

طراحی ایزوتروپی و بررسی دقت سینماتیکی یک روبات موازی صفحه‌ای با کاربردهای ماشین ابزاری*

جواد انفرادی^(۱) حمیدرضا محمدی دانیالی^(۲) محمدحسن حجتی^(۳)

چکیده در این مقاله به بررسی یک روبات موازی صفحه‌ای با کاربردهای ماشین ابزاری که سفتی بالا، فضای کاری نسبتاً متوسط و عدم وجود نقاط منفرد در محدوده فضای کاری از ویژگی‌های برجسته آن است، پرداخته می‌شود. با استفاده از معیار ایزوتروپی، طرح‌های ایزوتروپی این روبات داده می‌شود. شاخص شرط همه جایی (GCI) این روبات در سرتاسر فضای کاری‌اش مقدار مطلوبی را نشان می‌دهد که این ویژگی استفاده از این روبات را در کارهای با دقت بالا، مانند کاربردهای ماشین ابزاری، منطقی می‌سازد.
واژه‌های کلیدی روبات موازی، ماتریس ژاکوبی، ایزوتروپی، شاخص شرط سینماتیکی.

Isotropic Design and Kinematics Accuracy of a Planar Parallel Manipulator with Machine Tool Applications

J. Enferadi

H. R. Mohammadi

M. H. Hojjati

Abstract In this paper a planar parallel manipulator, for machine tools applications, is introduced. high stiffness, nonexistence of singular cases in its workspace and relatively large workspace are its main advantages. Using the isotropy criterion, isotropic designs of the manipulator is given. Moreover, the global conditioning index (GCI) of the manipulator, throughout its workspace is happened to be pretty well which make it suitable for any high precision work such as machine tool applications.

Key words Parallel Manipulator, Jacobian Matrix, Isotropy, Kinematics Conditioning Index.

* نسخه اولیه مقاله در تاریخ ۸۰/۱۲/۱۵ و نسخه نهایی آن در تاریخ ۸۱/۹/۱۰ به دفتر نشریه رسیده است.

(۱) کارشناس ارشد مهندسی مکانیک، صنایع ناامن‌الائمه، سازمان هوا و فضا

(۲) استادیار گروه مهندسی مکانیک، دانشکده مهندسی، دانشگاه مازندران

(۳) استادیار گروه مهندسی مکانیک، دانشکده مهندسی، دانشگاه مازندران

مقدمه

ارتعاشات در سرعت های بالا می‌گردد، که از معایب عمده همه این سیستم‌ها می‌باشد. برای رفع این نقص، استفاده از بازوهای مکانیکی موازی که دارای طولهای کوتاه باشند منطقی به نظر می‌رسد. در این راستا، استفاده از مکانیزم مثلث دوگانه برای طراحی ماشین ابزار، که اکنون در مرحله طراحی و ساخت نمونه است، پیشنهاد شده است. این بازوی مکانیکی دارای نقاط منفرد در فضای کاری است که در آن نقاط هیچ‌گونه کنترلی روی حرکت آن وجود نخواهد داشت [1].

بازوی مکانیکی موازی ستاره - مثلث (ST)، به علت نداشتن نقاط منفرد در فضای کاری، نقص یاد شده را برطرف می‌کند. به علت سفتی بالا می‌توان از این مکانیزم برای حرکت صفحه‌های اسپیندل ماشین‌های ابزار با سرعت بالا علاوه بر حرکت عمودی میز ماشین ابزار استفاده کرد. بنابراین طراحی یک ماشین ابزار با چهار محور بر اساس مکانیزم فوق امکان‌پذیر است. کاربرد این مکانیزم برای ماشین‌های ابزار تراش و فرز و سنگ زنی با سرعت و دقت بالا که نیاز به فضای کاری نسبتاً متوسطی دارند، می‌باشد. نمای شماتیکی از این ماشین ابزار در شکل (۴) نشان داده شده است که سه درجه آزادی متعلق به حرکت اسپیندل، توسط یک مکانیزم S-T ارائه می‌گردد و میز نیز در جهت عمود بر صفحه آن حرکت کند. در این مقاله طراحی مکانیزم حرکت اسپیندل در صفحه مورد مطالعه قرار می‌گیرد. از آنجا که این حرکت باید از دقت بالایی برخوردار باشد از اصول طراحی ایزوتروپی استفاده می‌شود. این طراحی بر شرایط ماتریس های ژاکوبی که سرعت محرک‌ها را به سرعت نهایی مرتبط می‌سازد، استوار خواهد بود. بر اساس شرط ایزوتروپی ماتریس ژاکوبی، طول مشخصه این روبات که برای همگن کردن درایه‌های ماتریس ژاکوبی از آن استفاده می‌شود، برحسب زوایه چرخش مجری نهایی (ستاره) بدست

اخیراً استفاده از تحول تکنولوژی روبات‌ها در طراحی ماشین ابزار بسیار متداول شده است. ماشین ابزارهای سنتی از دیدگاه زنجیره سینماتیکی یک زنجیره سری را تشکیل می‌دهند. اما امروزه استفاده از تکنولوژی بازوهای مکانیکی موازی، که برای رفع نقایص بازوهای سری ابداع شده‌اند، متداول شده است. نسبت پایین حمل بار به وزن، دقت پایین و سفتی کم از معایب عمده بازوهای مکانیکی سری است. این‌گونه معایب از اتصال سری بازوها (که به فرم یک تیر یک سر درگیر است) و اینکه هر موتور مسئولیت حمل و حرکت کلیه موتورهای و بازوهای بالادست خود را دارد، ناشی می‌شود. افزون براین، دقت کاری در بازوهای مکانیکی سری بشدت متأثر از لقی‌ها در مفاصل است که به صورت سری به یکدیگر متصل می‌شوند. برای رفع این معایب باید نقطه کاری را توسط چند بازو به تکیه‌گاه صلب متصل نمود و همچنین موتورها را روی زمین قرار داد. مکانیزم شبیه ساز پرواز و مکانیزم مثلث دوگانه (Double-Triangle) [1] از این گونه‌اند.

