

## کاربرد آنالیز حساسیت برای ارائه مدل‌هایی ساده از کره زمین هماهنگ با مود اول ارتعاش آزاد زمین\*

علی سینایی<sup>(۱)</sup>      فرزاد آریانا<sup>(۲)</sup>      ماشاءاله یزدان‌پناه<sup>(۳)</sup>

**چکیده** تحلیل خواص مکانیکی کره زمین به عنوان یک سیستم مکانیکی، نیازمند ارائه مدلی مناسب و ساده از آن می‌باشد. مدل‌هایی که براساس سرعت امواج حجمی برای زمین ارائه شده‌اند، خواص زمین را برحسب عمق به صورت تابعی نقطه‌ای بیان می‌کنند و از این‌رو، استفاده از آن‌ها به عنوان مدل زمین در محاسبات مورد نیاز مهندسی، بر حجم محاسبات می‌افزاید و رسیدن به پاسخ مناسب را دشوار می‌سازد. در این تحقیق سعی شده است با استفاده از آنالیز حساسیت چند مدل ساده و قابل استفاده ارائه شود که فیود مهم جرم، گشتاور اینرسی و پرورد اولین نوسان آزاد زمین را ارضاء کنند. برای رسیدن به این هدف، ابتدا فرم اجزای محدود مسائل تقارن محوری بیان شده، سپس رابطه مبین آنالیز حساسیت برای مقادیر ویژه نسبت به چگالی المان‌ها استخراج گشته که از آن، برای یکسان کردن پرورد اول ارتعاشات مدل‌های پیشنهادی با پرورد مود اول کره زمین استفاده شده است. این مدل‌ها که با استفاده از برنامه کامپیوتری، اصلاح گشته و با مدل اندرسون مقایسه شده‌اند، مطابقت خوبی را نشان می‌دهند.  
**واژه‌های کلیدی** مدل‌سازی زمین، پرورد اول ارتعاشات زمین، آنالیز حساسیت، روش اجزای محدود.

### Applying Sensitivity Analysis to Propose Simple Models of the Earth in

#### Coordination with its First Mode of Free Vibration

A. Sinaie

F. Aryana

M. Yazdanpanah

**Abstract** To analyze the mechanical properties of the Earth as a mechanical system, an appropriate and simple model of the Earth is needed. This is because the proposed models which are based upon the body waves, represent the properties as a point function in terms of the depth and cause difficulties in obtaining the required responses in engineering problems. In this paper, it is attempted to apply the sensitivity analysis to propose a couple of simple models, which satisfy the important constraints of the mass, the moment of inertia and the first period of vibration of the Earth. To accomplish this goal, the finite elements form of axisymmetrical problems is first presented. Then, sensitivity analysis of the Eigenvalues with respect to the density is carried out to equalize the first period of vibration of the proposed models with the first period of vibration of the Earth. These models are, then modified with the aid of the aforementioned program and compared with the Anderson's model, showing good agreement.

**Key Words** Earth Modeling, First Period of Earth Vibrations, Sensitivity, Finite Element, Method.

\* نسخه اولیه مقاله در تاریخ ۸۰/۳/۳۱ و نسخه نهایی آن در تاریخ ۸۱/۲/۲۴ به دفتر نشریه رسیده است.

۱ - استادیار بخش مهندسی مکانیک، دانشکده فنی، دانشگاه شهید باهنر کرمان

۲ - استادیار بخش مهندسی مکانیک، دانشکده فنی، دانشگاه شهید باهنر کرمان

۳ - استادیار بخش مهندسی مکانیک، دانشکده فنی، دانشگاه شهید باهنر کرمان

مقدمه

مسئله توزیع چگالی جرمی کره زمین یکی از مهمترین مسائل پایه‌ای ژئوفیزیک است که از حدود دویست سال قبل تاکنون مورد بحث و تحقیق بوده است. تا چند دهه قبل، مدل‌های ارائه شده برای چگالی فقط می‌بایست قیود جرم و گشتاور اینرسی را ارضاء کنند. اما مدتی بعد، رابطه‌ای ساده و معقول بین سرعت امواج حجمی و چگالی ارائه گردید که به نظر می‌رسد به اندازه کافی مناسب باشد. در صورتی که توزیع چگالی معلوم باشد، میدان ثقل و فشار هیدرواستاتیکی داخل زمین تعیین خواهد شد و سپس با استفاده از سرعت سیر امواج حجمی، مشخصات و خواص الاستیکی زمین نیز مشخص می‌گردد. اخیراً پیشرفت‌هایی در روش‌های لرزه‌نگاری حاصل شده است که شامل اندازه‌گیری دقیق پریودهای نوسانات آزاد زمین، سرعت سیر امواج سطحی، و تعیین جزئیات ساختار منطقه گذار می‌باشد که در بررسی مسائل اساسی دقتی بهتر ایجاد می‌کند. یک مدل ساده قابل پذیرش از کره زمین، نه تنها باید قیود جرم و گشتاور اینرسی را ارضاء نماید، بلکه باید پریود نوسانات آزاد زمین و سرعت سیر امواج سطحی را نیز ارضاء کند.

با دانستن سرعت سیر امواج طولی و عرضی یعنی  $V_p$  و  $V_s$  و مشخص بودن مدل اولیه، روش چگالی معکوس، حدود مفیدی برای چگالی تعیین می‌کند و اطلاعاتی در مورد مدهای نوسانی با پریودهای طولانی در اختیار می‌گذارد. اما با توجه به نامعین بودن  $V_s$  در گوشته بالایی، در حال حاضر براساس اطلاعات مربوط به پریودهای نوسانات آزاد تعداد زیادی مدل چگالی ارائه شده است. تحت چنین شرایطی، مزیت یک مدل ساده، قابل پذیرش و قابل استفاده زمین این است که در مجموع با داده‌های مشاهداتی در توافق

باشد. در این نوشتار هدف اصلی، ارائه روشی کلی برای مدل‌سازی کره زمین است که در صورت نیاز بتوان به سادگی آن را اصلاح کرد تا مشخصات مکانیکی مورد توجه در هر مسئله خاص را بررسی نمود. در اینجا، منحصر به فرد بودن مدل مورد توجه نیست، زیرا در زمینه‌های مختلف مهندسی مانند عمران، معدن، مکانیک، ژئوتکنیک، ژئومکانیک، ژئودینامیک و غیره، مدل‌هایی متفاوت به منظورهای متفاوتی مورد نظر می‌باشند.

روابط خطی برای چگالی

اولین تلاش‌ها در مورد ارائه تابع چگالی زمین به صورت تابعی از عمق بر پایه رشد پیوسته چگالی نسبت به عمق، در قالب یک تابع ساده از شعاع  $r$  بوده است. تابع معروف لژاندار به فرم زیر ارائه شده است:

$$\rho = \rho_0 \left( \frac{\sin nr}{nR} \right), \quad (\rho_0 = 11, n = 2/5) \quad (1)$$

که در آن  $R$  شعاع کره زمین می‌باشد. تابع روشه نیز چنین بیان می‌شود:

$$\rho = \rho_0 \left( 1 - C(r/R)^2 \right), \quad (\rho_0 = 10/1, C = 0/76) \quad (2)$$

اغلب توابع پیوسته، چگالی مرکزی  $\rho(r)$  را بسیار کم پیش‌بینی می‌کنند مگر آنکه پرشی ناگهانی در مرز هسته اعمال شود. ویچر اولین کسی بود که فرض کرد زمین از دو قسمت گوشته و هسته تشکیل شده است [1]. وی براساس متداولترین ترکیب شهابسنگ‌ها، هسته را فلز و گوشته را سنگ در نظر گرفت. با توجه به مشخص بودن جرم، گشتاور اینرسی و چگالی متوسط زمین، محاسبات ویچر به صورت زیر انجام شد. اگر  $R$  شعاع زمین،  $\alpha$  نسبت شعاع هسته به شعاع زمین،  $\rho_0$  چگالی

