

ارتعاشات آزاد صفحات ارتوتروپیک با تکیه گاههای الاستیک*

جلیل رضائی پزند^(۱)جلیل اسماعیلی^(۲)

چکیده در این مقاله معادله فرکانسی برای صفحه تخت مستطیل شکل ارتوتروپیک در حالت تکیه گاه الاستیکی با پارامتر فشرهای پیچشی q_x , q_y در حضور نیروهای داخل صفحه N_x , N_y بدست آمده است. با در اختیار داشتن معادله فرکانسی می توان موارد مختلف و دلخواه از شرایط مرزی و مشخصات صفحه از لحاظ ابعادی و جنس را بررسی کرده و اثرات ناشی از تغییر پارامترهای مختلف را بر فرکانس طبیعی مشاهده نمود. روش حل معادله دیفرانسیل بر تبدیل معادله دیفرانسیل دو بعدی به یک بعدی استوار است. از نتایج مهم این مقاله می توان به خطی بودن رابطه بین A (پارامتر مشخصه فیزیکی صفحه) و B (پارامتر فرکانسی صفحه) اشاره نمود. پارامترهای A و B شامل طیف وسیعی از مواد مرکب ارتوتروپیک و چند لایه را در بر می گیرد. حل حاضر حالت کلی شرایط مرزی، بارگذاری داخل صفحه، ابعاد و خواص ماده را به صورت ساده ای ارائه می دهد.

واژه های کلیدی ماده مرکب، صفحه ارتوتروپیک، تکیه گاه الاستیک، ارتعاشات آزاد.

Free Vibration of Orthotropic Plates with Elastic Supports

J. Rezaeepazhand

J. Esmaili

Abstract The vibration behavior of orthotropic rectangular plates are presented in this study. The plate is subjected to uniform in-plane forces (N_x , N_y), and its edges are assumed to be elastically restrained (with various degree) against rotation. This type of boundary conditions covered a wide range of B.C's from simply supports to clamped supports. The analytical solution is obtained using classical plate theory. Frequency equations of these systems are very large and difficult to solve. A simple method of solving this type of equations has been used in order to investigate free vibration responses of orthotropic plates with elastic supports. The effects of plate geometry, material properties, compressive inplane loads and boundry conditions are presented and discussed.

Key Words Composites, Elastic Supports, Orthotropic Plate, Free Vibrations.

* نسخه اولیه مقاله در تاریخ ۱۱/۱۰/۰۷ و نسخه نهایی آن در تاریخ ۸۳/۲/۰۵ به دفتر نشریه رسیده است.

(۱) استادیار، دانشگاه فردوسی مشهد، دانشکده مهندسی، گروه مکانیک

(۲) دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشگاه فردوسی مشهد، دانشکده مهندسی، گروه مکانیک

مقدمه

چندلایه با تکیه گاههای نقطه ای پرداختند [4]. آنها برای تحلیل خود از روش ریلی - ریتز استفاده نمودند. همچنین، با استفاده از همین روش حل، کاپانیا و همکارش ارتعاش آزاد صفحات چهار گوش یکسر گیردار ضخیم ساخته شده از مواد مرکب چند لایه را نیز بررسی نمودند [5].

سال ۱۹۹۷ مورفی (Murphy) و همکارانش اثر تنش های اولیه ناشی از حرارت را بر مشخصات ارتعاشات آزاد صفحات مرکب با تکیه گاههای گیردار مورد بررسی قرار دادند [6]. در این تحقیق نتایج تئوری بدست آمده با نتایج تجربی مقایسه شد که بین این نتایج تطابق خوبی مشاهده گردید. در همین سال چانگ (Chung) و همکارش ارتعاشات آزاد صفحات مرکب چند لایه کمانش کرده را با استفاده از روش المان محدود بررسی نمودند [7]. همچنین ارتعاشات آزاد غیر خطی صفحات مرکب به روش المان محدود توسط شی (Shi) و همکارانش مورد بحث و بررسی قرار گرفت [8].

سال ۲۰۰۱ چینگ (Ching) و چیاو (Chiao) با استفاده از روش نورسنجی به طور تجربی در زمینه ارتعاشات صفحات مرکب چند لایه به تحقیق پرداختند. نتایج محاسبات عددی حاصل از روش المان محدود و تکنیک تقریبی - تحلیلی ریلی - ریتز با نتایج تجربی بدست آمده مقایسه شده، که در نتیجه تطابق خوبی هم در فرکانس های طبیعی و هم در شکل مدهای مربوطه مشاهده گردید [9].