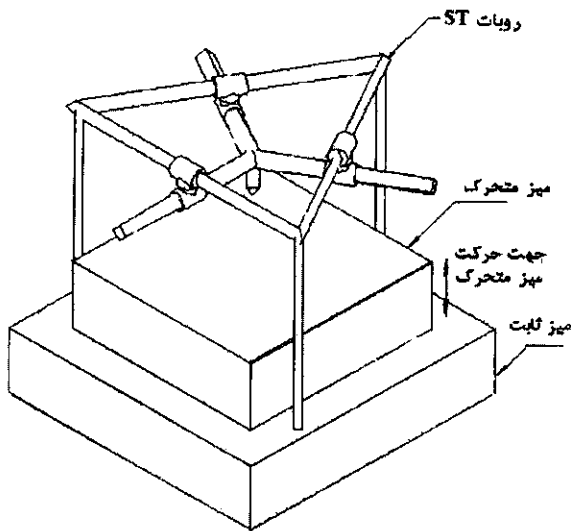
تقاضای روز افزون بازار برای تولید ماشین ابزارهای سبک با سرعت و دقت بالا و نیز با مشخصات دینامیکی خوب، استفاده از بازوهای مکانیکی موازی را اجتناب‌ناپذیر ساخته است. در این خصوص مکانیزم شبیه‌ساز پرواز برای ساخت ماشین ابزار Hexapod مورد استفاده قرار گرفته است (شکل ۱) [2]. این ماشین ابزار به دلیل استفاده از بازوهای تلسکوپی دارای فضای کاری کوچکی است که در همه جهات به یک اندازه می‌باشد. برای رفع این مشکل ماشین ابزارهای هگزاگلاید (Hexaglide) شکل (۲) و هگزام (HexaM) شکل (۳) که امکان افزایش فضای کاری در جهات خاص را فراهم می‌آورند، ساخته شده‌اند [3-6]. استفاده از بازوهای بلند در تمامی طرح‌های فوق موجب



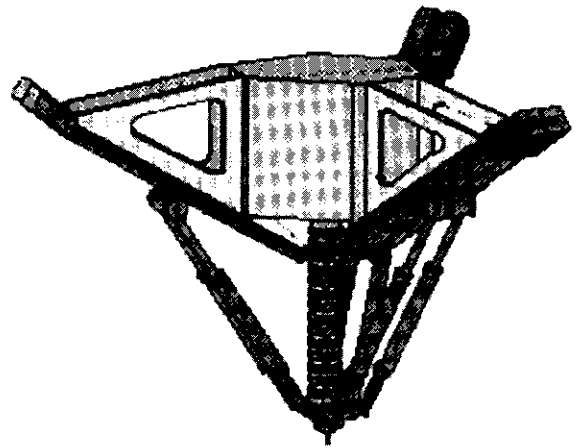
شکل ۲ ماشین ابزار Hexaglide



شکل ۱ ماشین ابزار Hexapode



شکل ۴ نمای شماتیکی از ماشین ابزار ST



شکل ۳ ماشین ابزار HexaM

طول ضلع های مثلث که با $\{q_i\}^T$ نشان داده شده است، تأمین می شود.

تحلیل سرعت روبات ST

در این بخش رابطه بین سرعت صفحه متحرک و نرخ سرعت مفاصل بدست می آید. معمولاً این رابطه برای روبات های موازی به صورت زیر بیان می شود:

$$J\dot{\theta} + K\dot{\tau} = \dot{0} \quad (1)$$

که در آن J و K ماتریس های ژاکوبی روبات، $\dot{\theta}$ بردار سرعت محرک ها و $\dot{\tau}$ آرایه چرخشی است که به صورت زیر تعریف می شود:

$$\dot{\tau} = \begin{bmatrix} \omega \\ \dot{c} \end{bmatrix} \quad (2)$$

که در آن ω مقدار سرعت زاویه ای صفحه متحرک و \dot{c} بردار سرعت نقطه کاری C است.

اکنون ماتریس های ژاکوبی برای روبات ST بدست آورده می شود. برای روبات نشان داده شده در شکل (۵)، برای هر شاخه، سرعت نقطه C را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\dot{c} = \dot{v}_{A_i} + (\dot{v}_{R_i} - \dot{v}_{A_i}) + (\dot{c} - \dot{v}_{R_i}) \quad (3)$$

که در آن \dot{v}_{R_i} و \dot{v}_{A_i} به ترتیب سرعت های نقاط A_i و R_i می باشند. همچنین می توان نوشت:

$$\dot{v}_{A_i} = \dot{\theta}_i \bar{a}_i \quad (4)$$

که در آن \bar{a}_i بردار واحد از P_i تا A_i و $\dot{\theta}_i$ نرخ تغییرات i امین مفصل است. همچنین داریم:

$$\dot{v}_{R_i} - \dot{v}_{A_i} = \omega E \bar{r}_i \quad (5)$$

که در آن \bar{r}_i برداری است که نقطه A_i را به R_i متصل می کند و چون برابر با صفر فرض شده است، داریم:

$$\dot{v}_{R_i} - \dot{v}_{A_i} = \dot{0} \quad (6)$$

و در نهایت می توان نوشت:

$$\dot{c} - \dot{v}_{R_i} = \dot{p}_i \bar{s}_i - \rho_i \omega E \bar{s}_i \quad (7)$$

که در آن ρ_i نشان دهنده فاصله نقاط R_i و C ، و \bar{s}_i بردار واحدی است که جهت مفصل سوم را نشان

آورده می شود و سپس با استفاده از آن دقت سینماتیکی روبات در فضای کاری ایش بدست می آید. نشان داده خواهد شد که این روبات از دقت سینماتیکی خوبی برای کاربردهای ماشین ابزاری برخوردار است.