در این رابطه،  $\mu$  و  $\gamma$  ضرایب الاستیک (ضرایب لامه)،  $\theta$  کرنش میانگین و  $u$  جابجایی است. معادله (۴) چگونگی انتشار موج را در داخل یک جسم الاستیک همگن ایزوتروپ نشان می‌دهد. از آنجا که این معادله به ترتیب انتخاب محورهای مختصات بستگی ندارد، می‌توان امواج را در سطح مورد نظر بررسی کرد (مثلاً  $x=0$ ). بنابراین ارتعاشات در این سطح تابعی از  $y$  و  $z$  نخواهد بود و معادلات به فرم زیر در می‌آیند:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (\gamma + 2\mu) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (5)$$

که در آن  $(u, v, w)$  به ترتیب جابجایی در امتداد محورهای  $(x, y, z)$  می‌باشند. پاسخ معادلات (۵)، سرعت‌های امواج طولی  $V_p$  و امواج عرضی  $V_s$  خواهند بود.

$$V_s^2 = \mu/\rho, \quad V_p^2 = (\gamma + 2\mu)/\rho \quad (6)$$

با توجه به رابطه (۶)، مشخص است که برای تمامی موارد حقیقی، سرعت امواج طولی بیش از سرعت امواج عرضی می‌باشد [۳].

اگر  $m$  جرم ماده‌ای متراکم در داخل کره‌ای به شعاع  $r$  باشد، با نوشتن معادلات تعادل برای یک لایه از کره، نتیجه زیر حاصل می‌شود.

$$g = \frac{Gm}{r^2}, \quad \frac{dp}{dr} = -\rho g \quad (7)$$

اگر لایه‌های مورد نظر از لحاظ ترکیب شیمیایی مواد سازنده آن یکنواخت بوده و تغییرات دما در آن آدیاباتیک (بی در رو) باشد، از ترمودینامیک نتیجه می‌شود که:

گوشته،  $\rho_1$  چگالی هسته و  $\beta$  میزان پرش چگالی مابین هسته و گوشته باشد، در این صورت:

$$\rho_1 = \rho_0 (1 + \beta), \quad M = \frac{4}{3} \pi \rho_0 R^3 (1 + \beta \alpha^3)$$

$$\bar{\rho} = \rho_0 (1 + \beta^3), \quad I = \frac{\Lambda}{15} \pi \rho_0 R^5 (1 + \beta \alpha^5) \quad (3)$$

که در آن  $M$  جرم زمین،  $I$  گشتاور اینرسی جرمی زمین و  $\bar{\rho}$  چگالی متوسط زمین می‌باشد. براساس روابط  $\rho_0 = 3/32 \text{ gr/cm}^3$  و  $\bar{\rho} = 5/58 \text{ gr/cm}^3$ ;  $I/MR^2 = 1/3$  مقدار  $\rho_1 = 8/206 \text{ gr/cm}^3$  می‌شود که نزدیک به چگالی فولاد است و در آن زمان قابل قبول جلوه می‌کرد [1].

در سالهای اخیر نیز با توجه به این نکته که برای تحلیل زمین به عنوان یک سیستم مکانیکی، یک مدل ساده هماهنگ با رفتار واقعی زمین مورد نیاز می‌باشد، با استفاده از داده‌های مربوط به زمین، مانند جرم و مدل‌های چگالی حاصله از انتشار امواج حجمی، مدل‌هایی ساده ارائه شده است. از جمله این مدل‌ها، مدل میلار و میتالاس می‌باشد که شبیه به مدل جفریز است. در این مدل، آنها شتاب جاذبه پوسته را ثابت در نظر گرفتند و با توجه به ثابت جهانی گرانش  $G$ ، شعاع  $r$  و همچنین جرم  $m(r)$  شتاب ثقل  $g(r)$ ، چگالی  $\rho(r)$  و فشار داخلی زمین  $P(r)$ ، همگی بر حسب شعاع، با استفاده از روابط  $g(r) = Gm(r)/r^2$  و  $dP(r)/dr = -g(r)\rho(r)$  توانستند شتاب جاذبه زمین و فشار داخلی را بر حسب عمق برای مدل ارائه شده ارائه دهند [2].

### رابطه بین سرعت امواج لرزه و چگالی

با استفاده از معادله حرکت و چشم‌پوشی نمودن از نیروهای حجمی، معادله موج به فرم زیر در می‌آید:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (\gamma + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu \nabla^2 u \quad (4)$$

چگالی رهنمون می‌شود. این روابط تجربی بیشتر برای تخمین زدن چگالی در گوشته مورد استفاده قرار می‌گیرند [1]. بیرج رابطه تجربی بین چگالی و سرعت امواج حجمی را به شکل زیر ارائه نمود [4].

$$\rho = A_1(\bar{M}) + A_2 V_p \quad (15)$$

که در این رابطه، ضرایب مربوطه، با آزمایش بر روی مواد معدنی و سنگهای مختلف بدست می‌آیند. با توجه به اینکه وزن اتمی مواد تشکیل دهنده گوشته در حدود ۲۱ است، رابطه بیرج برای فشار یک اتمسفر و دمای محیط به شکل زیر در می‌آید:

$$V_p = -1/87 + 3/05 \rho \quad (16)$$

مشابه با رابطه (۱۶)، رابطه تجربی دیگری بین سرعت امواج حجمی و چگالی توسط وانگ ارائه شده که به شکل زیر است [4]:

$$\phi = V_p^2 - \frac{4}{3} V_s^2 = -1/75 + 2/26 \rho \quad (17)$$

اندرسون نیز در رابطه حالت، به جای متغیرهای فشار هیدرواستاتیکی و دما که نامعین هستند، پارامترهای لرزه شناخته شده را جایگزین کرد و رابطه بین سرعت امواج حجمی و چگالی را به شکل زیر بیان نمود.

$$\rho = B \bar{M} \phi^n \quad (18)$$

در این رابطه  $\bar{M}$  وزن اتمی متوسط، B ضریب ثابت و n عددی بین ۱/۳ تا ۱/۷۴ است [5].

### الگوی چگالی هماهنگ با نوسانات آزاد زمین

در این روش تابعی که برای چگالی ارائه می‌شود باید علاوه بر ارضاء قیود جرم و گشتاور اینرسی زمین، با مدهای ارتعاشی زمین نیز در توافق باشد. هرچه تعداد فرکانسهای هماهنگ بین مدل ارائه شده و زمین بیشتر باشد دقت مدل بالاتر است. در مدلهایی که به وسیله امواج حجمی برای زمین بدست می‌آیند، چون تغییرات

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_s \quad (8)$$

در این معادله، k ضریب تراکم‌پذیری در شرایط آدیاباتیک و s آنتروپی است. در نتیجه،

$$\frac{d\phi}{dr} = \frac{d\phi}{dP} \frac{dP}{dr} = \left( \frac{\rho}{k} \right) (-g\rho) = \frac{-g\rho^2}{k} \quad (9)$$

و با توجه به رابطه بین ضرایب الاستیسیته

$$k = \gamma + \frac{2}{3} \mu \quad (10)$$

و با استفاده از رابطه (۶)، روابط زیر بدست می‌آیند.

$$V_p^2 - \frac{4}{3} V_s^2 = \frac{\gamma + 2\mu}{\rho} - \frac{4\mu}{3\rho} = \frac{(\gamma + \frac{2}{3}\mu)}{\rho} \quad (11)$$

$$\frac{1}{\rho} = V_p^2 - \frac{4}{3} V_s^2 = \phi \quad (12)$$

در نتیجه، رابطه (۹) به شکل زیر در می‌آید.

$$\frac{d\phi}{dr} = \frac{-g\rho}{\phi} = \frac{-Gm\rho}{r^2\phi} \quad (13)$$

معادله (۱۳) به معادله آدامز - ویلیامسون مشهور است. اکنون با معلوم بودن تابع  $\phi$  برحسب شعاع و دانستن مقادیر جرم و چگالی در سطح زمین، می‌توان از معادله (۱۳) به صورت عددی انتگرال گرفت. بنابراین، با استفاده از معادلات زیر،

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho$$

$$\frac{dI}{dr} = \frac{\Lambda}{3} \pi r^2 \quad (14)$$

می‌توان تابع چگالی را در داخل زمین بر حسب شعاع بدست آورد.

