

ارتعاشات غیر خطی صفحات حلقوی مرکب تحت بار حلقوی*

حمید دهقان طرزجانی^(۱)محمد حسن نائی^(۲)

چکیده کاربرد روز افزون مواد مرکب، بویژه صفحات مرکب لایه‌ای، در صنایع مختلف باعث شده است که مسئله ارتعاشات آزاد و اجباری این صفحات مورد توجه پژوهشگران زیادی قرار گیرد. افزون بر این، از آنجا که در عمل با تغییر مکانهای نسبتاً بزرگ این صفحات روبرو هستیم، بررسی ارتعاشات غیرخطی آنها از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. در این مقاله ارتعاشات آزاد و اجباری غیر خطی یک صفحه مرکب لایه‌ای حلقوی تحت دو نوع شرایط مرزی مختلف (تکیه‌گاههای ساده و گیردار) مورد بررسی واقع شده است. در بررسی ارتعاشات اجباری صفحه، بارگذاری به صورت حلقوی و متمرکز در طول محیط یک دایره در نظر گرفته می‌شود. در این مقاله ابتدا با استفاده از تئوری تغییر مکان بزرگ و روابط کرنش تغییر مکان غیرخطی، نیروهای غشائی و برشی و ممانهای خمشی و پیچشی در دستگاه مختصات استوانه‌ای به صورت بی بعد بدست آمده و آنگاه با فرض تقارن محوری ساده گردیده‌اند. سپس به کمک معادلات تعادل، معادلات دیفرانسیل حاکم بر حرکت تعیین شده‌اند. روش اجزاء محدود برای تحلیل مسئله و بدست آوردن ماتریسهای سختی و جرمی و معادلات اولر - لاگرانژ برای دستیابی به معادلات ماتریسی حرکت بکار گرفته شده‌اند. پاسخهای غیرخطی مسئله، با استفاده از حدس اولیه که از حالت ارتعاشات آزاد و اجباری برای شرایط مرزی مختلف صفحه مرکب تک لایه اورتوتروپیک استوانه‌ای بدست آمده محاسبه شده است. همچنین اثر نسبت شعاع داخلی به شعاع خارجی حلقه و نسبت ضریب الاستیسته شعاعی به مماسی آن بر روی فرکانسهای طیفی و شکل مودها بررسی شده است. نتایج بدست آمده از این رهیافت با روش کانتروویچ مطابقت دارد.

واژه‌های کلیدی صفحات حلقوی، مرکب لایه‌ای، روش اجزاء محدود، ارتعاشات غیرخطی.

Non - linear Vibration Analysis of Laminated Composite Annular Plates Under Ring Loads Using Finite Element Method

M. H. Naei

H. Dehghan Tarzjani

Abstract Free and forced non - linear vibrations of laminated composite annular Plates are studied under ring loads in various conditions. Non - linear strains, Membrane and shear forces, and, bending and shear moments are established on cylindrical coordinates, then axisymmetry assumption is yielded to eliminating of all angle differential equations are derived in a similar form of Von Karman equations. Finite element method is applied in analyzing and constitution of mass and stiffness matrices; and Also the dynamic equations are obtained as a matrix identity through the substitution of potential and kinetic energy terms in Euler - Lagrange equation. Non- linear vibration responses are computed by an iteration scheme and an initial displacement vector which resulted from linear solution. Finally mode shapes, non linear natural frequencies are plotted for a variety of boundary conditions, inner- outer radial ration, and tangential - radial of elasticity modulus The results of the free non- linear vibration analysis closely related to solutions obtained by Ritz - Kantorovich method .

Key Words Annular Plates, Laminated Composite Plates, Finite Element Method, Non- Linear Vibrations

* نسخه اولیه مقاله در تاریخ ۸۰/۷/۲۲ و نسخه نهایی آن در تاریخ ۸۱/۹/۱۸ به دفتر نشریه رسیده است.

(۱) استادیار، دانشگاه تهران، دانشکده فنی، گروه مهندسی مکانیک

(۲) دانشجوی دکتری، دانشگاه تهران، دانشکده فنی گروه مهندسی مکانیک

مقدمه

از آنجا که ارتعاشات پیش بینی نشده یک سازه ممکن است باعث خرابی آن شود، آگاهی از طبیعت ارتعاشی آن سازه و نیز شناخت عوامل موثر و میزان تاثیر آنها بر پاسخ سازه از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. مسئله ارتعاشات صفحات که یکی از مهمترین اجزاء سازه‌ای هستند، بسیار مورد توجه پژوهشگران بوده است. افزون بر این، صفحات حلقوی تحت بارگذاری که تغییر مکان‌های نسبتاً بزرگ از خود نشان می‌دهند، رفتار غیر خطی دارند و بررسی ارتعاشات آنها پژوهشهای فراوانی در دهه‌های اخیر را به خود اختصاص داده است. به طوری کلی هنگامی که خیز صفحه کم است رفتار را می‌توان خطی فرض نمود. از فرضیات کرفش استفاده کرد. براساس فرضیات کرفش صفحه میانی در طول بارگذاری تغییر شکل نمی‌دهد، علاوه بر آن از کرنش‌ها و تنش‌های برشی و عمودی در جهت عمود بر صفحه میانی چشم‌پوشی شده و صفحه تحت خمش خالص فرض می‌شود. این تئوری، تئوری کلاسیک صفحات نامیده می‌شود. تئوری‌های دیگری نیز برای بررسی صفحات توسعه یافته‌اند که مهمترین آنها تئوری تغییر شکل برشی و تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالا می‌باشد. در این تئوری‌ها اثر کرنش‌های برشی در تغییر مکان صفحه در نظر گرفته می‌شود.

در بسیاری از صفحات خیز صفحه در حدود ضخامت آن می‌باشد. در این حالت تغییر طول صفحه میانی قابل چشم‌پوشی نیست. در این حالت اثر غشایی با خمش خالص قابل مقایسه شده و میزان تحمل بار بیشتر از آنچه که تئوری کلاسیک صفحات پیش‌بینی می‌کند خواهد بود. در این صورت برای تحلیل رفتار صفحه باید اثر غشایی را نیز در معادلات حرکت صفحه در نظر گرفت. کوپلینگ اثرات خمش با اثرات غشایی باعث می‌شود که معادلات دینامیکی فون کارمن که یک دستگاه معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی غیرخطی است، بدست آیند. از آنجا که معادلات بدست آمده غیرخطی اند برای حل آنها باید به روش‌های عددی متوسل شد. باید توجه داشت که پاسخ دینامیکی چنین

سیستم‌های غیرخطی تابعی از دامنه نوسان آنها خواهد بود. بکارگیری روش‌های مختلف عددی توسط چندین پژوهشگر منجر به یافتن حل‌های تقریبی برای صفحه دایره‌ای شکل با ضخامت ثابت شده است. ناوینسکی [1] ارتعاشات عرضی غیرخطی الاستیک صفحات دایره‌ای شکل و لیزا [2] ارتعاشات صفحات را مورد بررسی قرار داده‌اند. افرادی چون هندلمن و کوهن [3] اثرات افزودن جرم متمرکز به صفحه دایره‌ای شکل با تکیه‌گاه گیردار را در مورد بررسی قرار داده‌اند. آنها مطالعات خود را به ارتعاشات کوچک در ناحیه خطی محدود کردند و با بکارگیری اصل کمترین انرژی پاسخ سیستم را بدست آوردند. لورا و کاتیریز [4] با استفاده از روش ریتز نتایجی برای ارتعاشات خطی صفحه دایره‌ای شکل ارائه کرده‌اند. بررسی پاسخ ارتعاشات آزاد غیرخطی متقارن یک صفحه نازک همگن دایره‌ای با جرم متمرکز به روش متوسط کانتروویچ توسط هیونگ [5] و بررسی همین مسئله با استفاده از روش اجزاء محدود بوسیله هیونگ [6] انجام شده است. هیونگ در مرجع [7] ارتعاشات با دامنه کم صفحات اورتوتروپیک با یک هسته ایزوتروپیک را مورد بررسی قرار داده است. ساندمن [8] ارتعاشات با دامنه کم صفحات دایروی و حلقوی را ارائه کرده است. آدامز [9] چروک خوردن الاستیک یک صفحه دایره‌ای تحت تنش را به کمک تئوری صفحه فون کارمن بررسی نموده است. افزون بر این، در مراجع [11,15] تغییر مکان‌های بزرگ صفحات دایره‌ای با ضخامت متغیر و صفحات حلقوی با استفاده از روش‌های اجزاء مرزی و تفاضلات محدود مورد بررسی واقع شده است. یی [12] ارتعاشات با تقارن محوری صفحات حلقوی لایه‌ای مرکب از لایه‌های ایزوتروپیک عرضی را به کمک الاستیسیته سه بعدی بررسی کرده است. لورا و رمانلی [13] ارتعاشات صفحه حلقوی غیر ایزوتروپیک قطبی با لبه‌های تکیه‌گاهی و آزاد را مورد بررسی قرار دادند. سا و همکارانش [14] تحلیل استاتیکی با خیز زیاد یک صفحه حلقوی تحت پیچش با یک برجستگی صلب در مرکز آن تحت بارگذاری با تقارن محوری ارائه نمودند.