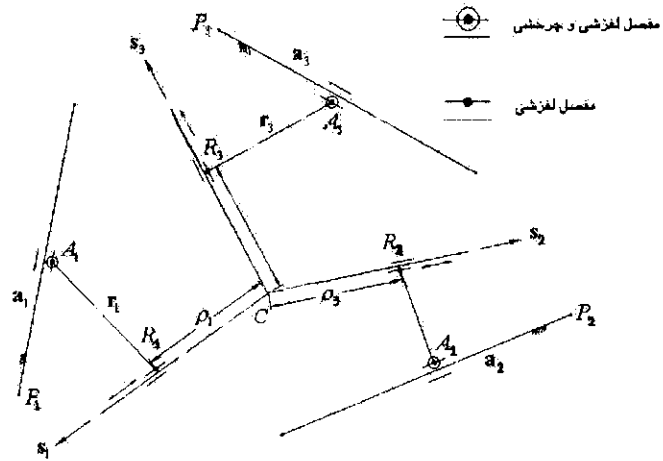
معرفی روبات ستاره - مثلث (ST)

اولین بار دانیالی و همکاران روبات مثلث دو گانه (DT) را که از دو مثلث ثابت و متحرک تشکیل شده بود، معرفی کردند [1]. سپس هانت و همکاران با تغییر مثلث متحرک روبات DT به یک ستاره، روبات ST را پیشنهاد دادند [7]. حالت کلی مکانیزم این روبات که شامل یک صفحه ثابت (مثلث) و یک صفحه متحرک (ستاره) است در شکل (۵) نشان داده شده است. این دو صفحه با سه شاخه (Leg) که هر کدام از آنها به صورت PRP است، به یکدیگر متصل شده اند. P و R به ترتیب، بیانگر مفصل های لغزشی و لولایی هستند.

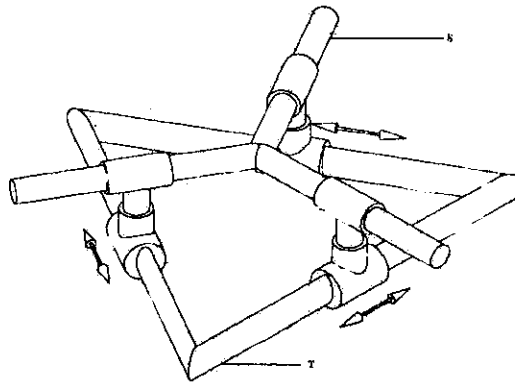
مشخصات هندسی این روبات در شکل (۵) نشان داده شده است. p_i نشان دهنده i امین موتور و C و R_i به ترتیب، نشان دهنده نقطه کاری و مفاصل چرخشی، و A_i و P_i مفاصل لغزشی این روبات می باشند. محور چرخش مفاصل چرخشی عمود بر صفحه حرکت و محور لغزش مفاصل لغزشی در صفحه حرکت است. بعلاوه محور لغزش محرک ها به وسیله بردار واحدی که هم جهت با برداری از P_i به A_i باشد، مشخص می شود.

اگر در حالت خاص طول مجازی همه شاخه ها صفر باشد ($\bar{r}_i = \dot{0}$)، که باعث افزایش سفتی روبات در کاربردهای ماشین ابزاری می شود، این مکانیزم به عنوان روبات ST شناخته می شود (شکل ۶).

در این روبات، صفحه مینا (مثلث) ثابت است و صفحه متحرک (ستاره) نسبت به آن حرکت می کند. افزون بر این، حرکت ستاره با حرکت مفاصل لغزشی در



شکل ۵ حالت کلی مکانیزم رویات



شکل ۶ طرح ایزوتروپی رویات ST

ریشه دوم مقادیر ویژه نامنفی ماتریس AA^T تعریف کرد. چون AA^T مربعی و متقارن و درایه‌های آن حقیقی است، مقادیر ویژه آن حقیقی و نامنفی خواهند بود. بنابراین برای چنین ماتریس‌هایی همواره m مقدار ویژه حقیقی نامنفی وجود دارد. اگر ماتریس تحت بررسی از نظر ابعادی همگن باشد، می‌توان مقادیر منفرد ماتریس را از کوچک به بزرگ مرتب کرد. در صورتی که ماتریس تحت بررسی از نظر ابعادی همگن نباشد، مانند روبات‌های صفحه‌ای که موقعیت و جهت مجری نهایی را شامل می‌شوند یا روبات‌هایی که تعدادی از مفاصل آنها لغزشی و تعدادی دیگر چرخشی هستند، می‌توان این ماتریس را به وسیله مفهومی به نام طول مشخصه (characteristic length)، که اولین بار به وسیله تاندریسی و همکاران [8] در سال ۱۹۹۲ معرفی شد، بازتعریف کرد.

اگر σ_1 و σ_m به ترتیب مشخص کننده کوچکترین و بزرگترین مقدار منفرد یک ماتریس باشند، عدد شرط را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد:

$$\kappa = \frac{\sigma_m}{\sigma_1} \quad (11)$$

پراکندگی زیاد مقادیر منفرد، باعث به وجود آمدن عدد شرط بزرگ می‌شود. اهمیت عدد شرط یک ماتریس به وارون (inversion) آن در هنگام حل یک دستگاه معادلات خطی وابسته به آن ماتریس، مربوط می‌شود. واضح است در حالتی که ماتریس غیر مربعی باشد، این وارون به صورت یک وارون تعمیم یافته (generalized inversion) شناخته می‌شود.