روابط تجربی بین چگالی و سرعت امواج حجمی بررسی انتشار امواج التراسونیک بر روی سنگها و مواد معدنی، ما را به روابط خطی بین سرعت امواج حجمی و

Archive of SID

توابع شکل و  $\{\Delta\}$  بردار تغییر مکانهای گره‌ای المان می‌باشد. توابع شکل را می‌توان از مرتبه یک، دو و یا بالاتر انتخاب کرد.

با توجه به ارتباط تنش - کرنش - تغییر مکان، این روابط را می‌توان بصورت زیر بیان کرد:

$$\{\sigma\} = [D] \{\epsilon\} \quad (20)$$

که در آن،  $\{\sigma\}$  بردار تنش،  $[D]$  ماتریس ارتباط دهنده تنش با کرنش و  $\{\epsilon\}$  بردار کرنش است. همچنین:

$$\{\epsilon\} = [d] \{u\} \quad (21)$$

که در آن،  $[d]$  ماتریس ارتباط دهنده کرنش با تغییر مکان و  $\{u\}$  بردار تغییر مکان می‌باشد. با جایگذاری معادله (۲۰) در معادله انرژی کرنشی،

$$U = \frac{1}{V} \int_V \{\epsilon\}^T [D]^T \{\epsilon\} dV \quad (22)$$

و با فرض اینکه مواد ایزوتروپیک خطی باشند، ماتریس  $[D]$  متقارن می‌باشد، یعنی  $[D] = [D]^T$  شده و معادله (۲۱) به شکل زیر می‌شود.

$$U = \frac{1}{V} \int_V \{u\}^T [d]^T [D] [d] \{u\} dV \quad (23)$$

و با جایگذاری معادله (۱۹) در معادله بالا، خواهیم داشت:

$$U = \frac{1}{V} \int_V \{\Delta\}^T [N]^T [d]^T [D] [d] [N] \{\Delta\} dV \quad (24)$$

با تعریف ماتریس  $[B]$  به شکل زیر:

$$[B] = [d] [N] \quad (25)$$

رابطه زیر نتیجه می‌شود،

$$U = \frac{1}{V} \int_V \{\Delta\}^T [B]^T [D] [B] \{\Delta\} dV = \frac{1}{V} \{\Delta\}^T [K] \{\Delta\} \quad (26)$$

از رابطه فوق ماتریس سختی هر المان به صورت زیر تعریف می‌شود [8].

$$[K] = \int_V [B]^T [D] [B] dV \quad (27)$$

ماتریس جرم المان را می‌توان از تعریف انرژی بدست آورد.

خواص بر حسب شعاع بصورت تابع ریاضی مشخص نیست، مسئله مدل‌سازی زمین در زمینه‌های متفاوت محاسبات مهندسی دچار مشکل می‌شود. برای رسیدن به هدف مورد نظر، در تحقیق حاضر از روش آنالیز حساسیت استفاده شده است. در طراحی یک سیستم براساس آنالیز حساسیت، پارامترهای طراحی طوری تغییر داده می‌شوند که سیستم پاسخ‌های مورد نظر از قبیل جابجایی، تنش، فرکانس طبیعی، ضخامت صفحات و خواص مکانیکی را ارائه دهد. به عنوان مثال، جودی و بها [16]، آنالیز حساسیت را برای بهینه‌سازی خرپا مورد استفاده قرار دادند. آنان فرکانس طبیعی ارتعاشات را به عنوان پاسخ سیستم و سطح مقطع اعضاء را به عنوان پارامترهای طراحی در نظر گرفتند. برای استفاده از آنالیز حساسیت در یک سیستم باید ابتدا مدل مکانیکی مسئله را مشخص کرد. بدین منظور از روش اجزای محدود استفاده می‌شود. با نوشتن معادلات حاکم بر سیستم مورد نظر و دیفرانسیل‌گیری از این معادلات نسبت به هر پارامتر دلخواه موجود در مسئله، می‌توان میزان حساسیت پاسخ خواسته شده را نسبت به آن پارامتر بدست آورد. لازم به ذکر است که محدوده توجه در این تحقیق، ساختارهای مکانیکی با خواص الاستیک خطی می‌باشد [7].

فرمول‌بندی به روش اجزای محدود

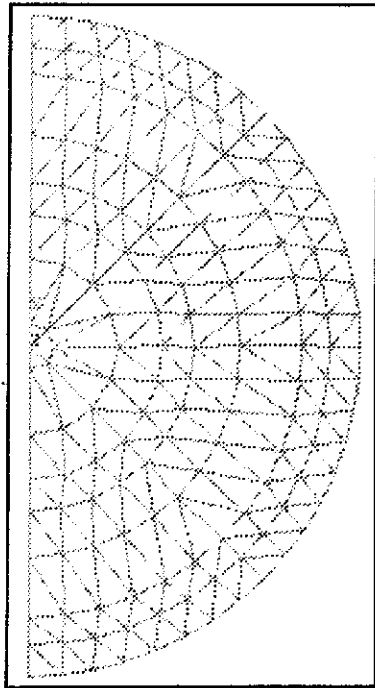
تابع تغییر مکان در هر المان به صورت تابعی از تغییر مکان‌های گره‌ای آن المان در نظر گرفته می‌شود. برای این منظور از توابع شکل برای بیان رابطه بین تغییر مکانهای عمومی و تغییر مکانهای گره‌ای به صورت زیر استفاده می‌شود.

$$\{u\} = [N] \{\Delta\} \quad (19)$$

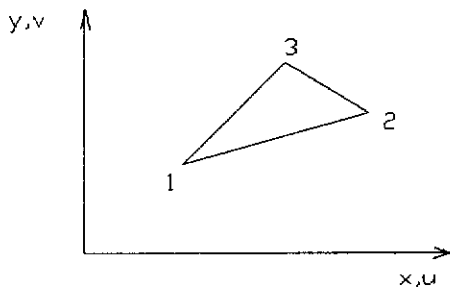
که در آن  $\{u\}$  بردار تغییر مکان داخل المان،  $[N]$  ماتریس

تغییر مکان به شکل زیر در نظر گرفته می‌شوند:

$$\begin{cases} u(x,y) = c_1 + c_2 x + c_3 y \\ v(x,y) = c_4 + c_5 x + c_6 y \end{cases} \quad (31)$$



شکل ۱ چگونگی مش‌بندی مدل‌ها



شکل ۲ المان مثلثی سه‌گره‌ای خطی

با داشتن تغییر مکانهای گره‌ای می‌توان ضرایب ثابت

را بدست آورد:

$$T = \frac{1}{V} \int_V \{u^*\}^T [\rho] \{u^*\} dV \quad (28)$$

که در آن،  $\{u^*\}$  بردار مشتق تغییر مکان نسبت به زمان،  $[\rho]$  ماتریس چگالی و  $T$  انرژی جنبشی است. با استفاده از رابطه (۱۹)،

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{V} \int_V \{\Delta^*\}^T [N]^T [\rho] [N] \{\Delta^*\} dV \\ &= \frac{1}{V} \{\Delta^*\}^T [M] \{\Delta^*\} \end{aligned} \quad (29)$$