نشود، می‌توان فرض کرد که تغییرات کرنش در طول صفحه خطی است. با وجود این از آنجایی که هر لایه دارای خواص مکانیکی خاص خود می‌باشد، مقدار تنش در مرز بین هر دو لایه متفاوت خواهد بود، هر چند که در طول هر لایه به صورت خطی تغییر می‌کند. با این مقدمه می‌توان کرنش را در هر نقطه از ضخامت صفحه در مختصات قطبی به صورت زیر بیان نمود.

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon^0\} + z\{k\} \quad (1)$$

که در آن $\{\varepsilon^0\} = \{\varepsilon_r^0, \varepsilon_\theta^0, \varepsilon_{r\theta}^0\}$ ، کرنش‌ها و $\{k\} = \{k_r, k_\theta, k_{r\theta}\}$ انحناهای صفحه میانی بوده و z فاصله نقطه مورد نظر از صفحه میانی می‌باشد. رابطه تنش کرنش برای یک لایه اورتوتروپیک استوانه‌ای در حالت تنش صفحه‌ای به شکل زیر نوشته می‌شود.

$$\{\sigma\} = [Q_{ij}]\{\varepsilon\} \quad (2)$$

که در آن $\{\sigma\} = \{\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_{r\theta}\}$ بردار تنش و $[Q]$ ماتریس مقارن سختی است روابط زیر بدست می‌آیند:

$$\begin{aligned} Q_{11} &= E_r / (1 - \nu_{r\theta}\nu_{\theta r}) \\ Q_{22} &= E_\theta / (1 - \nu_{r\theta}\nu_{\theta r}) \\ Q_{12} &= \nu_{r\theta}E_\theta / (1 - \nu_{r\theta}\nu_{\theta r}) \\ Q_{66} &= G_{r\theta}, Q_{16} = Q_{26} = 0 \\ \nu_{r\theta}E_\theta &= \nu_{\theta r}E_r \end{aligned} \quad (3)$$

E_r و E_θ ، به ترتیب، مدول‌های کششی در راستای شعاعی و مماسی و $G_{r\theta}$ ، $\nu_{\theta r}$ ، $\nu_{r\theta}$ ، به ترتیب، مدول برشی ضرائب پواسون در صفحه r و θ می‌باشند با انتگرال‌گیری از تنش‌ها در طول ضخامت برای هر لایه و سپس جمع کردن آنها با یکدیگر می‌توان نیروهای برآیند $\{N\} = \{N_r, N_\theta, N_{r\theta}\}$ و ممان‌های برآیند $\{M\} = \{M_r, M_\theta, M_{r\theta}\}$ را بدست آورد.

$$\begin{aligned} (N_r, N_\theta, N_{r\theta}) &= \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} (\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta})_k dz \\ (M_r, M_\theta, M_{r\theta}) &= \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} (\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta})_k dz \end{aligned} \quad (4)$$

دینگ و زو [15] بر اساس تئوری الاستیسیته سه بعدی معادله فضای حالت برای صفحه حلقوی لایه‌ای ایزوتروپ عرضی را بدست آورده و آن را با روش تبدیل هانکل حل کردند. نتایج با روش اجزاء محدود مقایسه گردیده‌اند. لئی و همکاران [16] یک تحلیل عددی برای ارتعاشات غیر خطی و پس کماتش حرارتی صفحه حلقوی اورتوتروپیک با یک جرم صلب مرکزی برای شرایط مرزی مختلف گیردار و لولا در مرزها عرضه کردند.

هدف این مقاله تحلیل ارتعاشات غیرخطی یک صفحه حلقوی مرکب تحت بار حلقوی می‌باشد. برای حل این مسئله از روش المان‌های محدود استفاده می‌شود. همچنین شرایط مرزی مختلف و میزان تاثیر تغییرات نسبت شعاع خارجی به شعاع داخلی بر رفتار ارتعاشی مدهای اول، دوم و سوم حرکت مورد بررسی قرار گرفته است.

فرضیات

- صفحات عمود بر صفحه میانی قبل از تغییر شکل و بعد از آن عمود باقی می‌مانند. افزون بر این صفحه نازک فرض می‌شود به طوری که حالت تنش مسطح برقرار است.
- شیب ناشی از تغییر شکل ملایم است به طوری که از ترمهای درجه سوم شیب در معادلات چشم پوشی می‌شود. همچنین به لحاظ هندسی، پخش مواد و نوع بارگذاری صفحه مقارن فرض می‌شود.
- صفحه از مواد مرکب لایه‌ای مقارن اورتوتروپیک تشکیل شده است.

روابط تنش - کرنش

یک صفحه لایه‌ای از روی هم چیدن دو یا چند صفحه تک لایه که هر یک دارای خواص متفاوتی از دیگر لایه‌ها می‌باشند، ساخته می‌شود. در صورتی که این لایه‌ها کاملاً به یکدیگر چسبیده باشند و هیچگونه لغزشی در بین آنها هنگام تغییر شکل ایجاد

کرنش - تغییر مکان ساده شده به صورت زیر بیان می‌شوند (شکل ۲).

$$\varepsilon_r = \varepsilon_r^0 + z\kappa_r = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial r} \right)^2 - z \frac{\partial^2 W}{\partial r^2}$$

$$\varepsilon_\theta = \varepsilon_\theta^0 + z\kappa_\theta = \frac{u}{r} - \frac{z}{r} \frac{\partial W}{\partial r}$$

$$\gamma_{r\theta} = \gamma_{r\theta}^0 = z\kappa_{r\theta} = 0 \quad (۷)$$

با استفاده از یک المان قطبی از صفحه حلقوی می‌توان معادلات حاکم بر حرکت صفحه را بدست آورد. ایسم معادلات به معادلات تعادل دینامیکی ون کارمن معروف هستند و در شکل به بعد به صورت زیر در می‌آیند [16,9,6].