با توجه به تحقیقات انجام شده مشاهده می گردد که در تحقیقات یاد شده حالت های مشخص از شرایط مرزی در نظر گرفته شده است. از این رو بررسی ارتعاشات صفحه ساخته شده از مواد مرکب که در آن شرایط مرزی به صورت مقید شده در برابر پیچش با ضرائب پیچشی متغیر همراه با بارگذاری داخل صفحه باشد، کمتر مورد توجه قرار گرفته است.

مهندسی هوا فضا یکی از حوزه های مهم استفاده از مواد مرکب (Composite materials) چند لایه به ویژه برای ساختن سازه های فضایی بزرگ می باشد. مقاومت بالا، وزن کم و خواص جهتی مواد مرکب برای سازه های هوا فضا ایده آل می باشد. این مواد معمولاً به صورت صفحات چندلایه تخت و یا انحنا دار مورد استفاده قرار می گیرند. با توجه به ظرافت سازه های یاد شده، فرکانس های طبیعی سازه و شکل مدهای مربوط به آنها یکی از پارامترهای مهم طراحی می باشد. با توجه به اهمیت ارتعاشات صفحه های فلزی و مواد مرکب، تحقیقات بسیاری درباره رفتار ارتعاشی آنها صورت گرفته است. در این قسمت به طور اجمالی به بررسی کارهای انجام شده در سالهای اخیر در ارتباط با ارتعاشات صفحات مرکب پرداخته می شود.

سال ۱۹۹۲ اسلاس (Sloss) و همکارانش به بررسی و بهینه سازی طراحی و کنترل صفحات چند لایه تحت کمانش و ارتعاش پرداختند [1]. در این تحقیق ضخامت بهینه لایه ها و تابع کنترل پس خور برای چند لایه های متقارن تعیین گردید. در واقع هدف اصلی آنها حداکثر نمودن نیروی کمانش و حداقل نمودن پاسخ های دینامیکی سیستم نسبت به اغتشاشات بوده است.

سال ۱۹۹۵ ماریوما (Maruyama) و همکاران وی نتایج تئوری و تجربی ارتعاشات آزاد صفحات مرکب چند لایه را مورد بحث و بررسی قرار دادند [2]. نتایج تئوری را با استفاده از روش ریتز و نتایج تجربی را با استفاده از روش نورسنجی محاسبه نمودند. در ادامه ایشینومیا (Ichinomiya) و همکارانش ارتعاشات صفحات ساندویچی مستطیل شکل را که به صورت نقطه ای روی تکیه گاههای الاستیکی قرار گرفته بود، بررسی نمودند [3].

سال ۱۹۹۶ اندرو (Andrew) و کاپانیا (Kapania) به

پارامتر t مشخصه زمان می باشد. شرایط مرزی برای تکیه گاه با فنرهای پیچشی عبارتند از:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{at } x=0 \Rightarrow W=0, D_{11} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \theta_x \frac{\partial W}{\partial x} = 0 \\ \text{at } x=a \Rightarrow W=0, D_{11} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \theta_x \frac{\partial W}{\partial x} = 0 \end{array} \right. \quad (2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{at } y=0 \Rightarrow W=0, D_{22} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - \theta_y \frac{\partial W}{\partial y} = 0 \\ \text{at } y=b \Rightarrow W=0, D_{22} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \theta_y \frac{\partial W}{\partial y} = 0 \end{array} \right. \quad (3)$$

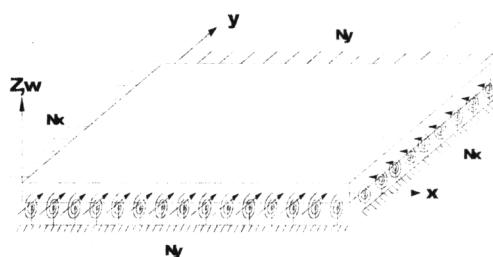
پارامترهای θ_x و θ_y ثوابت فنرهای پیچشی عمل کننده روی لبه های صفحه، $H_1 = D_{12} + 2D_{66}$ ضرایب سفتی معادل صفحه و ρ_m چگالی در واحد سطح صفحه هستند.