که از این رابطه ماتریس جرم المان به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$[M] = \int_V [N]^T [\rho] [N] dV \quad (30)$$

برای مش‌بندی کره زمین به عنوان یک حجم، به نظر می‌رسد که طبیعی‌ترین نوع المان، المان حجمی گوه‌ای باشد. اما این‌گونه المان‌بندی باعث خواهد شد که حجم محاسبات به شدت افزایش یابد. برای اجتناب از این مسئله، کافی است به این نکته توجه شود که با چشم‌پوشی از تغییرات بسیار جزئی عوارض سطح زمین در مقایسه با شعاع آن، کره زمین را می‌توان یک شلجمی گون به صورت کره کامل با تقارن کامل محوری (Axisymmetric) حول محور دوران آن در نظر گرفت. از این‌رو، هر صفحه نصف‌النهاری (Meridional plane) از کره زمین بیانگر کلیه خواص لایه‌های متفاوت آن خواهد بود. افزون بر این، هر صفحه نصف‌النهاری نیز نسبت به محور دوران دارای تقارن است و می‌توان فقط نیمی از آن را برای مش‌بندی انتخاب کرد (شکل ۱). بنابراین ساده‌ترین نوع المان برای مش‌بندی کره زمین، المان مثلثی سطحی خطی با سه گره در صفحات نصف‌النهاری می‌باشد (شکل ۲). منظور از المان خطی این است که بردار تغییر مکان داخل المان به صورت تابعی خطی از متغیرهای  $x$  و  $y$  در نظر گرفته می‌شود. از این‌رو، توابع

i, k و z به صورت گردشی از ۱ تا ۳ تغییر می‌کنند. یکی از ویژگیهای توابع شکل آن است که مجموع آن‌ها در هر نقطه از المان برابر با یک می‌باشد.

### ساده‌سازی برای مسائل تقارن محوری

همانگونه که در بخش پیشین توضیح داده شد، کره زمین را می‌توان یک کره کامل با تقارن کامل محوری (Axisymmetric) حول محور دوران آن تلقی نمود. در این صورت برای جسمی با تقارن محوری، می‌توان فرمول‌بندی مسئله را ساده‌تر کرد. از این رو، روابط میان کرنش و تغییر مکان به صورت زیر در می‌آیند:

$$\epsilon_r = \frac{\partial w}{\partial r}$$

$$\begin{cases} \epsilon_z = \frac{\partial u}{\partial z} \\ \epsilon_\theta = \frac{\gamma_{\tau w}(r+w) - \gamma_{\tau r}}{\gamma_{\tau r}} = \frac{w}{r} \end{cases}$$

$$\gamma_{rz} = \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial r} \quad (36)$$

که شکل ماتریسی آن عبارت است از:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_r \\ \epsilon_z \\ \epsilon_\theta \\ \epsilon_{rz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = [d] \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \quad (37)$$

با مشخص شدن ماتریس توابع شکل [N] و ماتریس کرنش - تغییر مکان [d]، ماتریس [B] به صورت زیر بدست می‌آید.

$$\begin{cases} u_1 = c_1 + c_2 x_1 + c_3 y_1 \\ u_2 = c_1 + c_2 x_2 + c_3 y_2 \\ u_3 = c_1 + c_2 x_3 + c_3 y_3 \end{cases} \quad \begin{cases} v_1 = c_4 + c_5 x_1 + c_6 y_1 \\ v_2 = c_4 + c_5 x_2 + c_6 y_2 \\ v_3 = c_4 + c_5 x_3 + c_6 y_3 \end{cases} \quad (32)$$

در رابطه (۳۲) با حل دستگاه معادلات، ضرایب  $c_1$  و  $c_2$  بدست می‌آیند.

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{1}{\gamma A} [u_1(x_2 y_3 - x_3 y_2) + u_2(x_3 y_1 - x_1 y_3) \\ &\quad + (x_1 y_2 - x_2 y_1)] \\ c_2 &= \frac{1}{\gamma A} [u_1(y_2 - y_3) + u_2(y_3 - y_1) + u_3(y_1 - y_2)] \\ c_3 &= \frac{1}{\gamma A} [u_1(x_3 - x_2) + u_2(x_1 - x_3) + u_3(x_2 - x_1)] \\ \gamma A &= (x_2 y_3 - x_3 y_2) + (x_3 y_1 - x_1 y_3) + (x_1 y_2 - x_2 y_1) \end{aligned} \quad (33)$$

A مساحت المان است و برای اینکه مساحت حاصل از رابطه بالا مقدار مثبت داشته باشد، باید شماره‌گذاری محلی گره‌های المان در جهت مثبت مثلثاتی باشد. با روالی مشابه با آن چه که انجام پذیرفت، می‌توان ضریب  $c_4$  و  $c_5$  و  $c_6$  را بدست آورد. با توجه به مقادیر حاصله می‌توان تغییر مکان مربوط به هر المان را به صورت زیر نوشت.

$$\begin{cases} u(x,y) = u_1 N_1 + u_2 N_2 + u_3 N_3 = \sum_{i=1}^3 u_i N_i \\ v(x,y) = v_1 N_1 + v_2 N_2 + v_3 N_3 = \sum_{i=1}^3 v_i N_i \end{cases} \quad (34)$$

که  $N_i$  تابع شکل المان است و به صورت زیر بیان می‌شود.

$$\begin{cases} N_i = \frac{1}{\gamma A} (\alpha_i + \beta_i x + \gamma_i y) \\ \alpha_i = x_j y_k - x_k y_j \\ \beta_i = y_j - y_k \\ \gamma_i = x_k - x_j \end{cases} \quad (35)$$

را از انتگرال خارج نمود. راه دوم خطای کمی را در محاسبات ایجاد می‌کند ولی در عوض ادامه محاسبات را آسان‌تر می‌نماید [9]. برای بدست آوردن ماتریس جرم المان از روابط (۳۰) و (۴۰) بهره‌گیری می‌شود.

$$[M] = \gamma \pi r \int_A [N]^T [\rho] [N] dA \quad (42)$$

با استفاده از رابطه (۳۷) ماتریس جرم بدست می‌آید.

$$[M] = \frac{\pi \bar{\rho} A}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (43)$$

آنالیز حساسیت برای سیستم با ارتعاشات آزاد با فرض اینکه  $b$  پارامتر مورد نظر برای انجام آنالیز حساسیت باشد، معادله حاکم بر سیستم با ارتعاشات آزاد عبارت است از:

$$K(b)Y = \xi M(b)Y \quad (44)$$

که در آن،  $K$  ماتریس سختی کل،  $M$  ماتریس جرم کل،  $\xi$  مقدار ویژه،  $Y$  بردار ویژه و  $b$  پارامتر مورد نظر برای آنالیز حساسیت است.