هنگامی که وارون یک ماتریس به صورت عددی محاسبه می‌شود، همواره خطای گرد کردن (roundoff error) وجود دارد و بنابراین بسط این خطای گرد کردن برای بدست آوردن جواب‌ها، بر دقت نتایج محاسبه شده تأثیر می‌گذارد. بسط این خطای گرد کردن، کراندار به عدد شرط ماتریس است. از معادله ۱۱ باسانی می‌توان

می‌دهد. همچنین $E_{4 \times 2}$ ماتریس متعامدی است که هر بردار در صفحه را به اندازه 90° در جهت خلاف چرخش عقربه‌های ساعت دوران می‌دهد و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$E = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

با جایگذاری روابط δ ، ϵ و γ در معادله ۳ داریم:

$$\theta_i \bar{a}_i + \rho_i \bar{s}_i - \omega \rho_i E \bar{s}_i - \bar{c} = \bar{0} \quad (9)$$

با پیش ضرب طرفین رابطه فوق در $\rho_i \bar{s}_i^T E$ حذف می‌شود و رابطه ۸ را می‌توان با ساده‌سازی به صورت زیر باز نویسی نمود:

$$\theta_i \bar{s}_i^T E \bar{a}_i - \omega \rho_i \bar{s}_i^T \bar{s}_i - \bar{s}_i^T E \bar{c} = \bar{0} \quad (10)$$

با باز نویسی این معادله برای $i=1,2,3$ می‌توان نوشت:

$$J = \begin{bmatrix} \bar{s}_1^T E \bar{a}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{s}_2^T E \bar{a}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{s}_3^T E \bar{a}_3 \end{bmatrix} \quad (10\text{-الف})$$

و

$$K = \begin{bmatrix} \rho_1 & -\bar{s}_1^T E \\ \rho_2 & -\bar{s}_2^T E \\ \rho_3 & -\bar{s}_3^T E \end{bmatrix} \quad (10\text{-ب})$$

طراحی ایزوتروپی

دقت سینماتیکی روبات وابسته به عدد شرط ماتریس ژاکوبی است. این موضوع در روبات‌های موازی به عدد شرط هر دو ماتریس ژاکوبی J و K وابسته است. عدد شرط که یک مفهوم متداول برای همه ماتریس‌های مربعی و غیر مربعی است، بر مقادیر منفرد این ماتریس‌ها بنا شده است. برای یک ماتریس $A_{m \times n}$ ، که در آن $m < n$ است، می‌توان m مقدار منفرد نامنفی به صورت

J و K در معادلات ۱۰-الف و ۱۰-ب داده شده و $1_{3 \times 3}$ ماتریس همانی است.

برای همگن کردن درایه‌های ماتریس K، ستون اول آن را بر طول L که طول مشخصه رویات است، تقسیم می‌کنیم. بنابراین ماتریس K به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$K = \begin{bmatrix} \rho_1/L & -\bar{s}_1^T E \\ \rho_2/L & -\bar{s}_2^T E \\ \rho_3/L & -\bar{s}_3^T E \end{bmatrix} \quad (13)$$

با جایگذاری مقادیر J و K از معادلات ۱۰-الف و ۱۳ در معادلات ۱۲-الف و ۱۲-ب می‌توان نوشت:

$$\begin{bmatrix} (\bar{s}_1^T E \bar{a}_1)^2 & 0 & 0 \\ 0 & (\bar{s}_2^T E \bar{a}_2)^2 & 0 \\ 0 & 0 & (\bar{s}_3^T E \bar{a}_3)^2 \end{bmatrix} = \sigma^2 1_{3 \times 3} \quad (14-الف)$$

و

$$\begin{bmatrix} \rho_1^2/L^2 + 1 & \rho_1 \rho_2/L^2 + \bar{s}_1^T \bar{s}_2 & \rho_1 \rho_3/L^2 + \bar{s}_1^T \bar{s}_3 \\ \rho_1 \rho_2/L^2 + \bar{s}_1^T \bar{s}_2 & \rho_2^2/L^2 + 1 & \rho_2 \rho_3/L^2 + \bar{s}_2^T \bar{s}_3 \\ \rho_1 \rho_3/L^2 + \bar{s}_1^T \bar{s}_3 & \rho_2 \rho_3/L^2 + \bar{s}_2^T \bar{s}_3 & \rho_3^2/L^2 + 1 \end{bmatrix} = \tau^2 1_{3 \times 3} \quad (14-ب)$$

با استفاده از معادلات فوق شرایط طرح‌های ایزوتروپی را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$(\bar{s}_1^T E \bar{a}_1)^2 = (\bar{s}_2^T E \bar{a}_2)^2 = (\bar{s}_3^T E \bar{a}_3)^2 = \sigma^2 \quad (15-الف)$$

$$\rho_1^2/L^2 + 1 = \rho_2^2/L^2 + 1 = \rho_3^2/L^2 + 1 = \tau^2 \quad (15-ب)$$

$$\rho_1 \rho_2/L^2 + \bar{s}_1^T \bar{s}_2 = \rho_1 \rho_3/L^2 + \bar{s}_1^T \bar{s}_3 = \rho_2 \rho_3/L^2 + \bar{s}_2^T \bar{s}_3 = 0 \quad (15-ج)$$

و در نتیجه:

$$L^2 = -\rho_1 \rho_2 / \bar{s}_1^T \bar{s}_2 = -\rho_1 \rho_3 / \bar{s}_1^T \bar{s}_3 = -\rho_2 \rho_3 / \bar{s}_2^T \bar{s}_3 \quad (16)$$

با در نظر گرفتن شرایط فوق و هندسه مسأله، طرح‌های ایزوتروپی فقط در صورتی امکان‌پذیر است که مثلث ثابت، متساوی الاضلاع بوده و شاخه‌های

دریافت که یک ماتریس منفرد، حداقل دارای یک مقدار منفرد صفر است و بنابراین عدد شرط آن بینهایت است. اگر مقادیر منفرد یک ماتریس برابر باشند، آنگاه عدد شرط این ماتریس برابر با مقدار حداقل واحد خواهد بود. ماتریس‌های دارای این خاصیت را ماتریس ایزوتروپ می‌نامند. دلیل اینکه ماتریس‌های ایزوتروپ مطلوب هستند این است که وارون کردن آنها هیچ هزینه‌ای ندارد. از بحث فوق و با توجه به اینکه ماتریس‌های ژاکوبی به ترکیب بندی رویات وابسته‌اند، واضح است که عدد شرط ماتریس‌های ژاکوبی یک رویات نیز به ترکیب بندی آن وابسته است. از این‌رو، سازه یک رویات را می‌توان به گونه‌ای طراحی کرد که مشتمل بر موقعیت‌هایی باشد که ماتریس ژاکوبی ایزوتروپ می‌شود. چنین طرحی را ایزوتروپ می‌نامند. بنابراین این خاصیت موقعیت‌های دیگر مجری نهایی را نشان نمی‌دهد.