حل عمومی معادله (۱) به صورت زیر خواهد بود.

$$W(x, y, t) = X\left(\frac{x}{a}\right)Y\left(\frac{y}{b}\right)e^{i\omega_n t} \quad (4)$$

X و Y توابعی از پارامترهای بی بعد شده x و y می باشند. برای شرایط مرزی در نظر گرفته شده، حدس حل دقیق (توابع X و Y) بسیار دشوار می باشد و باید از روش های عددی برای بدست آوردن فرکانس طبیعی استفاده نمود. برای این منظور از روش کانتروویچ (Kantrovich) جهت حل معادله فوق استفاده خواهد شد. روش کانتروویچ حالت کلی تر روش ریتز می باشد که در آن برای پیدا کردن یک تابع نامشخص در حل حدسی، به عنوان مثال تابع $X\left(\frac{x}{a}\right)$ در تابع خیز رابطه (۴)، از اصل تغییرات استفاده می شود [11]. فرض اولیه به این صورت است که تابع Y از تابع خیز (۴) در شرایط مرزی (۳) صدق می کند. با

در این مقاله کوشش شده است که رفتار ارتعاشی صفحه ارتوتروپیک تحت تاثیر نیروهای فشاری عرضی و شرایط مرزی مختلف مورد بحث و بررسی قرار گیرد. شرایط مرزی صفحه تکیه گاههای ساده ($q_x = q_y = 0$)، گیردار ($q_x = q_y = \infty$) و تکیه گاه با فنرهای پیچشی ($q_x \neq 0, q_y \neq 0$) در نظر گرفته شده است. حل نهایی مربوط به معادله فرکانسی برحسب متغیرهای اصلی، نسبت طول و عرض، نسبت های سختی (سفتی) فنرهای پیچشی، فرکانس و نیروهای فشاری



شکل ۱ هندسه و شرایط مرزی صفحه

عرضی (داخل صفحه) می باشد. با استفاده از معادله حاکم و اعمال شرایط مرزی به معادله فرکانسی رسیده و سپس با استفاده از یک روش حل عددی مناسب برای هر حالت دلخواه از شرایط مرزی، بارگذاری فشاری داخل صفحه و مشخصات هندسی و خواص مواد صفحه می توان فرکانس های طبیعی را محاسبه نمود.

معادلات حاکم و شرایط مرزی

با فرض جابجایی های کوچک معادله حاکم بر سیستم شکل (۱) مطابق زیر خواهد بود [10].

$$D_{11} \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2H_1 \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} + N_x \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \rho_m \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

$$X\left(\frac{x}{a}\right) = A_1 e^{m_1 \frac{x}{a}} + A_2 e^{m_2 \frac{x}{a}} + A_3 e^{m_3 \frac{x}{a}} + A_4 e^{m_4 \frac{x}{a}} \quad (11)$$

در معادله بالا $m_1 \dots m_4$ ریشه های معادله مشخصه زیر

$$m^4 + \pi^2 A m^2 - \pi^4 B = 0 \quad (12)$$

ریشه های m_1 تا m_4 مقادیر زیر را دارا می باشند.

$$m_1 = \pi \sqrt{\frac{-A + \sqrt{A^2 + 4B}}{2}}$$

$$m_2 = \pi \sqrt{\frac{-A - \sqrt{A^2 + 4B}}{2}}$$

$$m_3 = -\pi \sqrt{\frac{-A + \sqrt{A^2 + 4B}}{2}}$$

$$m_4 = -\pi \sqrt{\frac{-A - \sqrt{A^2 + 4B}}{2}}$$

با اعمال شرایط مرزی (۱۰) به معادله (۱۱) و صفر قرار دادن دترمینان ضرایب، معادله فرکانسی سیستم مورد نظر به شکل زیر بدست می آید.