چنانچه بردارهای ویژه نسبت به ماتریس جرم نرمال شده باشند، رابطه زیر برقرار است.

$$Y^T M(b) Y = 1 \quad (45)$$

با ضرب  $Y^T$  در دو طرف معادله (۴۴)، رابطه زیر بدست می‌آید.

$$Y^T K(b) Y = \xi Y^T M(b) Y \quad (46)$$

اگر از معادله (۴۶) نسبت به پارامتر  $b$  مشتق‌گیری شود، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Y^T}{\partial b} K(b) Y + Y^T \frac{\partial K(b)}{\partial b} Y + Y^T K(b) \frac{\partial Y}{\partial b} \\ = \frac{\partial \xi}{\partial b} Y^T M(b) Y + \frac{\partial Y^T}{\partial b} M(b) Y + \xi Y^T \frac{\partial M(b)}{\partial b} Y \\ + Y^T M(b) \frac{\partial Y}{\partial b} \end{aligned} \quad (47)$$

$$[B] = \frac{1}{\gamma A} \begin{bmatrix} 0 & \beta_1 & 0 & \beta_2 & 0 & \beta_3 \\ \gamma_1 & 0 & \gamma_2 & 0 & \gamma_3 & 0 \\ 0 & \frac{N_1}{r} & 0 & \frac{N_2}{r} & 0 & \frac{N_3}{r} \\ \beta_1 & \gamma_1 & \beta_2 & \gamma_2 & \beta_3 & \gamma_3 \end{bmatrix} \quad (38)$$

با استفاده از قانون هوک، ماتریس تنش - کرنش  $[D]$  به شکل زیر در می‌آید.

$$[D] = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & \nu & 0 \\ (1-\nu) & 1 & (1-\nu) & 0 \\ \nu & (1-\nu) & 1 & 0 \\ \nu & \nu & (1-\nu) & 1 \\ 0 & 0 & 0 & (1-2\nu) \\ 0 & 0 & 0 & 2(1-\nu) \end{bmatrix} \quad (39)$$

برای بدست آوردن ماتریس سختی المان، از رابطه (۲۷) استفاده می‌شود. سپس می‌توان دیفرانسیل حجم را به صورت زیر به دیفرانسیل سطح ارتباط داد.

$$\begin{cases} dV = \gamma \pi \bar{r} dA \\ \bar{r} = \frac{r_1 + r_2 + r_3}{3} \end{cases} \quad (40)$$

بنابراین، معادله (۲۷) به صورت زیر خواهد بود.

$$[K] = \gamma \pi \bar{r} \int_A [B]^T [D] [B] dA \quad (41)$$

درایه‌های ماتریس  $[B]$  تابع  $r$  و  $z$  هستند و نمی‌توان آنها را به عنوان یک ثابت از انتگرال خارج کرد. بنابراین، برای محاسبه ماتریس سختی المان، دو راه می‌توان در پیش گرفت. راه اول آن است که با استفاده از روش انتگرال‌گیری عددی روی سطح المان، مقدار انتگرال محاسبه شود و راه دوم این است که ماتریس  $[B]$  برای مرکز هندسی المان محاسبه گردد، که در این صورت مقادیر درایه‌هایش اعداد ثابت بوده و می‌توان آن



ترانهاد رابطه (۴۴) چنین بیان می شود:

$$Y^T K(b) = \xi Y^T M(b) \quad (48)$$

با ضرب طرفین این رابطه در  $\frac{\partial Y}{\partial b}$  نتیجه می شود:

$$Y^T K(b) \frac{\partial Y}{\partial b} = \xi Y^T M(b) \frac{\partial Y}{\partial b} \quad (49)$$

همچنین، با ضرب طرفین رابطه (۴۴) در  $\frac{\partial Y^T}{\partial b}$ ، رابطه زیر بدست می آید.

$$\frac{\partial Y^T}{\partial b} K(b) Y = \xi \frac{\partial Y^T}{\partial b} M(b) Y \quad (50)$$

حال با استفاده از روابط (۴۹)، (۵۰) و (۴۵)، رابطه (۴۷) به صورت زیر ساده می شود.

$$\frac{d\xi}{db} = Y^T \frac{\partial K(b)}{\partial b} Y - \xi Y^T \frac{\partial M(b)}{\partial b} Y \quad (51)$$

رابطه (۵۱) حساسیت مقادیر ویژه  $\xi$  را نسبت به هر پارامتر موجود در مسئله بیان می کند [7].

### رابطه حساسیت مقادیر ویژه نسبت به چگالی

در مسئله مورد نظر، یکی از اهداف، ارائه تابع چگالی است به طوری که مقادیر ویژه مدل ارائه شده با زمین یکسان گردد. بنابراین، پارامتر مورد نظر بای آنالیز حساسیت، در این مورد، چگالی است. با توجه به مطالب مطروحه در بخش اجزای محدود ملاحظه می شود که ماتریس سختی کل، تابعی از چگالی نیست. بنابراین، مقدار  $Y^T \frac{\partial K(\rho)}{\partial \rho} Y$  برابر با صفر است و معادله (۵۱) به صورت زیر خواهد شد.

$$\frac{d\xi}{d\rho} = \xi Y^T \frac{\partial K(\rho)}{\partial \rho} Y \quad (52)$$

با تقریب زدن  $d$  به  $\Delta$ ، فرم ماتریسی معادله (۵۲) به صورت زیر می شود.

$$[\Delta \xi] = [Q] [\Delta \rho] \quad (53)$$

برای استفاده از این روابط جهت تصحیح الگوی چگالی، ابتدا باید پیش فرضی برای الگوی چگالی در نظر گرفته شود و سپس با تحلیل ارتعاشات، مسئله مقادیر ویژه برای این الگوی چگالی بدست آید. با مشخص شدن بردارهای ویژه و ماتریس جرم، ماتریس  $Q$  حاصل می شود و با محاسبه بردار  $\Delta \xi$  که اختلاف مقادیر ویژه مسئله حل شده، با مقادیر ویژه خواسته شده می باشد (مقادیر ویژه زمین)، بردار  $\Delta \rho$  بدست می آید. اگر این تغییرات چگالی نسبت به الگوی چگالی اولیه اعمال شود، الگوی چگالی هماهنگ با فرکانسهای طبیعی زمین حاصل خواهد شد.

در مسئله حاضر چون تقریب مورد استفاده خطی است (به علت استفاده از مشتق اول)، اگر مقادیر بردار  $\Delta \xi$  بزرگ باشند در صورت اعمال آنها در یک مرحله، خطای نسبتاً زیادی ایجاد می شود. در این موارد باید  $\Delta \xi$  را به مقادیر کوچکتر تقسیم کرد و مرحله به مرحله این تغییرات را در مسئله اعمال نمود تا سرانجام به تغییرات چگالی مورد قبول رسید.

### الگوریتم برنامه کامپیوتری

به منظور تحلیل مسئله، یک برنامه به زبان فورترن نوشته شده و مراحل که برنامه برای انجام آنالیز طی می کند، در فلوچارت ضمیمه آورده شده است. توضیحات زیر، به درک این مراحل کمک می کنند:

۱- برای مسئله مورد نظر، هندسه مدل نیم دایره است که مرکزش در مبدا مختصات قرار دارد و باید تعداد لایه ها در راستای شعاعی، تعداد تقسیمات لایه مرکزی و خواص لایه ها را وارد کرد.

۲- تعداد المانها، تعداد گرهها و تعداد قیود مدل و تعداد فرکانسهای مورد نظر که قرار است مقدار آنها با استفاده از آنالیز حساسیت اصلاح شود و همچنین،

$$R = 6380 \times 10^3 \text{ m} \quad \text{شعاع زمین}$$

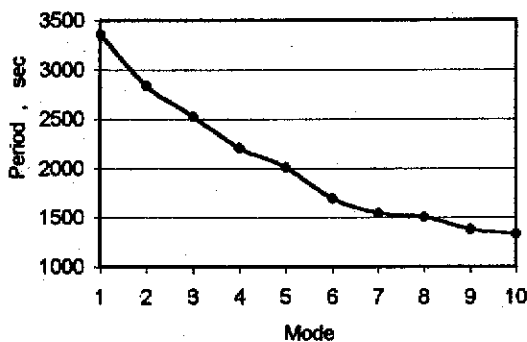
$$\bar{\rho} = 5520 \text{ kg / m}^3 \quad \text{چگالی متوسط زمین}$$

$$T_0 = 3360 \text{ sec.} \quad \text{پریود اولین نوسان آزاد زمین}$$

مدل اول. در این مدل زمین مانند گوی فولادی یکنواختی فرض شده است [10]. خواص مکانیکی در هر هشت لایه یکسان و بصورت زیر می‌باشند.

$$E = 207 \text{ GPa}, \quad \nu = 0/3, \quad \rho = 5520 / \text{m}^3$$

پس از تحلیل ارتعاشات این مدل، پریود نوسانات آزاد آن حساب شده و در نمودار شکل (۳) آورده شده‌اند.



