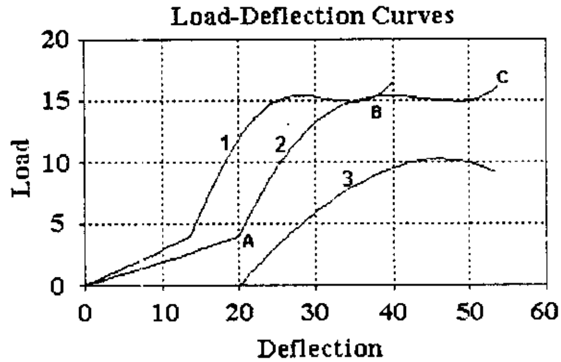
شکل (۴) سه‌مرحله مهم این تغییر شکل را نمایش می‌دهد، یعنی به ترتیب مراحل الف) تماس، ب) پرش ناگهانی و ج) جدایی. برای محاسبه حرکت در قسمت پرش ناگهانی از روش کنترل جابجایی استفاده شده است. تماس فقط برای گره A در شکل (۳) منظور شده است.



شکل ۴ مراحل اصلی تغییر شکل

منحنی‌های ۱ و ۲ از شکل (۵)، به ترتیب نمایش دهنده روابط نیرو - تغییر شکل برای گره زیر بار و گره

تماسی، و منحنی ۳ از شکل (۵) نمایش تاریخچه تغییرات نیروی تماسی بین دو جسم است. همچنین نقاط A، B و C در منحنی ۲ شکل فوق مربوط به سه فاز ذکر شده از تغییر شکل است. واضح است که در صورت استفاده از روش نیوتن-رافسون و کنترل نیرو، مسئله همگرا نمی‌شود.



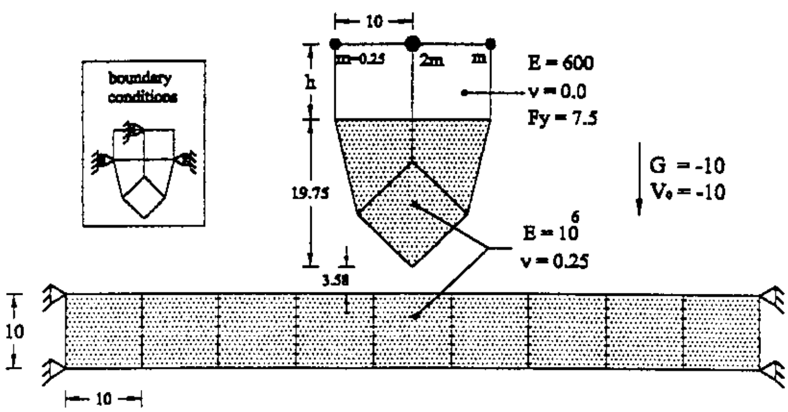
شکل ۵ منحنی‌های نیرو - تغییرشکل در گره‌های مختلف

مثال ۲ : این مثال برای نمایش دقت و توانایی روش در حل مسائل پیچیده الاستو - پلاستیک دینامیکی برخورد طراحی و حل شده است. طرح این مسئله به گونه‌ای است که دارای حل دقیق بوده و می‌توان پاسخ عددی آن را با حل دقیق مقایسه نمود. همان‌طور که در شکل (۶) مشاهده می‌شود یک سازه متشکل از ۵ المان به سمت سازه زیرین متشکل از ۹ المان پرتاب می‌شود. المانهای هاشور خورده در واقع بسیار سخت‌تر از دو المان دیگر است. مجدداً از روش انتگرال زمانی بیومارک با ضرایب ۰/۵ = δ و ۰/۲۵ = α وگام زمانی $\Delta t =$ ۰/۰۱s استفاده شده است.

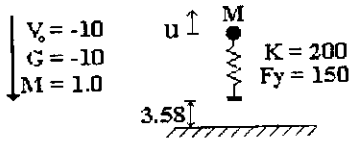
با دقت در شرایط مرزی و هندسی و مشخصات مکانیکی اجزای مختلف این سازه مشخص می‌گردد که به علت توزیع خاص سختی و جرم و شرایط مرزی، این شکل معادل مسئله‌ای است که در شکل (۷) نشان داده شده است.

سرعت اولیه پرتابه ۱۰- = V_0 و اثر ثقل با شتاب ثقل ۱۰- = G منظور شده است. البته می‌توان به طور معادل فرض نمود که پرتابه افقی است و نیروی ثابت ۱۰ = F به طور افقی به آن وارد می‌شود.