برای رویات‌هایی با طرح‌های ایزوتروپ، چنین ناحیه‌هایی درصد قابل توجهی از فضای کاری رویات را پوشش می‌دهند. عدد شرط فقط برای موقعیت‌هایی که خیلی نزدیک به حالت‌های تکین هستند و باید در مسیر حرکت مجری نهایی از آن موقعیت‌ها اجتناب کرد، بسیار بزرگ می‌شود.

طراحی ایزوتروپی رویات ST

در این بخش طرح ایزوتروپی رویات ST بدست آورده می‌شود. در رویات‌های موازی زمانی یک طرح ایزوتروپ خوانده می‌شود که هر دو ماتریس J و K ایزوتروپ باشند. به عبارت دیگر اگر دو عدد مثبت σ و τ وجود داشته باشند به صورتی که:

$$JJ^T = \sigma^2 1_{3 \times 3} \quad (12-الف)$$

$$KK^T = \tau^2 1_{3 \times 3} \quad (12-ب)$$

ستاره متحرک Q است. به عبارت دیگر طول مشخصه به مانند یک ضریب وزنی برای تعیین مقدار اهمیت زاویه چرخش عمل می کند. در شکل (۸) مقدار طول مشخصه برحسب زوایای مختلف چرخش ستاره متحرک (درجه) تصویر شده است.

شاخص شرط سینماتیکی (KCI) برای طرح

ایزوتروپ روبات ST

در این بخش به بررسی دقت سینماتیکی طرح ایزوتروپ روبات ST که در بخش قبل بدست آمد، پرداخته می شود. برای این منظور لازم است به جای استفاده از لایتیورها (Invariant form) از مؤلفه های آنها استفاده کنیم. به همین دلیل به مشخص کردن ماتریس ژاکوبی این روبات برحسب پارامترهای مشخص کننده موقعیت و جهت مجری نهایی، (x, y, φ) ، احتیاج پیدا می شود.

در مکانیزم های صفحه ای ارتباط بین مختصات محرکها، که با بردار سه بعدی $\vec{\theta}$ نشان داده می شود و مختصات کارتیزین مجری نهایی که با بردار سه بعدی \vec{x} نشان داده می شود، می تواند به صورت ضمنی زیر نوشته شود:

$$\vec{\theta} - \vec{f}(\vec{x}) = \vec{0} \quad (23)$$

که در آن \vec{f} تابعی سه بعدی از $\vec{\theta}$ و \vec{x} ، و $\vec{0}$ بردار سه بعدی صفر است. ارتباط بین سرعت محرکها و سرعت نقطه کاری را معمولاً می توان به صورت زیر نوشت:

$$\dot{\vec{\theta}} = J' \dot{\vec{x}} \quad (24)$$

که در آن $J' = -KJ^{-1}$ ماتریس ژاکوبی است. همچنین $\dot{\vec{x}}$ آرایه چرخشی سه بعدی یا بردار سرعت کارتیزین مجری نهایی، و $\dot{\vec{\theta}}$ بردار سه بعدی سرعت مفاصل هستند که به صورت زیر تعریف می شوند:

$$J' \equiv \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{x}} \quad (25\text{-الف})$$

ستاره متحرک نیز دو به دو با یکدیگر زاویه 120° بسازند. بنابراین برای این روبات، یک پارامتر پیوسته برای طرح های ایزوتروپی می توان در نظر گرفت. این پارامتر پیوسته به صورت زیر است:

$$l_f \in (0, \infty) \quad (17)$$

که در آن l_f اندازه ضلع مثلث متساوی الاضلاع مبنا است. طرح ایزوتروپی روبات در شکل (۶) نشان داده شده است. روبات موقعی در حالت ایزوتروپی قرار می گیرد که نقطه کاری C بر مرکز سطح مثلث مبنا منطبق شود. در حالت ایزوتروپی رابطه زیر برقرار خواهد بود:

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \rho \quad (18)$$

با استفاده از معادله فوق و جایگذاری آن در معادله ۱۶ طول مشخصه روبات، L ، برای روبات ST به صورت زیر نوشته می شود:

$$L^2 = -\rho^2 / \vec{s}_1^T \vec{s}_2 = -\rho^2 / \vec{s}_1^T \vec{s}_3 = -\rho^2 / \vec{s}_2^T \vec{s}_3 \quad (19)$$

از طرفی چون در طرح ایزوتروپ بدست آمده، رابطه $\vec{s}_1^T \vec{s}_2 = \vec{s}_1^T \vec{s}_3 = \vec{s}_2^T \vec{s}_3 = \cos(2\pi/3)$ برقرار است، معادله فوق به صورت زیر باز نویسی می شود:

$$L^2 = 2\rho^2 \quad (20)$$

از طرفی با توجه به شکل (۷) می توان مقدار ρ را برحسب زاویه چرخش ستاره متحرک Q، φ ، برای طرح ایزوتروپ به صورت زیر نوشت:

$$\rho = \frac{\sqrt{3} l_f}{6 \sin(\frac{\pi}{3} - \varphi)} \quad \text{برای } -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{6} \quad (21)$$