شکل ۳ نمودار پریود ارتعاشات آزاد مدل اول

مدل دوم. در این مدل، ضریب الاستیک و نسبت پواسن برای هر هشت لایه یکسان فرض شده است ولی چگالی در هر لایه متفاوت می‌باشد. جدول (۱) مقادیر پیشنهادی برای چگالی در هر لایه را از نتایج بدست آمده به وسیله امواج حجمی ارائه می‌دهد [1]. در این مدل ضریب الاستیک مانند مدل اول فرض شده است. پس از حل ارتعاشی این مدل، پریودهای نوسانات آزاد بدست آمده‌اند که در نمودار شکل (۴) ارائه شده‌اند.

تعداد دفعات تکرار مربوط به آنالیز حساسیت باید وارد شود.

۳- مراحل زیر توسط برنامه اجرا می‌شود:

- ماتریس ارتباط دهنده تنش - کرنش ساخته می‌شود.
- توابع شکل مربوط به هر المان ساخته می‌شوند.
- ماتریس جرم هر المان محاسبه می‌شود.
- با توجه به ماتریس جرم هر المان و ماتریس کد، ماتریس جرم کل ساخته می‌شود.
- ماتریس سختی هر المان ساخته می‌شود.
- با توجه به ماتریس سختی هر المان و ماتریس کد، ماتریس سختی کل ساخته می‌شود.
- در قسمت آخر برای فرکانسهایی که اصلاحات باید انجام شود، مقدار اصلاحی هر فرکانس سوال شده و با استفاده از آنالیز حساسیت، تغییرات چگالی لازم محاسبه می‌شود و مقادیر جدید چگالی و فرکانس‌های ارتعاشات به عنوان خروجی چاپ می‌شوند.

### ارائه مدل‌هایی ساده برای زمین

برای نشان دادن کارایی آنالیز حساسیت چهار مدل ساده به عنوان نمونه ارائه می‌شوند. در این مدل‌ها دو نکته در نظر گرفته شده‌اند. اول اینکه مدل ارائه شده باید مطابق با مدل‌های معتبر، جرم و گشتاور اینرسی یکسان با زمین داشته باشند، و دوم اینکه پریود اولین نوسانات آزاد آن با پریود اول زمین برابر باشد. نحوه المان‌بندی همه مدل‌ها یکسان است، به طوری که این مدل‌ها از هشت لایه مجزا در راستای شعاعی تشکیل شده‌اند (شکل ۱). داده‌های مورد نیاز برای زمین عبارتند از [1]:

$$M = 5/977 \times 10^{24} \text{ kg} \quad \text{جرم زمین}$$

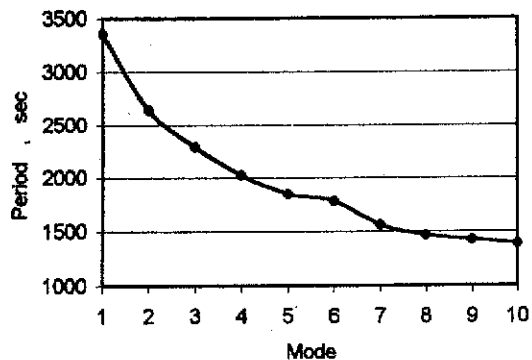
$$I = 8/02535 \times 10^{37} \text{ kg.m}^2 \quad \text{گشتاور اینرسی زمین}$$

جدول ۱ مشخصات مکانیکی مدل دوم

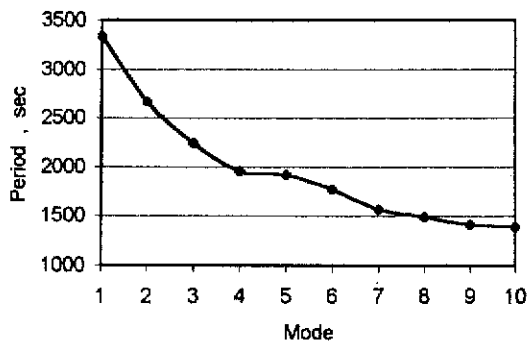
نسبت پواسان $\nu$	ضریب الاستیک E(GPa)	چگالی $\rho(kg/m^3)$	شعاع لایه (km)
۰/۳۸	۲۰۷	۱۳۰۰۰	۱۲۰
۰/۳۸	۲۰۷	۱۲۵۰۰	۱۸۷۰
۰/۳۸	۲۰۷	۱۱۵۰۰	۲۸۲۰
۰/۳۸	۲۰۷	۱۰۵۰۰	۳۴۸۰
۰/۳۸	۲۰۷	۵۵۰۰	۴۴۷۰
۰/۳۸	۲۰۷	۴۵۳۰	۵۷۷۰
۰/۳۸	۲۰۷	۳۵۰۰	۶۳۵۴
۰/۳۸	۲۰۷	۲۵۰۰	۶۳۷۰

جدول ۲ مشخصات مکانیکی مدل چهارم

نسبت پواسان $\nu$	ضریب الاستیک E(GPa)	چگالی $\rho(kg/m^3)$	شعاع لایه (km)
۰/۳	۲۳۵/۱	۱۳۰۰۰	۱۲۰
۰/۳	۲۳۵/۱	۱۲۵۰۰	۱۸۷۰
۰/۳	۲۳۵/۱	۱۱۵۰۰	۲۸۲۰
۰/۳	۲۳۵/۱	۱۰۵۰۰	۳۴۸۰
۰/۳	۲۳۵/۱	۵۵۰۰	۴۴۷۰
۰/۳	۲۳۵/۱	۴۵۳۰	۵۷۷۰
۰/۳	۲۳۵/۱	۳۵۰۰	۶۳۵۴
۰/۳	۲۳۵/۱	۲۵۰۰	۶۳۷۰



شکل ۵ نمودار پیوند ارتعاشات آزاد مدل سوم



شکل ۴ نمودار پیوند ارتعاشات آزاد مدل دوم

مدل چهارم. در این مدل ضریب الاستیک و نسبت پواسان هر لایه، با میانمایی از مقادیر مربوط به مدل ارائه شده توسط امواج حجمی [1] مطابق جدول (۳) بدست آمده‌اند. برای این مدل، پیوندهای نوسانات آزاد در نمودار شکل (۶) آورده شده‌اند.

مدل سوم. این مدل مانند مدل دوم می‌باشد، با این تفاوت که ضریب الاستیک و نسبت پواسان مطابق جدول (۲) تغییر کرده است. در این مدل نسبت پواسان مانند مدل اول فرض شده است. پیوند نوسانات آزاد این مدل در نمودار شکل (۵) نشان داده شده است.

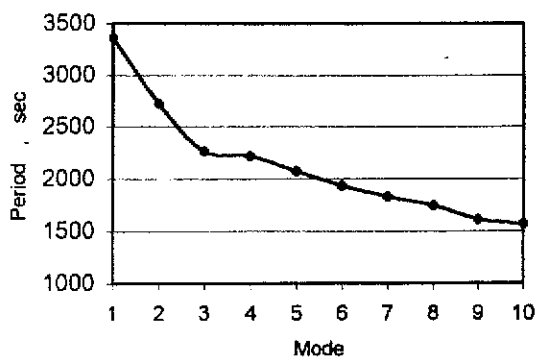
می‌شود که مدل‌های نمونه دوم و سوم، به دلیل اینکه برای آنها تغییرات چگالی یکسانی در نظر گرفته شده است، مشابهت بیشتری را نسبت به یکدیگر نشان می‌دهند. با توجه به این واقعیت که در زمان حاضر مدل ارائه شده برای کره زمین توسط اندرسون و هارت [11] به عنوان معتبرترین مدل شناخته می‌شود، چهار مدلی که در این نوشتار به عنوان نمونه‌های ساده پیشنهاد شده، با مدل آنان مقایسه گردیده و در نمودار (۷) نشان داده شده‌اند. شایان ذکر است که اندرسون و هارت با استفاده از اطلاعات، مشخصات و خصوصیات حاصله از انتشار امواج حجمی در کره زمین، مدلی بسیار دقیق از آن را ارائه داده‌اند و چند صد مود ارتعاشات کره زمین را در نظر گرفته و فرکانس‌های طبیعی وابسته را محاسبه کرده‌اند.