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} - \frac{1}{\xi} \left(\frac{A_2}{A_{11}} \right) \frac{\phi}{\xi} + \frac{1}{2\xi} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \xi} \right)^2 = 0$$

$$\xi^3 P = \xi \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi^2 \frac{\partial^3 \zeta}{\partial \xi^3} \right) - \left(\frac{D_{22}}{D_{11}} \right) \xi^2 \left(\frac{1}{\xi} \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} \right) + \xi^3 \left(\frac{D_{22}}{D_{11}} \right) \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \xi^2} \quad (۸)$$

که در آن W و u ، به ترتیب، تغییر مکان‌ها در جهات عرضی شعاعی، a شعاع داخلی و h ضخامت صفحه حلقوی می‌باشند. q شدت بار اعمال شده به صفحه t زمان می‌باشند $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}$ و $D_{11}, D_{12}, D_{21}, D_{22}$ اعضای ماتریسهای سختی هستند. ψ تابع تنش است که ارضای معادلات تعادل بکار رفته است و به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\psi = rN_r, \quad \partial \psi / \partial r = N_\theta \quad (۹)$$

شرایط مرزی

برای اعمال شرایط مرزی بر معادلات (۸) ابتدا U, Q_r, N_r, M_r را برحسب متغیرهای بی بعد محاسبه کرده و سپس شرایط مرزی را اعمال می‌کنیم. شرایط مرزی روی محیط داخلی صفحه حلقوی به صورت زیر است.

که در آن Z_{k-1} و Z_k به ترتیب فاصله سطح بیرونی و فاصله سطوح درونی لایه K ایم از صفحه میانی بوده و n کل تعداد لایه‌هاست (شکل ۱).

با جایگذاری معادله (۱) در (۲) و سپس جایگذاری آن در معادله (۴) و انتگرال گیری از آن روی ضخامت صفحه داریم،

$$\{N\} = [A_{ij}] \{\varepsilon^0\} + [B_{ij}] \{\kappa\}$$

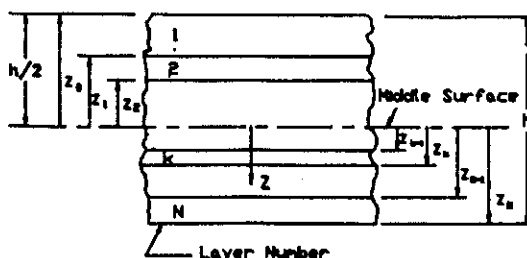
$$\{M\} = [B_{ij}] \{\varepsilon^0\} + [D_{ij}] \{\kappa\} \quad (۵)$$

که در آن ماتریسها D, B, A به صورت زیر تعریف می‌شوند و به ترتیب ماتریس سختی کششی، ماتریس سختی کوپلینگ و ماتریس سختی خمشی نامیده می‌شوند.

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^n (Q_{ij})_k (z_k - z_{k-1})$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (Q_{ij})_k (z_k - z_{k-1})^2$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (Q_{ij})_k (z_k - z_{k-1})^3 \quad (۶)$$



شکل ۱ ضخامت و مختصات سطوح بالایی و پایینی لایه‌های یک صفحه لایه‌ای

معادلات حاکم

با استفاده از روابط کرنش - تغییر مکان در مختصات استوانه‌ای و نیز از آنجا که صفحه حلقوی از نظر هندسی و بارگذاری دارای تقارن محوری است، روابط

متغیر $\eta = \frac{\xi - \xi_i}{S}$ ناحیه $[\xi_i, \xi_{i+1}]$ بر روی ناحیه $[0, 1]$ نگاشته می‌شود. از چند جمله‌ای درجه سوم برای درونیابی ζ استفاده می‌کنیم.

$$\begin{aligned} \xi(\eta) &= A\eta^3 + B\eta^2 + C\eta + D \\ [\xi(\eta)] &= 3A\eta^2 + 2B\eta + C \\ U(\mu) &= E\eta + F \end{aligned} \quad (12)$$

ضرایب A و B و ... و F را می‌توان با قرار دادن مقادیر گره‌ای در معادلات (۱۲) بدست آورد. تغییر مکان عرضی و شعاعی المان به صورت زیر بدست می‌آید.

$$\zeta^e(\eta, \tau) = [N^e]\{W^e\}, U^e(\eta, \tau) = [L^e]\{V^e\} \quad (13)$$

که در آن

$$\begin{aligned} \{W^e\}^T &= \{\zeta_i(\zeta_i)_\eta, \zeta_{i+1}(\zeta_{i+1})_\eta\} \\ [L^e], [N^e], \{V^e\}^T &= \{U_i, U_{i+1}\} \end{aligned}$$

توابع شکل هستند که به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$[N^e] = [\eta^3 \eta^2 \eta 1] \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & 1 \\ -3 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[L^e] = [\eta \ 1] \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

حال اگر صفحه به n المان تقسیم شده باشد، می‌توان با جمع کردن روابط تغییر مکان مربوط به هر المان معادلات (۱۳) تغییر مکان کل صفحه را بدست آورد.

$$\begin{aligned} \zeta(\zeta, \tau) &= \sum_{i=1}^n [N_i^e]\{W_i^e\} = N(\xi)W(\tau) \\ U(\xi, \tau) &= \sum_{i=1}^n [L_i^e]\{V_i^e\} = L(\xi)V(\tau) \end{aligned} \quad (15)$$

که در آن W و V توابعی از زمان هستند، که به ترتیب بیانگر مقادیر مجهول گره‌ای مربوط به تغییر مکان‌های عرضی و شیب و تغییر مکان طولی می‌باشند و به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$\begin{aligned} W &= [\zeta_1, (\zeta_1)_{\zeta}, \dots, \zeta_{n+1}, (\zeta_{n+1})_{\zeta}]^T \\ V &= [U_1, U_2, \dots, U_n, U_{n+1}]^T \end{aligned} \quad (16)$$

$$M_r = N_r = Q_r = 0 ; \quad \xi = R = \frac{b}{a} \quad (10)$$

که بر حسب متغیرهای بدون بعد به صورت زیر در می‌آید:

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \xi^2} = \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} = 0 ; \quad V = \frac{a}{h} \xi \frac{\partial \phi}{\partial \xi}, \quad \xi = R \quad (11)$$

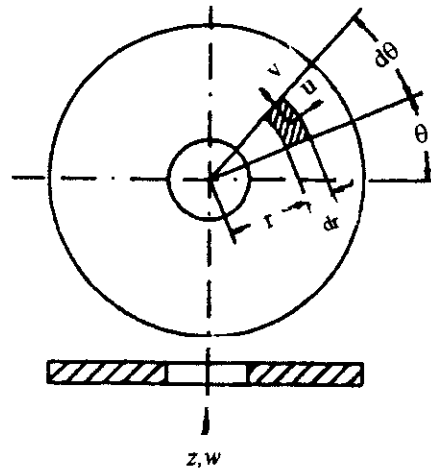
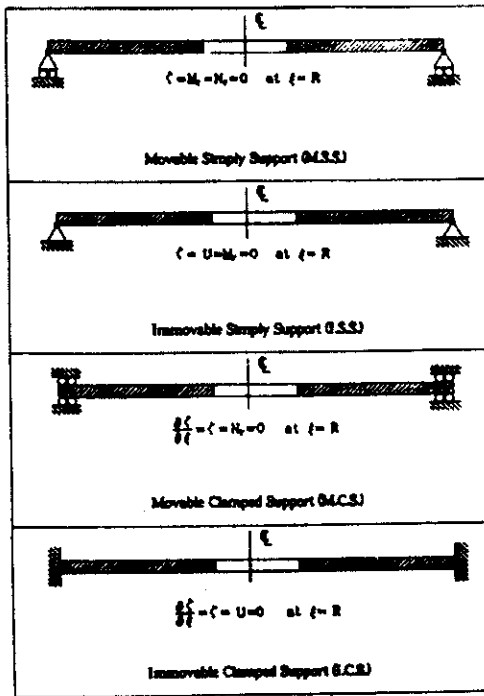
شرایط مرزی مختلف روی محیط خارجی صفحه حلقوی در شکل (۳) نشان داده شده است.

روش المان‌های محدود

حل تحلیلی و دقیق معادلات دیفرانسیل (۸) به همراه شرایط مرزی آن تاکنون مشخص نیست و باید برای حل آنها به روش‌های تقریبی و عددی متوسل شد. به علت کاربرد فراوان روش المان‌های محدود تحلیل مسائل دینامیکی، در این مقاله از این روش استفاده شده است. در این روش ماتریسها سختی و جرمی و معادلات ارتعاشی حرکت با استفاده از اصول آنالیز تغییرات بدست می‌آیند. با توجه به مقارن بودن صفحه به لحاظ هندسی، بارگذاری و خواص مکانیکی، تغییر شکل صفحه شعاعی و عرضی بوده و می‌توان از یک المان یک بعدی حلقوی استفاده کرد (شکل ۴).