$$F(m_1, m_2, m_3, m_4) = (m_4^2 - m_3^2)(m_2^2 - m_1^2)(e^{m_3+m_4} + e^{m_1+m_2}) \\ (m_4^2 - m_2^2)(m_1^2 - m_3^2)(e^{m_3+m_4} + e^{m_1+m_3}) \\ (m_4^2 - m_1^2)(m_3^2 - m_2^2)(e^{m_1+m_4} + e^{m_2+m_3}) \\ + q_x (m_2 - m_1)(m_4 - m_3) \\ [(m_1 + m_2) - (m_3 + m_4)](e^{m_3+m_4} - e^{m_1+m_2}) \\ + q_x (m_2 - m_1)(m_4 - m_2) \\ [(m_1 + m_2) - (m_3 + m_4)](e^{m_2+m_4} - e^{m_1+m_3}) \\ + q_x (m_1 - m_3)(m_3 - m_2) \\ [(m_2 + m_1) - (m_3 + m_4)](e^{m_1+m_4} - e^{m_2+m_3}) \\ - q_x^2 (m_4 - m_3)(m_2 - m_1)(e^{m_3+m_4} - e^{m_1+m_2}) \\ - q_x^2 (m_4 - m_2)(m_1 - m_3)(e^{m_3+m_4} - e^{m_1+m_2}) \\ - q_x^2 (m_4 - m_1)(m_3 - m_2)(e^{m_1+m_4} - e^{m_2+m_3}) = 0 \quad (14)$$

جایگذاری رابطه (۴) در معادله (۱) پس از مشتق گیری و ساده سازی، معادله (۱) به معادله (۵) که فقط تابعی از x می باشد، تبدیل می گردد.

$$X''''\left(\frac{x}{a}\right) + \pi^2 A X''\left(\frac{x}{a}\right) - \pi^4 B X\left(\frac{x}{a}\right) = 0 \quad (5)$$

ضرایب A, B به صورت زیر تعریف می شوند.

$$A = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \left[K_x + 2 \left(\frac{H_1}{D_{11}} \right) \left(\frac{1}{\pi^2} \frac{C_1}{C_0} \right) \right] \quad (6)$$

$$B = \left(\frac{a}{b}\right)^4 \left[\Omega^2 - K_y \left(\frac{1}{\pi^2} \frac{C_1}{C_0} \right) - \left(\frac{D_{22}}{D_{11}} \right) \left(\frac{1}{\pi^4} \frac{C_2}{C_0} \right) \right] \quad (7)$$

$$\begin{cases} K_x = \frac{N_x b^2}{\pi^2 D_{11}} \\ K_y = \frac{N_y b^2}{\pi^2 D_{11}} \\ \Omega^2 = \frac{\omega_n^2 b^4 \rho_m}{\pi^4 D_{11}} \end{cases} \quad (8)$$

ضرائب C_2, C_1, C_0 به انتگرال $Y\left(\frac{y}{b}\right)$ و مشتقات آن مربوط می باشند.

$$C_0 = \int_0^1 Y^2\left(\frac{y}{b}\right) d\left(\frac{y}{b}\right), \\ C_1 = \int_0^1 Y\left(\frac{y}{b}\right) Y''\left(\frac{y}{b}\right) d\left(\frac{y}{b}\right), \\ C_2 = \int_0^1 Y\left(\frac{y}{b}\right) Y''''\left(\frac{y}{b}\right) d\left(\frac{y}{b}\right) \quad (9)$$

با توجه به اینکه رابطه (۵) فقط تابع x می باشد، شرایط مرزی در $x = 0, a$ (شرایط مرزی (۲)) به صورت بدون بعد زیر خواهد بود.

$$X(0) = X(a) = 0 \\ X''(0) - q_x X'(0) = 0 \\ X''(a) + q_x X'(a) = 0 \quad (10)$$

که در آن $q_x = \frac{a \theta_x}{D_{11}}$ تعریف شده است. حل عمومی معادله (۵) به صورت زیر می باشد.