جدول ۳ مشخصات مکانیکی مدل سوم

نسبت پواسان $\nu$	ضریب الاستیک E(GPa)	چگالی $\rho(kg/m^3)$	شعاع لایه (km)
۰/۴	۴۱۱/۵۳۶	۱۳۰۰۰	۱۲۰
۰/۴۵	۱۶۰/۰	۱۲۵۰۰	۱۸۷۰
۰/۴۵	۶۳/۳۸۶	۱۱۵۰۰	۲۸۲۰
۰/۴۵	۴۷/۱۴	۱۰۵۰۰	۲۴۸۰
۰/۳۰۷	۷۵۳/۸۵	۵۵۰۰	۴۴۷۰
۰/۲۷۷	۴۶۲/۱۲	۴۵۳۰	۵۷۷۰
۰/۳	۱۹۱/۷۵	۳۵۰۰	۶۳۵۴
۰/۲۲۹	۸۸/۷۴	۲۵۰۰	۶۳۷۰

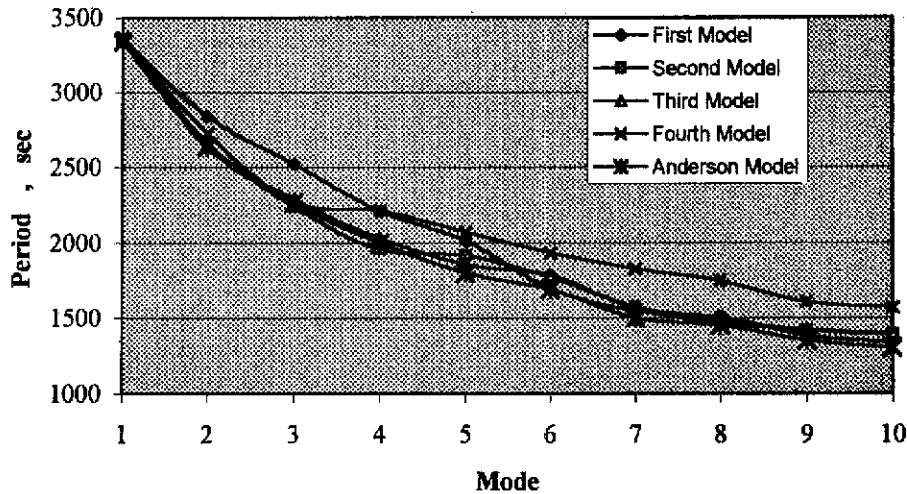
جدول ۴ مقایسه پریود مدل‌های پیشنهادی

مود	مدل اول	مدل دوم	مدل سوم	مدل چهارم
	پریود (sec)	پریود (sec)	پریود (sec)	پریود (sec)
۱	۳۳۶۰	۳۳۳۹	۳۳۵۹	۳۳۶۹
۲	۲۸۴۰	۲۶۶۴	۲۶۳۸	۲۷۲۶
۳	۲۵۲۴	۲۲۴۰	۲۲۸۹	۲۲۶۸
۴	۲۲۰۸	۱۹۵۶	۲۰۲۶	۲۲۱۵
۵	۲۰۱۱	۱۹۱۳	۱۸۵۳	۲۰۷۱
۶	۱۶۹۴	۱۷۶۹	۱۷۸۴	۱۹۳۲
۷	۱۵۴۵	۱۵۶۹	۱۵۶۳	۱۸۲۵
۸	۱۵۰۹	۱۴۹۱	۱۴۶۴	۱۷۴۵
۹	۱۳۸۰	۱۴۱۶	۱۴۲۳	۱۶۰۷
۱۰	۱۳۳۸	۱۳۹۱	۱۳۹۲	۱۵۶۵



شکل ۶ نمودار پریود ارتعاشات آزاد مدل چهارم

در جدول شماره (۴) پریود ارتعاشات طبیعی مدل‌های پیشنهادی برای ده مود با یکدیگر مقایسه شده است. همانگونه که ملاحظه می‌شود، پریود مود اول برای هر چهار مدل به یکدیگر بسیار نزدیک‌اند اما در مودهای بعدی به تدریج اختلاف آن‌ها افزایش می‌یابد چراکه آنالیز حساسیت در چهار نمونه حاضر برای مود اول انجام پذیرفته است. همچنین مشاهده



شکل ۷ نمودار مقایسه پریود ارتعاشات آزاد مدل‌های پیشنهادی با مدل اندرسون و هارت

این مدل‌ها فقط جنبه نمونه دارند و به عنوان تنها مدل‌های قابل دستیابی به وسیله روش پیشنهادی شناخته نمی‌شوند. به عبارت دیگر، با استفاده از روش پیشنهادی می‌توان در هر زمینه از زمینه‌های متفاوت مهندسی، مدلی ساده و متناسب با داده‌ها و نیازهای آن زمینه خاص ایجاد نمود. برای رسیدن به این هدف، ابتدا فرم اجزای محدود مسائل تقارن محوری بیان شده است. سپس، رابطه آنالیز حساسیت برای مقادیر ویژه نسبت به چگالی المان‌ها استخراج گشته که از آن، برای یکسان کردن پریود ارتعاشات مدل‌های پیشنهادی با پریودهای مورد نظر کره زمین باید استفاده گردد و در مرحله بعد، برنامه مورد نیاز جهت انجام محاسبات به