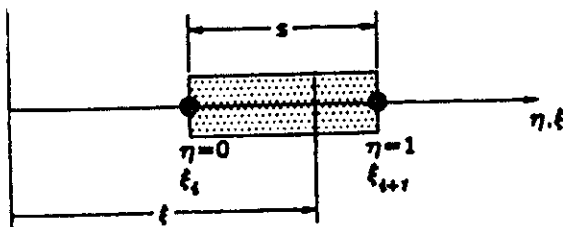
ناحیه نرمالیزه شده صفحه یعنی $[R, 1]$: ξ به n المان با عرض S تقسیم می‌شود که $S = \frac{1-R}{n}$ است. (شکل ۵) یک المان نمونه را برای تحلیل مسئله نشان می‌دهد. به علت تقارن محوری صفحه تغییر مکان و شیب در جهت محیطی صفر است و در نتیجه هر گره المان دارای سه درجه آزادی است: تغییر مکان در جهت Z ، تغییر مکان در جهت T ، که بر حسب کمیت‌های بی‌بعد عبارتند از U, ζ و $\partial \zeta / \partial \xi$.

بنابراین برای گره i از المان I بردار تغییر مکان به صورت $[U_i, \zeta_i, (\zeta_i)_{\zeta}]^T$ است، که در آن ζ_i تغییر مکان عرضی $\zeta(\zeta_i)$ ، U تغییر مکان شعاعی گره i از المان i ام می‌باشد. با توجه به شکل (۵)، با تعریف



شکل ۳ شرایط مرزی محیط خارجی صفحه حلقوی

شکل ۲ صفحه حلقوی و یک المان آن



شکل ۵ یک المان از صفحه حلقوی



شکل ۴ صفحه حلقوی المان بندی شده

با استفاده از معادله (۱۷) می‌توان معادله (۱۹) را به صورت $\Pi = \Pi' + \Pi''$ نوشت که در آن Π' ترم خطی و Π'' ترم غیرخطی انرژی کرنشی می‌باشند و به صورت زیر بیان می‌شوند.

$$\Pi' = \frac{1}{2} \int_A (\{\epsilon'_p\}^T [A'] \{\epsilon'_p\} + \{\epsilon'_b\}^T [D'] \{\epsilon'_b\}) dA$$

$$\Pi'' = \frac{1}{2} \int_A (\{\epsilon'_b\}^T [A'] \{\epsilon''_p\} + \{\epsilon''_p\}^T [A'] \{\epsilon'_p\} + \{\epsilon''_p\}^T [A'] \{\epsilon'_p\}) dA \quad (21)$$

با مشتق‌گیری از روابط (۱۵) خواهیم داشت:

$$\zeta_\xi = N_\xi W, \zeta_{\xi\xi} = N_{\xi\xi} W, U_\xi = L_\xi V \quad (22)$$

که با قرار دادن معادله (۲۲) در معادلات (۱۸) کرنش‌های کششی و خمشی خطی و غیر خطی بدست می‌آیند.

$$\{\epsilon\} = \frac{h}{a} \begin{bmatrix} L_\xi \\ L/\xi \end{bmatrix} \{V\}$$

$$\{\epsilon'_b\} = -\frac{1}{a} \begin{bmatrix} N_{\xi\xi} \\ N_\xi/\xi \end{bmatrix} \{W\}$$

$$\{\epsilon''_p\} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \zeta_\xi N_\xi \\ 0 \end{bmatrix} \{W\} \quad (23)$$

با جایگذاری معادلات (۲۳) و (۲۱) Π' و Π'' به صورت ماتریسی بدست می‌آیند.

$$\Pi' = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} V \\ W \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} [K_p] & 0 \\ 0 & [K_b] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V \\ W \end{Bmatrix}$$

$$\Pi'' = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} V \\ W \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & [K_1^*] \\ [K_1^*] & [K_2^*] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V \\ W \end{Bmatrix} \quad (24)$$

در معادلات فوق K_p و K_b به ترتیب ماتریس سختی کششی و خمشی خطی و K_1^*, K_2^* ماتریسهای سختی غیر خطی هستند و به شکل زیر تعریف می‌شوند.

با توجه به روابط کرنش تغییر مکان (۷) می‌توان این کرنش‌ها را به دو دسته کرنش‌های ناشی از کشش $\{\epsilon\}_p$ و کرنش‌های ناشی از خمش $\{\epsilon\}_b$ تفکیک کرد.

$$\{\epsilon\} = \begin{Bmatrix} \{\epsilon\}_p \\ \{\epsilon\}_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{\epsilon_r\}_p \\ \{\epsilon_\theta\}_p \\ \{\epsilon_r\}_b \\ \{\epsilon_\theta\}_b \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} 1/2w_r^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \epsilon'_p \\ \epsilon'_b \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \epsilon''_p \\ 0 \end{Bmatrix} = \{\epsilon'\} + \{\epsilon''\} \quad (17)$$

که در آن $\{\epsilon''\}, \{\epsilon'\}$ به ترتیب بردارهای کرنشی خطی و غیر خطی می‌باشند. شکل بدون ترمهای کرنش عبارتند از:

$$\epsilon'_p = \frac{h}{a} \begin{Bmatrix} U_\xi \\ U/\xi \end{Bmatrix}, \epsilon'_b = -\frac{1}{a} \begin{Bmatrix} \zeta_{\xi\xi} \\ \zeta_{\xi\xi}/\xi \end{Bmatrix}$$

$$\epsilon''_p = \begin{Bmatrix} (\zeta_\xi)^2/2 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (18)$$

معادلات دینامیکی حرکت

انرژی کرنشی یک صفحه لایه‌ای عبارت است از:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_A \{\epsilon\}^T [E] \{\epsilon\} dA \quad (19)$$

که در آن $[E]$ ماتریس ضرایب الاستیک است که با استفاده از روابط (۵) و (۶) به صورت زیر نتیجه می‌شود.

$$[E] = \begin{bmatrix} [A'] & 0 \\ 0 & [D'] \end{bmatrix}, [A'] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix}$$

$$D' = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{12} & D_{22} \end{bmatrix}$$

$$T(\tau) = \frac{1}{2} \dot{W}^T M \dot{W},$$

$$M = 2\pi D_{22} \sum_{e=1}^n N^T N \xi d\xi$$

با احتساب انرژی جنبشی شعاعی صفحه، انرژی کل صفحه به صورت زیر بیان می‌گردد.

$$T = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \dot{V} \\ \dot{W} \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{V} \\ \dot{W} \end{Bmatrix} \quad (27)$$

با استفاده از اصل هامیلتون یا معادلات حرکت لاگرانژ می‌توان معادلات حرکت صفحه را بدست آورد. بنابراین معادله حرکت لاگرانژ داریم:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{\partial(T-\Pi)}{\partial \begin{Bmatrix} V \\ W \end{Bmatrix}} \right] = \frac{\partial(T-\Pi)}{\partial \begin{Bmatrix} V \\ W \end{Bmatrix}} \quad (28)$$

با جایگذاری معادلات (۲۴) و (۲۷) در معادله (۲۸)، معادله ارتعاشات آزاد صفحه بدست می‌آید [۱۷].

$$\begin{bmatrix} [K_p] & [K_1^*] \\ [2K_1^*] & [K_p + 2K_2^*] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V \\ W \end{Bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{V} \\ \ddot{W} \end{Bmatrix} = 0 \quad (29)$$

بنابراین، معادلات ارتعاشات آزاد غیر خطی صفحه حلقوی مرکب به صورت زیر خواهد بود.