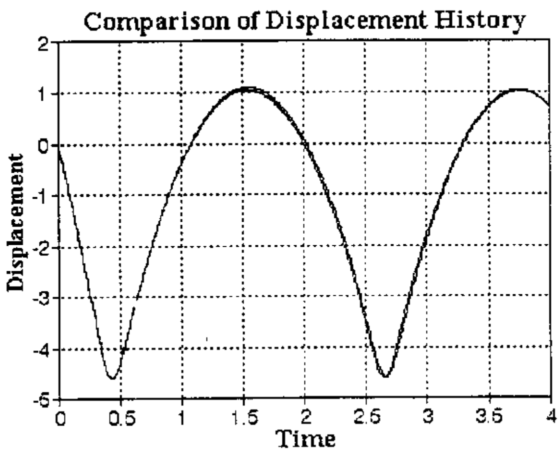
پس از حل دقیق و عددی برخورد الاستو - پلاستیک فوق، نتایج بسیار دقیق برای تاریخچه تغییرمکان جرمهای متمرکز و عکس‌العمل تکیه‌گاهی به‌ترتیب مطابق شکل‌های (۹و۸) به‌دست می‌آید.



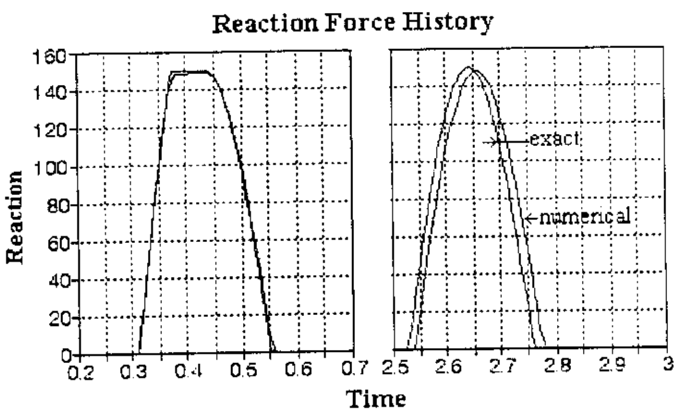
شکل ۶ برخورد دو جسم با اختلاف سختی زیاد



شکل ۷ مسئله معادل برخورد دو جسم با اختلاف سختی زیاد



شکل ۸ تاریخچه تغییرمکان برخورد



شکل ۹ تاریخچه نیروی ضربه در حالت افزایش طول المان نرم

خلاصه و نتیجه‌گیری

توجه به اصول تغییراتی نموی مسئله تماس و یا براساس فرم نموی تابعی انرژی پتانسیل سیستم، مراحل مختلف ریاضی و عددی روش المانهای متحد بیان گردید. این روش به حالت اساسی تماس - برخورد از نوع گره - به - سطح که بیشتر مسائل مربوط را در برمی‌گیرد، می‌پردازد. در این روش سعی بر این است تا شرایط مرزی تماس تا حد ممکن به طور دقیق و بدون کمبودهای شناخته شده روشهای ضرایب لاگرانژ و تابع جریمه برقرار گردد. در عین حال سعی شده است که محاسن روشهای فوق تا حد ممکن در آن حفظ گردد، یعنی به تعداد مجهولات مسئله اضافه نگردد، روش حل معادلات به هیچگونه تصحیحی احتیاج نداشته باشد، و شرایط مرزی به طور دقیق و بدون کاهش دقت معادلات ارضاء گردد. مثالهای ارائه شده نشان دهنده توانایی و قابلیت روش در رویارویی با انواع مسائل تماس - برخورد غیرخطی است.

مراجع

1. T. J. R. Hughes, R. L. Taylor, J. L. Sackman, A. Curnier and W. Kanoknukulchai, "*A Finite Element Method for a Class of Contact-Impact Problems*", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 8, 249-276, (1976).
2. N. Asano, "An approximate hybrid type of virtual work principle for two elastoimpact contact bodies", *Bulletin of JSME,* Vol. 26, 1849-1856, (1983).
3. N. Asano, "A hybrid type of virtual work principle for impact contact problems of two bodies", *Bulletin of JSME,* Vol. 29, 1679-1684, (1986).
4. K. J. Bathe nad A. B. Chaudhary, "A solution method for static and dynamic analysis of three-dimensional contact problems with friction", *Computers and Structures,* Vol. 24, 855-873, (1986).
5. J. C. Simo, P. Wriggers, K. H. Schweizerhof and R. L. Taylor, "Finite deformation post-buckling analysis involving inelasticity and contact constraints", *International Journal of Numerical Methods in Engineering,* Vol. 23, 779-800, (1986).
6. N. Asano, "A penalty function type of virtual work principle for impact-contact problems of two bodie", *Bulletin of JSME,* Vol. 29, 3701-3709, (1986).
7. Y. Kanto and G. Yagawa, "A Dynamic contact buckling analysis by the penalty finite element method", *International Journal of Numerical Methods in Engineering,* Vol. 29, 755-744, (1990).
8. M. J. De La Fuente and C. A. Fellipa, "*Ephemeral Penalty Functions for Contact-Impact Dynamics*", finite elements in Analysis and Design, Vol. 9, 177-191, (1991).

9. I. Hunek, "On a penalty formulation for contact-impact problems", *Computers and Structures*, Vol. 11, 193-203, (1993).

10. K. Farahani, M. Mofid and A. Vafai, "A solution method for general contact-impact problems", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 187, 69-77, (2000).

11. K. Farahani, M. Mofid and A. Vafai, "United elements method for general contact-impact problems", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, (accpted for publication).

12. K. J. Bathe, "*Finite element Procedures*", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, (1996).