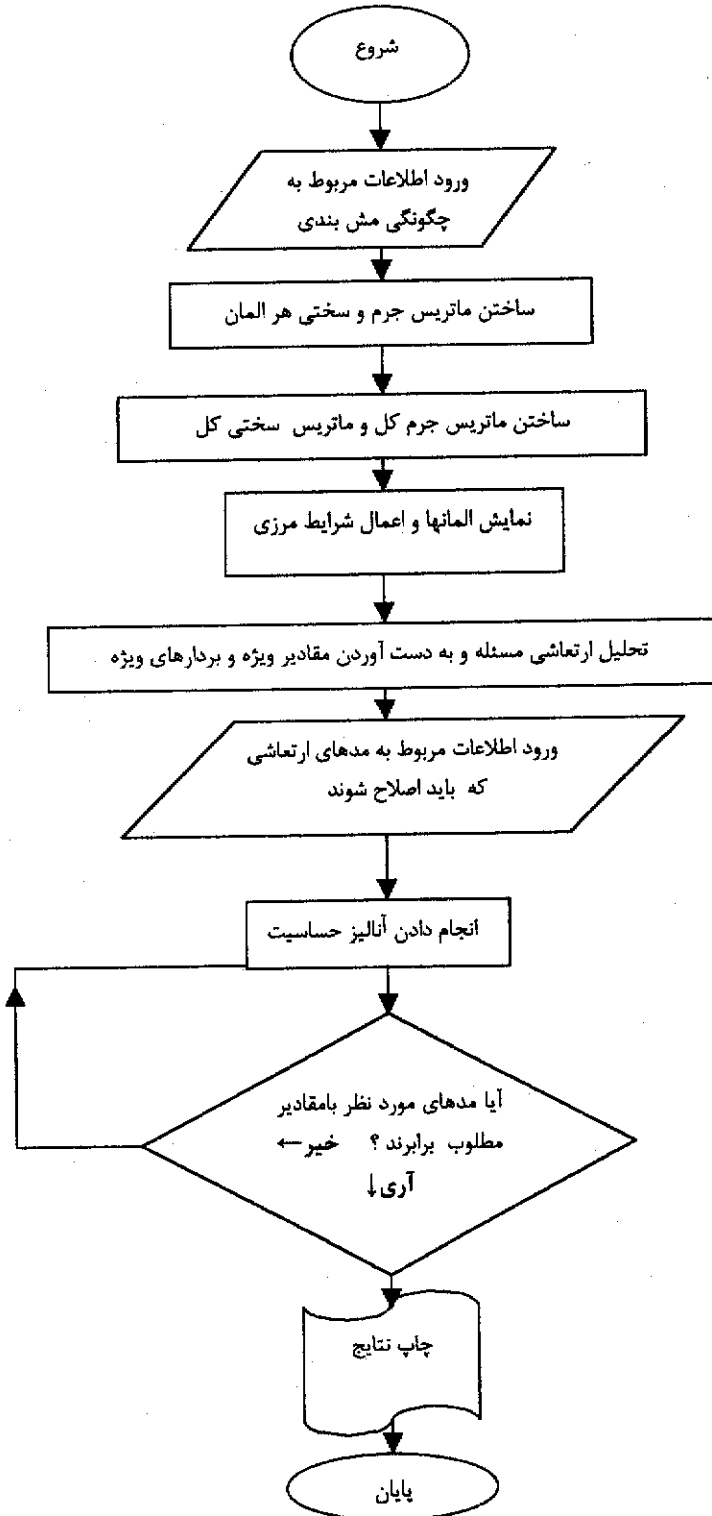
### نتیجه‌گیری

تحلیل خواص مکانیکی کره زمین به عنوان یک سیستم مکانیکی، نیازمند ارائه مدلی ساده از آن می‌باشد. مدل‌هایی که براساس سرعت امواج حجمی ارائه شده‌اند، خواص زمین را برحسب عمق به صورت تابعی نقطه‌ای بیان می‌کنند. و از این رو، استفاده از آن‌ها به عنوان مدل زمین در مسائل خاص مهندسی، بر حجم محاسبات می‌افزاید و رسیدن به پاسخ مناسب را دشوار می‌سازد. در این تحقیق سعی شده است با به کارگیری آنالیز حساسیت، چند مدل ساده و قابل استفاده برای زمین ارائه شود که قیود مهم جرم، گشتاور اینرسی و پریود اولین نوسان آزاد زمین را ارضاء کنند.

مؤثرترین مود می‌باشد و در بسیاری موارد، تعیین مشخصات فقط مود اول کفایت می‌کند. در مدل‌هایی که در این مقاله ارائه شده، خواص مکانیکی در هر لایه ثابت فرض شده است. بنابراین به دلیل سادگی این مدل‌ها و در عین حال ارضای قیود لازم، استفاده از آن‌ها در محاسبات مهندسی مربوط به زمین، در مقایسه با مدل‌های ارائه شده بوسیله امواج حجمی، باعث کاهش میزان و حجم محاسبات می‌شود. با توجه به نتایج بدست آمده، نکته جالب این است که فرض در نظر گرفتن زمین به صورت یک کره فولادی در مسائل مهندسی، در مواردی فرض معقولی می‌باشد که قبلاً جفریز نیز به این نتیجه رسیده بود [12]. به دلیل مطابقت نسبتاً خوب و معقول چند نمونه مدل ارائه شده با مدل معتبر اندرسون و هارت، می‌توان نتیجه گرفت که روش پیشنهاد شده در این تحقیق قادر به ایجاد مدل‌هایی ساده از کره زمین برای استفاده در زمینه‌های مختلف مهندسی می‌باشد. روش پیشنهادی به تفصیل توضیح داده شده است و انتظار می‌رود که هر کاربری بتواند گام به گام آن را تعقیب نموده و در صورت لزوم تغییر دهد و یا با افزایش تعداد لایه‌ها و یا در نظر گرفتن خواص دقیق‌تری برای ضریب الاستیک، نسبت پواسان و غیره، مدل مناسب و دلخواه خود را به وجود آورد به طوری که بدون نقض قیود اساسی، پاسخ مورد نظر در مسئله خاص را بیابد.

زبان فرتن نوشته شود. با استفاده از روش پیشنهادی چهار مدل ساده ارائه شده که مقادیر مربوط به خواص لایه‌های مختلف این مدل‌ها، با میانگین خواص مدل‌های حاصل از طریق امواج حجمی [1]، مطابقت داشته و با استفاده از برنامه کامپیوتری، این مدل‌ها اصلاح شده‌اند. بایستی توجه داشت که واقعیت شلجمی گونه بودن کره زمین، در این تحقیق نادیده انگاشته شده است.

نتایج عددی حاصل از این مدل‌ها با مدل معتبر ارائه شده توسط اندرسون و هارت [11]، در نمودار شکل (۷) مقایسه شده است که مطابقت معقولی را نشان می‌دهد. این مطابقت بخصوص در مورد مدل‌های دوم و سوم محسوس‌تر است. از بررسی این نتایج چنین بر می‌آید که پیرو ارتعاشات مود اول دارای خطایی بسیار جزئی نسبت به مدل اندرسون و هارت می‌باشد، اما در مودهای بعدی خطا به تدریج افزایش یافته و به حدود ۲۰٪ در مود دهم می‌رسد. علت این است که از آنالیز حساسیت برای یکسان نمودن فرکانس ارتعاشات فقط مود اول استفاده شده است، اما در هر مدل خاص می‌توان بر حسب نیاز، از آنالیز حساسیت برای یکسان نمودن فرکانس ارتعاشات سایر مودها بهره جست. شایان ذکر است که در بسیاری از مسائل مهندسی، مود اول ارتعاشات مهمترین و



## مراجع

1. Kaufman, A. A., and Levshin, A. L., "*Acoustic and Elastic Wave Field in Geophysics, Part I*", Elsevier Science, (2000).
2. Milar, C. E., and Mitalas, R., "Model of the Earth with a Constant Density Core and a Constant Gravity Mantle", Technical Report, University of Western Ontario, Department of Physics and Astronomy, (1992).
۳. معظمی گودرزی، خسرو، "لرزه‌شناسی"، انتشارات وزدرت علوم و آموزش عالی، (۱۳۵۱).
4. Ghi-Yuen, Wang., "A Simple earth model", *J.G.R.*, Vol. 77, No. 23, p:4318, (1972).
5. Anderson, D. L. A., "A Seismic equation of state", *Geophys. J. R. Astr. Soc.*, Vol. 13, p. 9-13, (1976).
6. Djoudi, M. S., and Baha, I. H., "Physical Parameter Modifications for Specified Frequencies", Technical Report, Brunel University, Uxbridge, United Kingdom, (1999).
7. Edward. J., Haug, K. Choi, Kyung., and Kamkov, Vadim., "*Design Sensitivity Analysis of Structural System*", Academic Press Inc, (1986).
8. Roës, C. T. F., "*Finite Element Methods In Engineering Science*", Ellis Horwood Limited, (1990).
9. Zienkiewicz, O. C., and Taylor, R. L., "*The finite element method*", Fourth Edition, McGraw-Hill, (1989).
10. Love, A. E. H., "*Some Problems of Geodynamics*", Dover Publications, (1911).
11. Anderson, D. L., and Hart, R., "An earth model based on free oscillations and body waves", *J. G. R.* Vol. 81, No. 8, p:1461, (1976).
12. Jeffreys, H., "*The Earth*", Cambridge University Press, 6th ed. Cambridge, England, (1976).