$$K_p V + K_1^* W = 0$$

$$M \ddot{W} + 2K_1^* V + [K_b + 2K_2^*] W = 0 \quad (30)$$

که پس از اعمال شرایط مرزی مناسب باید حل شوند. در حالت ارتعاشات اجباری کافی است به طرف راست معادله (۲۹) نیروی خارجی یعنی $\begin{Bmatrix} 0 \\ Q_p \end{Bmatrix}$ را اضافه کنیم. برای بدست آوردن Q_p می‌توان از اصل کار مجازی کمک گرفت. از آنجا که بار q روی شعاع r_p وارد می‌شود داریم:

$$K_p = \frac{h^2}{a^2} \int [A_{11} L_\xi^T + \frac{A_{12}}{\xi} \times [L_\xi^T L + L^T L_\xi] + \frac{A_{22}}{\xi^2} L^T L] dA$$

$$K_b = \frac{1}{a^2} \int [D_{11} N_{\xi\xi}^T N_\xi + \frac{D_{12}}{\xi} \times$$

$$[N_{\xi\xi}^T N_\xi + N_\xi^T N_\xi^T] + \frac{D_{22}}{\xi^2} N_\xi^T N_\xi] dA$$

$$K_1^* = \frac{h}{2a} \int \zeta_\xi \left[A_{11} L_\xi^T + \frac{A_{12}}{\xi} L^T \right] N_\xi dA$$

$$K_2^* = \frac{1}{4} \int A_{11} \xi_\xi^2 N_\xi^T N_\xi dA \quad (25)$$

ماتریس K_1^* یک ماتریس غیر مربع و نامتقارن است. روابط (۲۵) ماتریسهای سختی کل سازه را نمایش می‌دهند که از اسمبل کردن ماتریسهای سختی مربوط به هر یک از المان‌های بدست می‌آیند. باید توجه داشت که برای دستیابی به ماتریسهای سختی غیرخطی باید مقدار ξ_ξ در معادلات (۲۵) مشخص گردد و سپس انتگرال‌گیری شود.

برای بدست آوردن ماتریس جرمی سیستم نیاز به انرژی جنبشی آن است. به علت آنکه ارتعاشات صفحه در جهت عرضی بسیار مهم است از انرژی جنبشی آن در جهت شعاعی چشم‌پوشی می‌شود. در این صورت انرژی جنبشی صفحه به صورت زیر در می‌آید.

$$T(t) = \sum_{e=1}^n \frac{1}{2} \int_A \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)_e^2 dz dA \quad (26)$$

که بر حسب متغیرهای بی بعد به صورت زیر در می‌آید:

$$T(\tau) = \pi D_{22} \sum_{e=1}^n \int \zeta_\tau^T \zeta_\tau \xi d\xi$$

و با جایگذاری از معادلات (۱۵) بصورت زیر بیان می‌شود:

$$T(\tau) = \pi D_{22} \sum_{e=1}^n \int \dot{W}^T N^T N W \xi d\xi$$

که می‌توان آن را به صورت ماتریسی نوشت:

Archive of SID

$$V = [0, U_2, \dots, U_n, 0]^T$$

$$W = [\zeta_1, 0, \zeta_2, (\zeta_2)_\xi, \dots, \zeta_n, (\zeta_n)_\xi, 0, (\zeta_{n+1})_\xi]^T$$

• تکیه‌گاه گیردار غیرقابل حرکت (I.C.S).

$$(\zeta_{n+1})_\xi = U_{n+1} = (\zeta_{n+1})_\xi = 0$$

$$V = [0, U_2, \dots, U_n, 0]^T$$

$$W = [\zeta_1, 0, \zeta_2, (\zeta_2)_\xi, \dots, \zeta_n, (\zeta_n)_\xi, 0, 0]^T$$

• تکیه‌گاه گیردار قابل حرکت (M.C.S).

$$(\zeta_{n+1})_\xi = \zeta_{n+1} = 0$$

$$V = [0, U_2, \dots, U_n, U_{n+1}]^T$$

$$W = [\zeta_1, 0, \zeta_2, (\zeta_2)_\xi, \dots, \zeta_n, (\zeta_n)_\xi, 0, 0]^T$$

حل معادلات دینامیکی حرکت

برای حل معادلات غیرخطی، به دلیل آنکه ماتریسهای سختی غیر خطی K_1^* و K_2^* متناسب با دامنه ارتعاشات می‌باشند، باید از روش تکرار استفاده نمود، از این رو، یک حدس اولیه جهت همگرایی جوابها الزامی می‌باشد. بنابراین ابتدا با فرض اینکه دامنه ارتعاشات کوچک باشد می‌توان از ترمهای غیرخطی در معادله (۳۰) چشم‌پوشی کرده و معادله خطی $M\ddot{W} + K_b W = 0$ را حل نمود که یک مسئله مقدار ویژه می‌باشد. از حل آن فرکانسهای طبیعی و شکل موده‌های نرمال ارتعاشات آزاد خطی سیستم بدست می‌آید. سپس این مقادیر موده‌های نرمال به عنوان حدس اولیه برای حل معادلات غیر خطی (۳۰) بکار گرفته می‌شوند. برای حل مسئله مقدار ویژه خطی ابتدا ماتریسها سختی و جرمی هر المان محاسبه شده و سپس با اعمال شرایط مرزی به کمک حذف سطر و ستونهای مربوط از ماتریسهای سختی و جرمی با استفاده از روش ژاکوبی به حل مسئله مقدار ویژه می‌پردازیم.

برای نرمالیزه نمودن بردارهای ویژه یک مقدار دلخواه بسیار کوچک تغییر مکان $\bar{\Delta}$ به اولین متغیر گروه‌ای اعمال شده و با استفاده از این بردار ویژه و رابطه

$$\delta W = 2\pi r_p q \delta W_p = 2\pi q (a\xi_p)(a\delta\zeta_p)$$

و از آنجا مقدار $Q_p = 2\pi a^2 q \xi_p N_p$ بدست می‌آید.

برای حل معادلات (۳۰) باید ابتدا شرایط مرزی مورد نظر را اعمال کنیم، چرا که اگر شرایط مرزی اعمال نشوند به علت مستقل نبودن دو یا چند معادله از یکدیگر دترمینان ماتریسها صفر شده و حالت تکیگی یا انفراد پیش می‌آید. برای اعمال شرایط مرزی کافیسست سطر و ستون مربوط به تغییر مکان گره‌ای که روی مرز قرار گرفته و معلوم است در ماتریسهای معادله (۳۰) حذف شوند شرایط مرزی روی مرز داخلی حلقه $\xi = R$ به قرار زیر است.

$$\frac{D_{11}}{D_{12}} \zeta_{\xi\xi} + \frac{1}{\xi} \zeta_\xi = 0$$

$$\frac{D_{11}}{D_{22}} [\xi \zeta_{\xi\xi}]_\xi - \frac{1}{\xi} \zeta_\xi = 0$$

$$U_\xi + \frac{A_{12}}{A_{11}} \frac{U}{\xi} + \frac{a}{2h} [\zeta_\xi]^2 = 0$$

که پس از استفاده از تفاضلات محدود پیش‌رو، به صورت زیر در می‌آیند.

$$\zeta_1 = \zeta_2, \quad U_1 = U_2 \left[1 - \frac{SaA_{12}}{bA} \right]$$

بنابراین در اعمال شرایط مرزی روی مرز داخل باید سطر و ستونهای متناظر به ζ_1 یا ζ_2 و U_1 یا U_2 را حذف کرد.

برای مرز خارجی حلقه در $\xi = 1$ ، شرایط مرزی و بردار تغییر مکان‌های گره‌ای به صورت زیر است.