روش حل عددی

معادله فرکانسی سیستم، معادله (۱۴)، تابعی از m_i و در نتیجه تابعی از A و B خواهد بود. از طرف دیگر شرایط مرزی (۱۰) نیز تابعی از q_x (قید پیچشی) می‌باشد. لازم به یادآوری است که معادله فرکانسی به دلیل دارا بودن تابع نمایی افزون بر تولید مقادیر بزرگ از لحاظ عددی، در بعضی شرایط مقادیر مختلط نیز تولید می‌کند و این مورد نشانگر بدرفتاری معادله فرکانسی و ایجاد مشکل در پیدا کردن ریشه‌های معادله فرکانسی می‌باشد. با توجه به اینکه B افزون بر خواص ماده، شرایط مرزی و ابعاد صفحه، تابعی از فرکانس و بار فشاری می‌باشد، با مشخص شدن مقدار آن پاسخ صفحه (فرکانس طبیعی و یا بار اعمالی مورد نیاز) بدست خواهد آمد. با استفاده از معادله فرکانسی برای هر A و q_x که، به ترتیب، نماینده مشخصات فیزیکی صفحه و شرایط مرزی هستند، B ‌های مربوطه با استفاده از روش عددی مناسب بدست می‌آید و خروجی مورد نیاز (فرکانس طبیعی و یا بار اعمالی) از آن قابل محاسبه می‌باشد. الگوریتم محاسبه فرکانس به صورت زیر می‌باشد.

```

A, q_x
for B = -∞ : +∞
  m1 = f1(A, B)
  m2 = f2(A, B)
  m3 = f3(A, B)
  m4 = f4(A, B)
  F(m1, m2, m3, m4, q_x) = 0
  if F(m1, m2, m3, m4, q_x) = 0
    B
  end
end
    
```

دامنه B باید با سعی و خطا بدست آید چرا که روش دیگری برای بدست آوردن آن وجود ندارد. با در اختیار داشتن معادله فرکانسی می‌توان موارد دلخواه از شرایط

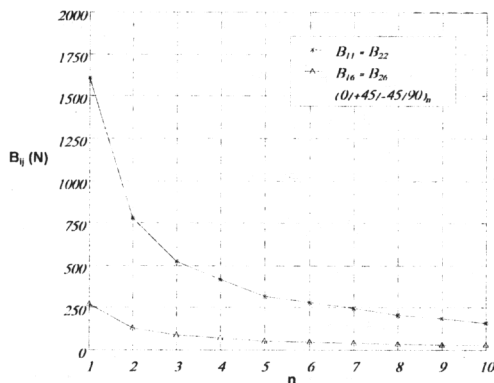
مرزی و مشخصات صفحه از لحاظ ابعادی و جنس را بررسی کرده و اثرات ناشی از تغییرات پارامترهای مختلف را بر فرکانس طبیعی مشاهده نمود. یک برنامه رایانه ای بر اساس روش حل فوق جهت مطالعه پارامترهای مختلف تهیه گردیده است.

با توجه به محدود بودن معادلات فوق برای صفحات ارتوتروپیک، در قسمت بعد در مورد صفحات چند لایه ساخته شده از مواد مرکب که رفتاری شبه ارتوتروپیک داشته و معادلات ارائه شده در این مقاله با دقت قابل قبول در مورد آنها نیز صادق است، بحثی کوتاه ارائه می‌شود.

خواص صفحات ارتوتروپیک

حالت‌های متنوع صفحات چند لایه مرکب را می‌توان از کنار هم قرار دادن لایه‌ها بدست آورد. از طرف دیگر معادلات حاکم بر رفتار ماده مرکب در حالت کلی به دلیل زیاد بودن مولفه‌های ماتریس‌های سختی بسیار پیچیده بوده و جز در شرایط خاص نمی‌توان آن‌ها را به صورت تحلیلی حل نمود. از این رو با در نظر گرفتن بعضی از شرایط خاص به ساده سازی معادلات حاکم پرداخته می‌شود تا بتوان این گونه معادلات را به صورت تحلیلی نیز حل نمود. در این مقاله صفحه مرکب به صورت ارتوتروپیک در نظر گرفته شده است. در یک صفحه ارتوتروپیک افزون بر تقارن لایه‌ها نسبت به صفحه میانی، دو صفحه تقارن عمود بر هم دیگر نیز وجود دارد. به دلیل تقارن‌های موجود، مولفه‌های A_{16} و A_{26} از ماتریس سختی محوری $[A]$ ، مولفه‌های D_{16} و D_{26} از ماتریس سختی خمشی $[D]$ و همه مولفه‌های سختی کوپل کننده خمشی و محوری $[B]$ برابر صفر خواهند بود. در صورتی که برای یک ماده مرکب چندلایه سه شرط فوق برقرار باشد آن ماده مرکب مشابه مواد ارتوتروپیک رفتار خواهد کرد.