با جایگذاری این عبارت در معادله ۲۰، طول مشخصه روبات به صورت زیر نوشته می شود:

$$L = \frac{\sqrt{6} l_f}{6 \sin(\frac{\pi}{3} - \varphi)} \quad (22)$$

این رابطه نشان می دهد که برای طرح ایزوتروپ یک روبات ST با طول مثلث متساوی الاضلاع مبنا ثابت، طول مشخصه روبات تابعی از زاویه چرخش

$$J' = \begin{bmatrix} \frac{\partial q_1}{\partial \varphi} & \frac{\partial q_1}{\partial x} & \frac{\partial q_1}{\partial y} \\ \frac{\partial q_2}{\partial \varphi} & \frac{\partial q_2}{\partial x} & \frac{\partial q_2}{\partial y} \\ \frac{\partial q_3}{\partial \varphi} & \frac{\partial q_3}{\partial x} & \frac{\partial q_3}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (29)$$

$$\frac{\partial q_i}{\partial \varphi_i} = \frac{(y-b)\cos(\alpha_i) - (x-a)\sin(\alpha_i)}{\sin^2(\alpha_i - \varphi_i)} \quad (30)$$

$$\frac{\partial q_i}{\partial x} = -\frac{\sin \varphi_i}{\sin(\alpha_i - \varphi_i)} \quad (31)$$

$$\frac{\partial q_i}{\partial y} = \frac{\cos \varphi_i}{\sin(\alpha_i - \varphi_i)} \quad (32)$$

بنابراین با استفاده از معادلات فوق و معادلات ۲۷

می‌توان ماتریس ژاکوبی J' را بدست آورد. اما ستون‌های ماتریس بدست آمده از لحاظ ابعادی همگن نیستند، بنابراین لازم است ستون اول ماتریس را بر اندازه طول مشخصه تقسیم کرد تا همه درایه‌های ماتریس J' از لحاظ ابعادی یکسان شوند. برای این منظور ستون اول ماتریس فوق را بر مقدار طول مشخصه، $L = \sqrt{6} / (\sqrt{6} \sin(\frac{\pi}{3} - \varphi))$ تقسیم می‌کنیم. بنابراین درایه‌های ماتریس ژاکوبی رابطه ۲۹ به صورت زیر بازنویسی می‌شوند:

$$J'_{11} = \frac{\sqrt{6}(y \sin(\pi/6) - x \cos(\pi/6))}{\cos(\pi/6 + \varphi)} \quad (34)$$

$$J'_{12} = -\frac{\sin \varphi}{\cos(\pi/6 + \varphi)} \quad (35)$$

$$J'_{13} = \frac{\cos \varphi}{\cos(\pi/6 + \varphi)} \quad (36)$$

$$J'_{21} = \frac{-\sqrt{6}y}{\cos(\pi/6 + \varphi)} \quad (37)$$

$$J'_{22} = -1 \quad (38)$$

$$\vec{\dot{x}} = \begin{bmatrix} \dot{\omega} \\ \dot{c} \end{bmatrix} \quad (25\text{-ب})$$

که در آن، به ترتیب، ω سرعت زاویه ای اسکالر و \dot{c} سرعت نقطه کاری مجری نهایی هستند.

اکنون روبات ستاره - مثلث (ST) را که طرح ایزوتروپی آن در بخش قبل بدست آمد، در نظر بگیرید. بدون نقصان کلیت مسأله فرض کنید که اضلاع مثلث منبنا برابر با واحد باشد. برای این روبات با توجه به شکل (۷)، ارتباط بین مختصات مفاصل، $\theta = [q_1 \ q_2 \ q_3]^T$ و مختصات کارترین مجری نهایی، $\vec{x} = [x \ y]^T$ به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$q_i = \frac{(y-b_i)\cos \varphi_i - (x-a_i)\sin \varphi_i}{\sin(\alpha_i - \varphi_i)} \quad (26)$$

که در آن مقادیر a_i, b_i, α_i و φ_i به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\{a_i\}_1^3 = \{0, 1, 1/2\} \quad (27\text{-الف})$$

$$\{b_i\}_1^3 = \{0, 0, \sqrt{3}/2\} \quad (27\text{-ب})$$

$$\{\alpha_i\}_1^3 = \{\pi/3, \pi, 5\pi/3\} \quad (27\text{-ج})$$

و

$$\varphi_1 = \varphi$$

$$\varphi_2 = \varphi + 2\pi/3 \quad (27\text{-د})$$

$$\varphi_3 = \varphi + 4\pi/3$$

بنابراین با توجه به معادلات ۲۴ تا ۲۶ می‌توان

نوشت:

$$[\dot{q}_1 \ \dot{q}_2 \ \dot{q}_3]^T = J'_{3 \times 3} [\dot{\varphi} \ \dot{x} \ \dot{y}]^T \quad (28)$$

که در آن $J'_{3 \times 3}$ به صورت زیر نوشته می‌شود:

برای بدست آوردن شاخص شرط سینماتیکی (KCI) روبات ST، با استفاده از نرم افزار MAPLE V عدد شرط ماتریس ژاکوبی (معادلات ۳۴ الی ۴۲) مطابق با روش ارائه شده در معادلات ۴۴ الی ۴۶، به صورت زیر بدست آمد:

$$\kappa = \frac{5}{3} + 2y^2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}y + 2x^2 - 2x \quad (47)$$

رابطه فوق عدم وابستگی عدد شرط ماتریس ژاکوبی به زاویه چرخش ستاره متحرک (S) را نشان می دهد. بنابراین می توان این نتیجه را گرفت که دقت سینماتیکی این روبات مستقل از جهت ستاره متحرک است. این موضوع می تواند راهنمای استفاده از جهت هایی از ستاره متحرک که توانایی دسترسی به همه سطح مثلث را فراهم می کند [۹]، باشد. در شکل (۹) شاخص شرط سینماتیکی، $(\frac{1}{\kappa})$ ، این روبات برای همه نقاط روی سطح مثلث مبنا به صورت رویه ای نشان داده شده است. همانطور که در این شکل ملاحظه می شود، هر چه نقطه کاری روبات از اضلاع مثلث مبنا دورتر و در نتیجه به مرکز سطح مثلث مبنا نزدیکتر می شود، شاخص شرط سینماتیکی ماتریس ژاکوبی افزایش می یابد.