• تکیه‌گاه مفصلی قابل حرکت (M.S.S).

$$\zeta_{n+1} = 0, V = [0, U_2, \dots, U_{n+1}]^T,$$

$$W = [\zeta_1, 0, \zeta_2, (\zeta_2)_\xi, \dots, \zeta_n, (\zeta_n)_\xi, 0, (\zeta_{n+1})_\xi]^T$$

• تکیه‌گاه مفصلی غیرقابل حرکت (I.S.S).

$$\zeta_{n+1} = U_{n+1} = 0$$

بررسی نتایج

نتایج بدست آمده از بررسی ارتعاشات خطی و غیرخطی یک صفحه حلقوی کامپوزیت با شرایط مرزی آزاد در لبه داخلی و تکیه‌گاههای ساده و گیردار لبه خارجی در شکل‌های (۶) تا (۱۹) ارائه شده است. در شکل (۶) تغییرات دامنه ارتعاشات آزاد غیرخطی صفحه حلقوی بر حسب فرکانس مد اول با نتایج مرجع [8] مقایسه شده است. در شکل (۷) این نتایج برای ارتعاشات اجباری این صفحه با نتایج مرجع [8] مقایسه گردیده است. شکل‌های (۸) و (۱۰) تغییرات فرکانسهای اول، دوم و سوم را بر حسب R (نسبت شعاع خارجی به شعاع داخلی صفحه حلقوی) برای یک صفحه حلقوی که لبه خارجی آن تکیه‌گاه ساده است نمایش می‌دهد.

شکل‌های (۱۱) تا (۱۳) همین نتایج را برای حالتی که لبه خارجی گیردار است نمایش می‌دهند. در این شکل‌ها نتایج برای سه حالت $E_r/E_0 = 0.5$ ، $E_r/E_0 = 1$ و $E_r/E_0 = 2$ ارائه شده‌اند.

بدیهی است که در تحلیل خطی به علت وجود اثر غشائی، قابل حرکت بودن یا نبودن تکیه‌گاهها مهم نیست. در شکل‌های (۱۴) و (۱۶) تاثیر افزایش فرکانس برای سه مد اول برای دامنه پاسخ ارتعاشات صفحه با لبه خارجی تحت تکیه‌گاه ساده غیرقابل حرکت برای تحلیل غیرخطی با $R = 0.1$ ارائه شده است. در این شکل‌ها نیز برای سه نوع صفحه کامپوزیت که نسبت ضریب الاستیک شعاعی به محیطی در آنها به ترتیب 0.5 ، 1 و 2 است. نتایج بدست آمده‌اند شکل‌های (۱۷) تا (۱۹) تاثیر افزایش فرکانس مد اول بر دامنه پاسخ ارتعاشات اجباری غیرخطی صفحه حلقوی کامپوزیت با تکیه‌گاههای ساده قابل حرکت در لبه خارجی برای

مقدار شیب در هر گره مجدداً محاسبه می‌شود. به دنبال آن مقادیر ماتریسهای سختی غیرخطی K_1^* و K_2^* محاسبه می‌شوند.

پس از اعمال شرایط مرزی مربوط به V در معادله اول (۳۰) مقدار بردار V به صورت زیر بدست می‌آید.

$$V = K_p^{-1} K_1^* W$$

با قرار دادن V در معادله اول (۳۰) داریم:

$$M\ddot{W} + (K_0 + \Delta K)W = 0$$

$$\Delta K = 2[K_2^* - [K_1^*]^T K_p^{-1} [K_1^*]] \quad (31)$$

پس از اعمال شرایط مرزی مربوط به W ، مسئله مقدار ویژه غیرخطی با استفاده از روش تکرار حل شده و از آنجا فرکانسهای سیستم و مودهای آن بدست می‌آیند.

در حالت ارتعاشات اجباری روش انتگرال‌گیری مستقیم ایمپلیسیت برای حل معادلات دینامیکی حرکت مورد استفاده قرار می‌گیرد. در این حالت ابتدا ماتریسهای سختی و جرمی خطی کل سیستم پس از اسمبل شدن و اعمال شرایط مرزی بدست می‌آیند.

به دلیل آنکه قسمت غیرخطی ماتریسهای سختی ΔK تابعی از تغییر مکان‌ها و در نتیجه تابعی از زمان است معادله حرکت دینامیکی به صورت زیر در می‌آید.

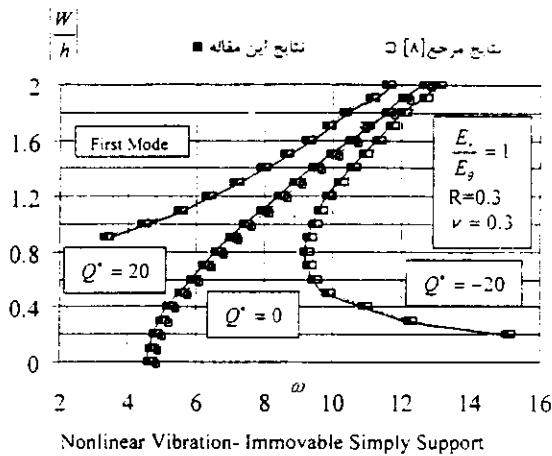
$$M\ddot{W}(\tau) + [K_0 + \Delta K(\tau)]W(\tau) = Q(\tau) \quad (32)$$

معادله فوق با در نظر گرفتن شرایط اولیه $W(0)$ ، $\dot{W}(0)$ و $\ddot{W}(0)$ (تغییر مکان‌ها، سرعتها و شتابهای گرهی اولیه) حل می‌شود. برای مطالعه جزئیات این بخش به مرجع [۱۷] مراجعه شود. با مشخص شدن فرکانسهای طبیعی و شکل مودهای صفحه می‌توان به محاسبه کرنش‌ها و تنش‌ها و همچنین نیروها و ممانهای برآیند در صفحه پرداخت.

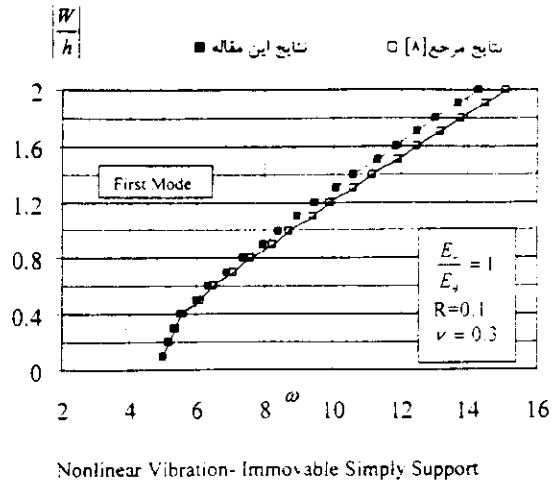
Archive of SID

بر صفحه حلقوی با $R=0.1$ اعمال شده است. نتایج حاصل با مراجع [12] و [13] نیز مطابقت دارد.

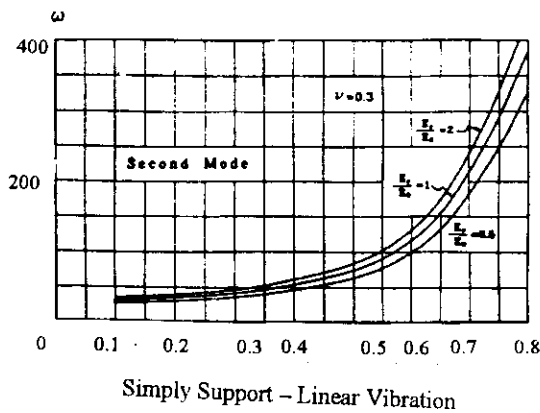
سه نوع صفحه مذکور را نشان می‌دهد. نتایج بدست آمده برای صفحات در حالتی است که بار حلقوی $Q^* = \frac{q_a}{D_{11}h} = \pm 20$ روی دایره‌ای به شعاع $r_p = 0.1$