در شکل (۳) آرایش شبه ایزوتروپیک $(0/+45/-)n$ همان ماده مرکب قبلی مورد مطالعه قرار گرفته است. نتایج بدست آمده مشابه شکل (۲) می باشد. در این شکل نیز با تکرار آرایش یاد شده، ماده مرکب به ماده ارتوتروپیک نزدیک می شود.



شکل ۳ تاثیر تکرار $(0/\pm 45/90)$ بر مولفه های ماتریس سفتی B

بررسی درستی و دقت روش حل

قبل از ارائه نتایج لازم است که صحت و میزان دقت روش حل و برنامه رایانه ای نوشته شده مورد تأیید قرار گیرد. برای این منظور دو صفحه (همسانگرد و ماده مرکب) با شرایط مرزی و بارگذاری متفاوت در نظر گرفته شده و نتایج حل تحلیلی یا حل ارائه شده در مراجع دیگر، با حل حاضر مقایسه می گردد.

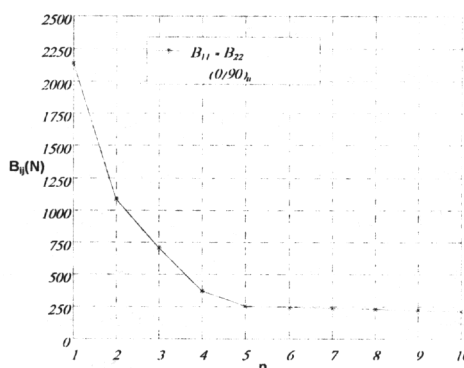
جدول (۱) نتایج مربوط به یک صفحه گیردار مربعی از جنس فولاد را ارائه می دهد. صفحه فوق تحت تاثیر بار فشاری داخل صفحه $K_x=K_y$ قرار دارد. فرکانس بی بعد بدست آمده از حل حاضر با مقادیر ارائه شده در مرجع [12] و مقادیر ارائه شده در مرجع [12] نتایج خود را با آن مقایسه نموده، ارائه شده است. مشاهده می شود که روش حاضر فرکانس بی بعد صفحه فوق را با اختلاف کمتر از 0.7% محاسبه می نماید. توضیحات جامع تر همراه با

می توان نشان داد که با افزایش تعداد لایه های ماده مرکب دلخواه (به عنوان مثال صلیبی Cross-ply یا زاویه دار Angle-ply) رفتار فرکانسی آنها به رفتار فرکانسی صفحه ارتوتروپیک ساخته شده از همان ماده نزدیک می شود. در واقع افزایش تعداد لایه های مواد مرکب تاثیر عوامل کوپلینگ در ماتریس های A، B و D را کاهش داده و فرض ارتوتروپیک بودن صحیح تر و درصد خطا کمتر خواهد بود.

شکل های (۲) و (۳) نحوه تغییرات مولفه ماتریس [B] با توجه به تعداد لایه های ماده مرکب Graphite/Epoxy با چیدمان صلیبی و شبه همسانگرد را نشان می دهند. خواص ماده مرکب T300/5208 (Graphite /Ep) عبارتند از:

$$E1=181 \text{ Gpa}, E2=10.3 \text{ Gpa}, G12=7.17 \text{ Gpa}, \\ \nu_{12}=0.28, \rho=1600 \text{ kg/m}^3$$

شکل (۲) به بررسی آرایش لایه ای $(0/90)_n$ از ماده مرکب می پردازد. نتایج نشان می دهد که مولفه های B_{66} ، B_{26} ، B_{16} ، B_{12} ، D_{26} ، D_{16} ، A_{26} ، A_{16} حالات (تعداد لایه ها) برابر صفر هستند. تغییر مولفه های دیگر در شکل (۲) مورد مطالعه قرار گرفته است. همانطور که دیده می شود با تکرار آرایش فوق مقادیر B_{22} و B_{11} نیز به سمت صفر همگرا شده و ماده مرکب به ماده ارتوتروپیک نزدیک خواهد شد.



شکل ۲ تاثیر تکرار $(0/90)$ بر مولفه های ماتریس سفتی B

$\Omega^2 = 3.5651$ بدست خواهد آمد. با مقایسه این دو مقدار فرکانس پایه مشاهده می شود که روش حاضر فرکانس بی بعد صفحه ارتوتروپیک را با حدود 0.15% خطا نسبت به روش تحلیلی محاسبه می نماید که نماینگر دقت خوب روش حاضر می باشد. خاطر نشان می سازد که با توجه به نحوه بدست آوردن روابط مورد نیاز، روش حاضر توانایی بدست آوردن پاسخ صفحه ارتوتروپیک با شرایط مرزی دلخواه (قید پیچشی) و بارگذاری فشاری داخل صفحه را که در حالت کلی فاقد حل تحلیلی است، دارا می باشد.