از طرفی معادله ۴۷ را می توان به صورت زیر نوشت:

$$(x - \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{\sqrt{3}}{6})^2 = \left(\frac{\sqrt{2(\kappa - 1)}}{2} \right)^2 \quad (48)$$

رابطه فوق معادله دایره ای به مرکزیت مرکز سطح مثلث مبنا، $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6})$ ، را نشان می دهد. شعاع این دایره به عدد شرط ماتریس ژاکوبی روبات وابسته است و مقدار آن با افزایش عدد شرط افزایش می یابد. در صورتی که مقدار عدد شرط برابر با واحد شود، بآسانی از این معادله می توان دریافت که شعاع این دایره برابر با صفر می شود. این موضوع با آنچه در بخش های قبل درباره طرح ایزوتروپی روبات ST بیان شد، همخوانی

$$J'_{23} = -\frac{\sin(\pi/6 + \varphi)}{\cos(\pi/6 + \varphi)} \quad (39)$$

$$J'_{31} = \frac{\sqrt{6}((x - 1/2)\cos(\pi/6) + (y - \sqrt{3}/2)\sin(\pi/6))}{\cos(\pi/6 + \varphi)} \quad (40)$$

$$J'_{32} = \frac{\sin(\pi/3 + \varphi)}{\cos(\pi/6 + \varphi)} \quad (41)$$

$$J'_{33} = -\frac{\cos(\pi/3 + \varphi)}{\cos(\pi/6 + \varphi)} \quad (42)$$

اکنون برای بدست آوردن دقت سینماتیکی روبات ST در فضای کاری اش از عدد شرط ماتریس ژاکوبی و پارامتری به نام شاخص شرط سینماتیکی که به صورت زیر تعریف می شود، استفاده می گردد:

$$\nu = \frac{1}{\kappa} \quad (43)$$

که در آن ν شاخص شرط سینماتیکی و κ عدد شرط ماتریس ژاکوبی است که در معادله ۱۱ تعریف شده است. از این رابطه واضح است که بهترین دقت سینماتیکی روبات هنگامی اتفاق می افتد که مقدار شاخص چالاکتی محلی برابر با واحد شود. از طرفی عدد شرط به صورت زیر نیز تعریف شده است:

$$\kappa = \| J' \| \cdot \| J'^{-1} \| \quad (44)$$

که در آن $\| \cdot \|$ نشان دهنده نرم (norm) ماتریس مورد نظر است. این نرم اقلیدسی به صورت زیر تعریف شده است:

$$\| J' \| = \sqrt{\text{tr}(J'WJ'^T)} \quad (45)$$

که در آن ماتریس W به صورت زیر تعریف می شود:

$$W = \left(\frac{1}{n} \right) I_{n \times n} \quad (46)$$

در رابطه اخیر n نشان دهنده بعد ماتریس مربعی J'، و 1 ماتریس همانی متناظر با آن است.

نسبت به سایر روبات‌های مورد اشاره برخوردار است.

جدول ۱ مقایسه مقدار شاخص شرط همه جایی برای چندین روبات موازی مختلف

روبات صفحه‌ای ST	روبات صفحه‌ای ۳-RRR	روبات صفحه ای ۳-RPR	روبات کروی ۳-RRR	روبات فضای ۳-RPS
۰/۸۶۶	۰/۷۹۱	۰/۴۹۸	۰/۵۲	۰/۵۷۸

نتیجه‌گیری

با استفاده از روش برداری، تحلیل سرعت و طراحی ایزوتروپی روبات ST انجام گرفت و بینهایت حل ایزوتروپی بدست آمد. با استفاده از طرح ایزوتروپی، طول مشخصه روبات برحسب زاویه چرخش ستاره متحرک (S) بدست آمد و سپس با استفاده از آن دقت سینماتیکی روبات تعیین گردید نشان داده شد که این دقت مستقل از جهت مجری نهایی (ستاره) است. همچنین مشخص گردید شاخص شرط همه جایی که بیانگر دقت در سراسر فضای کاری روبات می‌باشد، در مقایسه با سایر روبات‌های مورد استفاده، مطلوبتر است و از این رو روبات پیشنهادی از دقت خوبی برای کاربردهای ماشین ابزاری برخوردار است. این ویژگی به همراه سفتی بالا، فضای کاری مناسب و عدم وجود نقاط منفرد در فضای کاری از ویژگی‌های برجسته‌ای است که استفاده از این روبات را در ماشین‌های ابزار نسبت به روبات‌های پیشین مناسبتر می‌سازد.

دارد. در شکل (۱۰) نیز مسیرهای با دقت سینماتیکی یکسان نشان داده شده است.

برای بدست آوردن میانگین رفتار عدد شرط ماتریس ژاکوبی روبات در فضای کاری، شاخص شرط همه

جایی (GCI) به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\eta = \frac{A}{B} \quad (۴۹)$$

$$A = \int_w \left(\frac{1}{K}\right) dw = \int_w v dw \quad (۵۰)$$

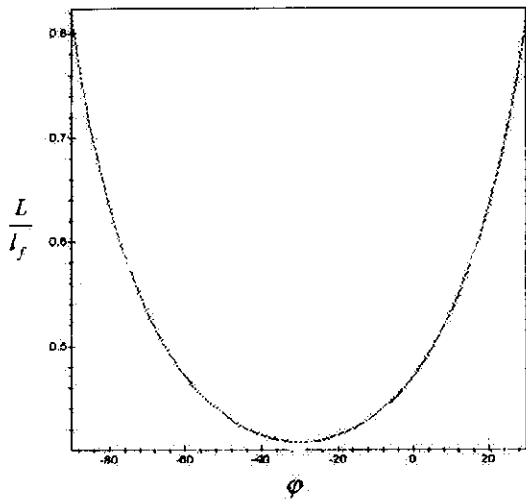
$$B = \int_w dw \quad (۵۱)$$

که در آن K عدد شرط در نقطه خاصی از فضای کاری روبات، w ، است. با استفاده از روابط فوق شاخص شرط همه جایی در همه سطح مثلث مبنا محاسبه شد که مقدار آن در زیر آورده می‌شود:

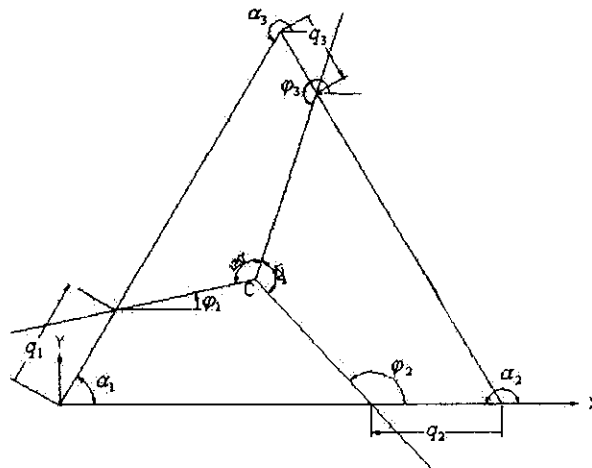
$$\eta = 0.8667526732 \quad (۵۲)$$

این مقدار کاملاً مقدار مطلوبی می‌باشد.

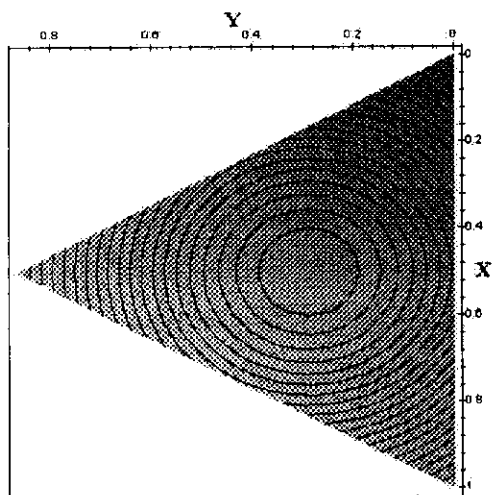
برای تأیید این ادعا، مقدار شاخص شرط همه جایی، η ، برای چندین روبات مختلف جهت مقایسه در جدول (۱) آورده شده است. این مقادیر توسط گسلین [10] برای طرح بهینه روبات موازی صفحه ای ۳-RRR، روبات موازی صفحه ای ۳-RPR، روبات موازی کروی ۳-RRR و روبات فضایی سه درجه آزادی ۳-RPS محاسبه شده است. همانطور که در این جدول مشاهده می‌شود، روبات صفحه‌ای ST از دقت سینماتیکی بهتری



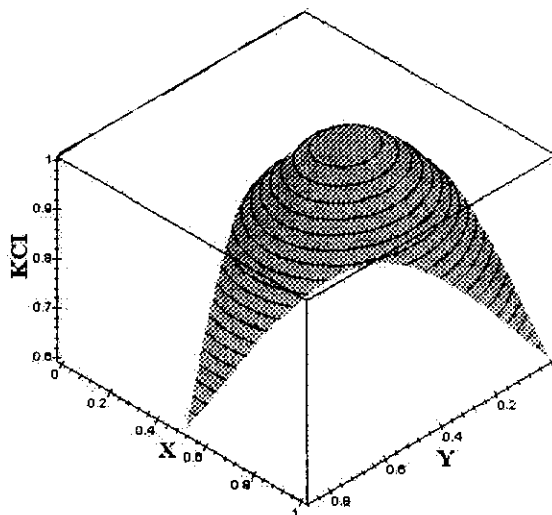
شکل ۸ نمودار طول مشخصه روبات برحسب زاویه چرخش ستاره (درجه)



شکل ۷ نقطه کاری و زاویه چرخش روبات ST



شکل ۱۰ مسیرهای حرکت نقطه کاری روبات با شاخص شرط سینماتیکی (KCI) ثابت



شکل ۹ نمودار شاخص شرط سینماتیکی (KCI) در سطح مثلث مبنا برای روبات ST

مراجع

1. Mohammadi Daniali H.R., Zsombor-Murray P. J., Angeles J., "Singularity Analysis of Planar Parallel Manipulators, *Mech. Mach*", Theory vol. 30, No. 5, pp. 665-678,(1995).
2. Conti, J. P., Clinton, C. M., Zhang, G., Wavering, A. J., "Dynamic Variation of the Workspace of an Octahedral Hexapode Machine During Machining", Technical Research Report, TR 97-28, ISR, University of Maryland, Maryland ,(1997).
3. Honegger M., Codourey A., Burdet E., "Adaptive control of the hexaglide, a 6 dof parallel manipulator", *Proc. Int. Conf. On Robotics and Automation ICRA,97, Albuquerque NM, USA, April* (1997).
4. Honegger M., Brega R., Schweitzer G., "Adaptive control of a nonlinear adaptive controller to a 6 dof parallel manipulator", *Proc. Int. Conf. On Robotics and Automation , San Francisco, April* (2000).
5. Bonev A., Ryu J., "Workspace analysis of 6-PRRS parallel manipulators based on the vertex space concept", *Proc. ASME Design Eng. Tech. Conf. September 12-15,(1999)*.
6. Pierrot F., Shibukawa T., "From hexa to hexaM". *In Proc. IPK 98: Internationales Parallelkinematik-kolloquium, Zurich*, pp.75.84, june (1998).
7. Hunt K.H., Tischler C.R., Samuel A.E., "A Spatial of Extention of Cardanic Movement: Some Derived Mechanisms", The University of Melbourne, June 6, (1996).
8. Tandirci, M., Angeles, J. and Ranjbaran, F., "The characteristic point and the characteristic length of robotic manipulators", *ASME Binnial Mechanisms Conference*, Vol. 45, pp. 203-208, (1992).
9. انفرادی، ج.، محمدی دانیالی، ح. ر. و شاکری، م.، " طراحی ایزوتروپی بازوی مکانیکی روبات صفحه‌ای با کاربردهای ماشین ابزار"، ارائه شده به ششمین کنفرانس بین المللی مهندسی مکانیک، (۱۳۸۰).
10. Gosselin, C., *Kinematic Analysis, Optimization and Programming of Parallel Robotic Manipulators*, Doctoral Dissertation, McGill University, Montreal, Quebec, (1988)