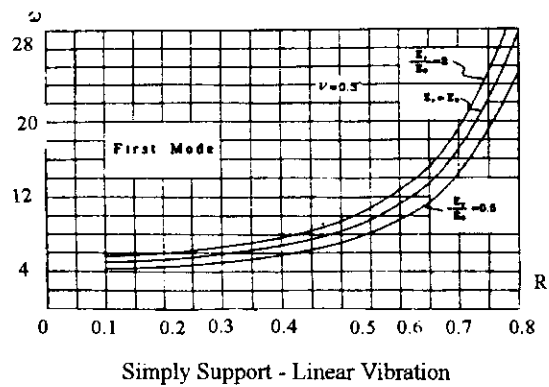
شکل ۷ مقایسه تغییرات دامنه ارتعاشات اجزای غیرخطی صفحه حلقوی برحسب فرکانس مد اول



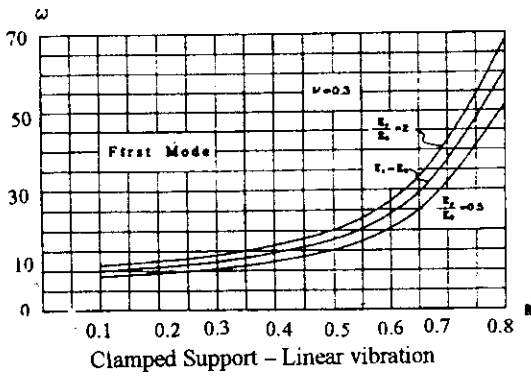
شکل ۶ مقایسه تغییرات دامنه ارتعاشات آزاد غیرخطی صفحه حلقوی برحسب فرکانس مد اول



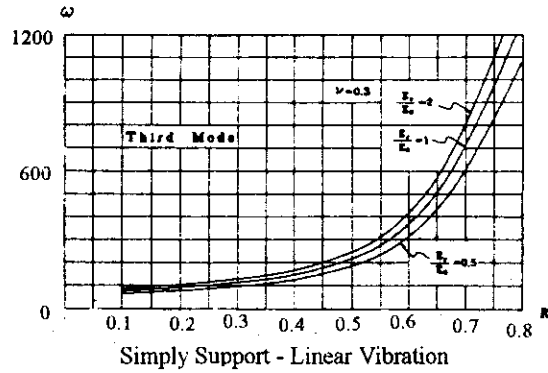
شکل ۹ تغییرات فرکانس مد دوم برحسب R برای صفحه حلقوی با تکیه‌گاه ساده (حالت خطی)



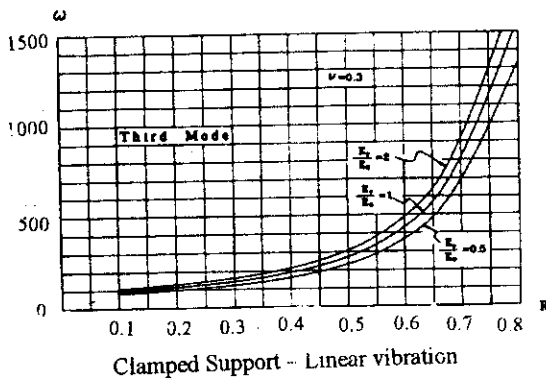
شکل ۸ تغییرات فرکانس مد اول برحسب R برای صفحه حلقوی با تکیه‌گاه ساده (حالت خطی)



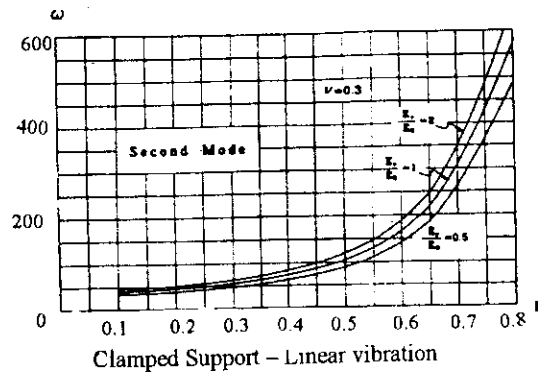
شکل ۱۱ تغییرات فرکانس مد اول بر حسب R برای صفحه حلقوی با تکیه‌گاه گیردار (حالت خطی)



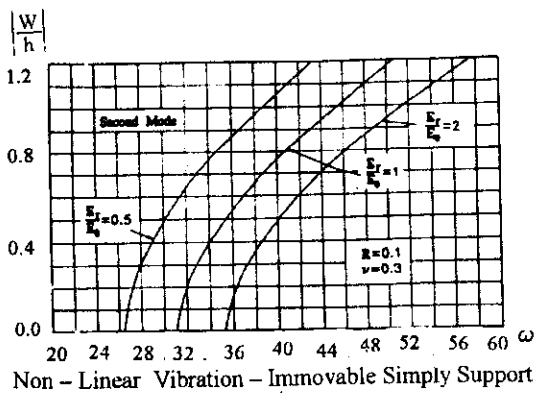
شکل ۱۰ تغییرات فرکانس مد سوم بر حسب R برای صفحه حلقوی با تکیه‌گاه ساده (حالت خطی)



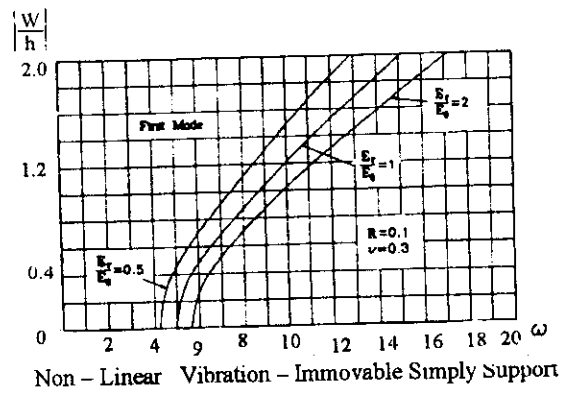
شکل ۱۳ تغییرات فرکانس مد سوم بر حسب R برای صفحه حلقوی با تکیه‌گاه گیردار (حالت خطی)



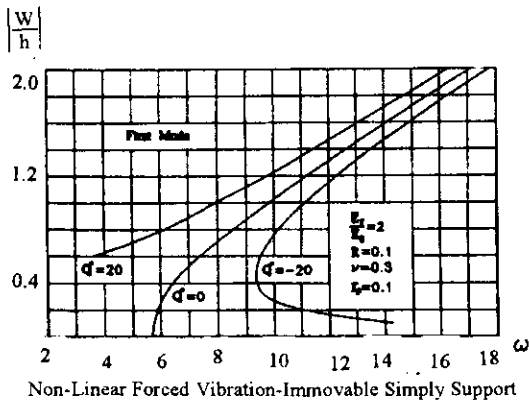
شکل ۱۲ تغییرات فرکانس مد دوم بر حسب R برای صفحه حلقوی با تکیه‌گاه گیردار (حالت خطی)



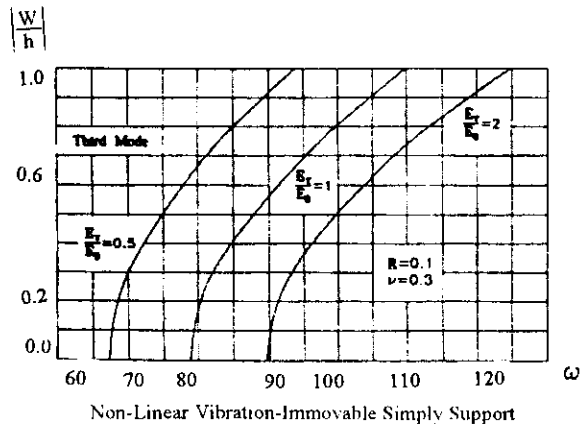
شکل ۱۵ تغییرات دامنه ارتعاشات آزاد غیرخطی صفحه حلقوی بر حسب فرکانس مد دوم