بحث و نتیجه گیری

با توجه به تأیید درستی جواب های روش ارائه شده، اثر پارامترهای گوناگون در رفتار ارتعاشی صفحات تحت مستطیلی مورد بررسی قرار گرفته است [13]. در مطالعه حاضر نمودارهای ارائه شده بر حسب پارامترهای عمومی A (معادله ۶) و B (معادله ۷) بدست آمده اند. این مطالعه محدوده وسیعی از صفحات تحت ساخته شده از مواد مرکب چندلایه با چیدمان های متنوعی را شامل می شود که دارای شرایط مرزی مختلف همراه با بار فشاری داخل صفحه می باشند.

رابطه بین پارامترهای A و B که نماینگر مشخصات فیزیکی و پاسخ (فرکانس و بار فشاری داخل صفحه) می باشند برای سه فرکانس اول صفحه در شکل (۴) خلاصه شده است. این شکل بیانگر تمام شرایط مرزی ($0 < q_x < \infty$) و همچنین ($0 < q_y < \infty$) با حضور نیروهای فشاری داخل صفحه (N_x, N_y) را نشان می دهد. پاسخ هر حالت مورد نیاز از صفحه را می توان با استفاده از این نمودار بدست آورد. به عنوان مثال، با مشخص بودن ابعاد، شرایط مرزی و خواص ماده سازنده صفحه مقدار عددی پارامتر A قابل

حل اجزا محدود بوسیله نرم افزار Ansys در مرجع [13] ارائه شده است.

جدول ۱ مقایسه فرکانس بی بعد صفحه مربعی گیردار ($q_x = q_y = \infty$) تحت بار فشاری داخل صفحه

مرجع	Ω^2	درصد اختلاف Ω
[12]	37.42	0.65%
مرجع [8] از مرجع [12]	36.94	-
حل حاضر	37.44	0.68%

به عنوان مثال دوم رفتار ارتعاشی صفحه ارتوتروپیک از جنس T300/5208 (Graphite Epoxy) در نظر گرفته شده است. نسبت ابعاد صفحه $R=0.75$ فرض می شود.

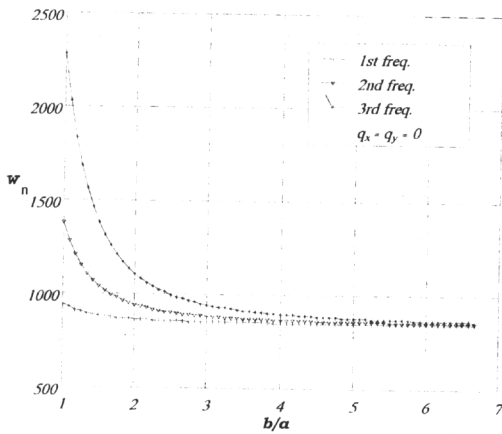
حل تحلیلی فرکانس ارتعاشی صفحه ارتوتروپیک بدون بار داخل صفحه ($K_x=K_y=0$) با شرایط مرزی ساده ($q_x = q_y = 0$) به صورت زیر می باشد [10].

$$\omega^2 = \frac{\pi^4}{a^4 \rho_m} [D_{11} m^4 + 2H_1 m^2 n^2 R^2 + D_{22} n^4 R^4] \quad (15)$$

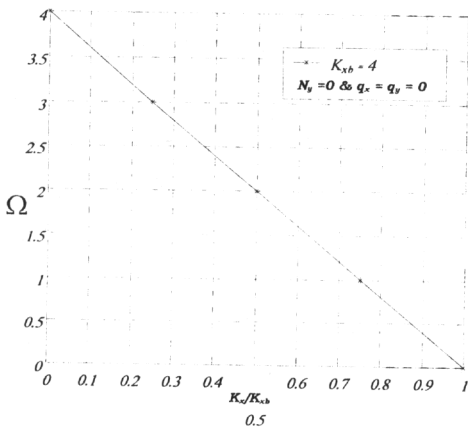
m, n شماره نیم موج ها در راستای x, y و $R = \frac{a}{b}$ نسبت اضلاع صفحه می باشند. با توجه به خواص ماده و ابعاد صفحه فوق، از معادله (۱۵) مقدار بی بعد فرکانس پایه ($m=n=1$) برابر با $\Omega^2 = 3.5547$ بدست می آید.