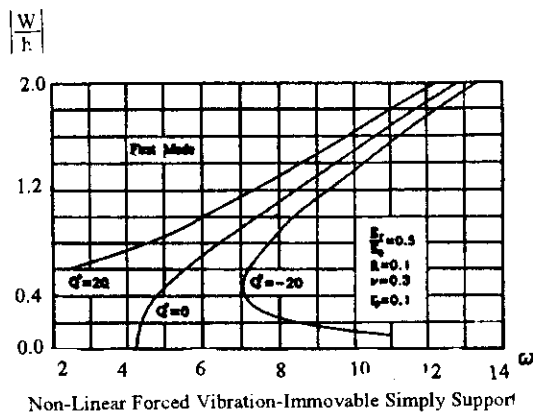
شکل ۱۴ تغییرات دامنه ارتعاشات آزاد غیرخطی، صفحه حلقوی بر حسب فرکانس مد اول



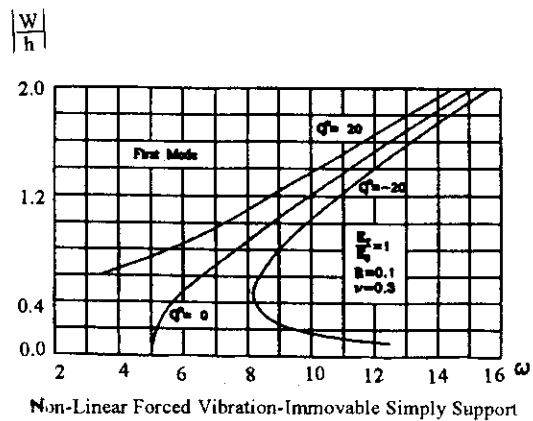
شکل ۱۷ تغییرات دامنه ارتعاشات اجباری غیرخطی صفحه حلقوی بر حسب فرکانس



شکل ۱۶ تغییرات دامنه ارتعاشات آزاد غیرخطی صفحه حلقوی بر حسب فرکانس مد سوم



شکل ۱۹ تغییرات دامنه ارتعاشات اجباری غیرخطی صفحه حلقوی بر حسب فرکانس



شکل ۱۸ تغییرات دامنه ارتعاشات اجباری غیرخطی صفحه حلقوی بر حسب فرکانس

۳- چون اثر غشایی با زیاد شدن دامنه ارتعاش شدت می‌یابد، فرکانسها از دامنه ارتعاشات بسیار متاثر می‌گردند و هر چه مود ارتعاشی بیشتر باشد، این تأثیر محسوس‌تر است. همچنین نسبت سختی شعاعی به محیطی در دامنه‌های بالاتر بر تغییر فرکانس اثر بیشتری می‌گذارد. هرچه این نسبت افزایش پیدا کند فرکانس نیز افزوده می‌شود.

۴- به علت غیرخطی بودن پاسخ ارتعاشات اجباری، در این حالت طبیعت پاسخها از حالت خطی کاملاً متفاوت است. به عنوان مثال شکل‌های (۱۷) تا (۱۹) نشان

نتیجه‌گیری

با بررسی منحنی‌های بدست آمده نتایج زیر برای پاسخ ارتعاشات یک صفحه حلقوی مرکب بدست می‌آیند.

۱- افزایش نسبت ضرایب الاستیک شعاعی به محیطی موجب افزایش فرکانسهای طبیعی شده و با زیاد شدن نسبت شعاع داخلی به شعاع خارجی این افزایش شدت می‌یابد.

۲- همانگونه که انتظار می‌رود فرکانسهای طبیعی در حالت تکیه‌گاه گیردار بسیار بزرگتر از تکیه‌گاه مفصلی می‌باشند.

از یک مقدار کم به یک مقدار زیاد می‌شود. شاخه طرف راست منحنی‌های یک بون شناخته می‌شوند که نشان دهنده آن است که ارتعاشات صفحه و نیروی اعمالی بر آن در فاز مقابل قرار دارند.

می‌دهند که در فرکانسهای بالاتر از $\frac{8}{2}$ دامنه ارتعاشات برخلاف حالت خطی دارای سه مقدار خواهد بود. به همین علت در ارتعاشات غیرخطی پدیده‌ای به نام پرش اتفاق می‌افتد که باعث افزایش ناگهانی دامنه ارتعاشات

مراجع

- 1- Nowiski, J. L., " Non-Linear Transverse Vibration of Circular Elastic Plates Built – In at the Boundary," Proc. of the Fourth U.S. National Congress of Applied Mechanics ASME, pp.325-334., (1962).
- 2- Leissa, A. W., " Vibrations of Plates", NASA SP -160, pp. 7-19., (1969).
- 3- Hundelman, G., and Cohen, H., "On the Effects of the Addition of Mass to vibration System ", *Proc. of 9th Int. Conf. of Applied Mechanics*, Vol. 7,957., pp. 509-516.
- 4- Laura, P. A. A., and Gutirres, R.H., "Transverse Vibration of Annular Plates of Variable Thickness with Rigid Mass on Inside", *J. of Sound and Vibration.*, Vol. 79., No, pp. 311-315., (1981).
- 5- Huang, C. L. D., and Walker, Jr. H. S., "Non - linear Vibration of a Hinged Circular Plate With a Concentric Rigid Mass". *J. of Sound and Vibration.*, (1988).
- 6- Huang, C. L. D., "Finite Amplitude Vibration of an Orthotropic Circular Plate With an Isotropic Core", *Int. J. Non -Linear Mechanics.*, Vol. 8., (1973).
- 7- Huang, C. L. D., and Huang, S. T., " Finite Element Analysis of Non-Linear Vibration of a Circular Plate with a Concentric Rigid Mass", *Journal of Sound and Vibration.*, (1989).
- 8- Sandmand, B., "Harmonic Oscillation of Circular and Annular Plates at Finite Amplitudes", Ph.D Thesis., Kansas State University., (1968).
- 9- Adams, G. C., "Elastic Wrinkling of a Tensioned Circular plate Using Von Karman Plate Theory", *J. Applied Mechani*, Vol. 60. (1993).
- 10- Ye, J. O., "Large Deflection Analysis of Axisymmetric Circular Plates with Variable Thickness by BEM", *Applide Mathematical Modeling* , 15(6), pp. 325-328, (1991).
- 11- Ye, J. O., "Axisymmetric Large Deflection Analysis of Annular Plates and Shells by Using BEM and FDM, *Engineering Analysis with Boundary Elements*", 9(4), pp. 238-287., (1992).
- 12- Ye, J. O., "Axisymmetric Vibration of Laminated Annular Plates Composed of Transversely Isotropic layers", *J. of Sound and Vibration* 205(2), pp. 250-256., (1997).

- 13- Laura, P. A. A., and Romanelli E., " Vibration of an Annular Circular plate of Polar Anisotropy with one Edge Supported, the Other One Free and Intermediate Concentric Circular Support ", *J. of Sound and Vibration* 235(3)., pp. 521-529., (2000)
- 14- Su, Y. H., Chen , K. S., Roberts, D.C., and Spearing , S.M., "Large Deflection Analysis of a pre Stressed Annular Plate with Rigid Mass Under Axisymmetric Loding ", *J. Micromechanics and Microengineering* , 11(6), pp . 645-653. (2001).
- 15- Ding , H.J., Xu, R.Q., "Exact Solution for Axisymmetric Deformation of Laminated Transveresly Isotropic Annular Plates", *Acta Mechanica* ., 153(3-4), 169-182., (2002).
- 16- Li, S. R., Zhou, Y.H., and Song , X., "Non -Linear Vibartion and Thermal Buckling of an Orthotropic Annular Plate with a Centric Rigid Mass", *J. of Sound and Vibration* ., 251(1) 141-152, (2002).
- ۱۷- طاهرزاده، محمدرضا. "بررسی ارتعاشات غیرخطی یک صفحه حلقوی کامپوزیت تحت بار حلقوی به روش اجزاء محدود، پایان نامه کارشناسی ارشد، دانشکده فنی، دانشگاه تهران، (۱۳۷۳).