بر اساس روش ارائه شده در مقاله، مقدار پارامتر A برای صفحه فوق از رابطه (۶) برابر با $A=0.1067$ خواهد شد. برای این مقدار A و $q_x = q_y = 0$ مقدار $B=1.11$ بدست می آید. با قرار دادن مقدار B در رابطه (۷) و معلوم بودن مشخصات صفحه، مقدار

ارتعاشی صفحه ارتوتروپیک را نشان می دهد. در این نمودارها به عنوان نمونه، مقدار پارامتر $A=15$ در نظر گرفته شده است. همانگونه که آورده شد پارامتر A تابعی از نسبت اضلاع R ، خواص ماده سازنده صفحه (D_{11} , H_1) و مقدار ضریب پیچشی فنرها می باشد. از اینرو مقدار ارائه شده $A=15$ محدوده وسیعی از مواد مرکب و همسانگرد با شرایط مرزی متنوع را شامل می شود.



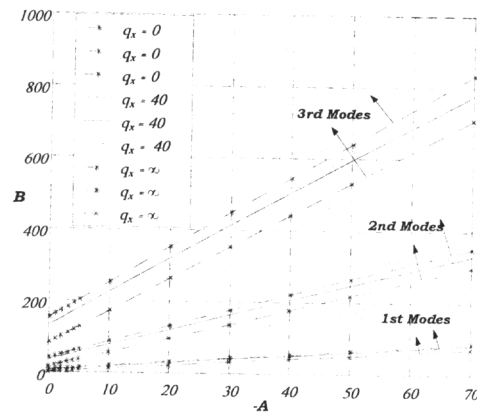
شکل ۶ اثر نسبت اضلاع بر فرکانس های اولیه ماده مرکب.



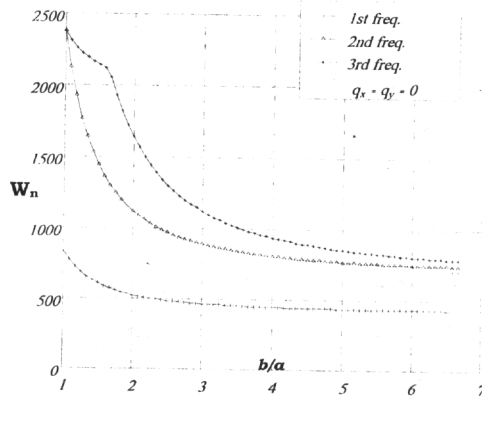
شکل ۷ رابطه نیروی فشاری در راستای x و فرکانس ($N_y=0$).

محاسبه خواهد بود. با مشخص شدن مقدار A ، با استفاده از نمودار شکل (۴) مقدار پارامتر B مربوط به هر شکل مد و در نتیجه پاسخ مورد نظر که می تواند فرکانس ارتعاشی یا بار اعمالی مجاز باشد، بسادگی بدست خواهد آمد. با توجه به نمودار فوق کاملاً روشن است که رابطه بین A و B برای سه فرکانس اول صفحه یک رابطه خطی است.

شکل های (۵) تا (۸) تاثیر پارامترهای مختلف در رفتار



شکل ۴ تغییرات پارامتر B بر حسب پارامتر A .

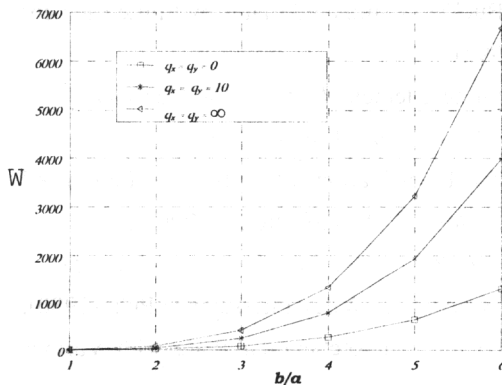


شکل ۵ اثر نسبت اضلاع روی فرکانس های اولیه ماده همسانگرد

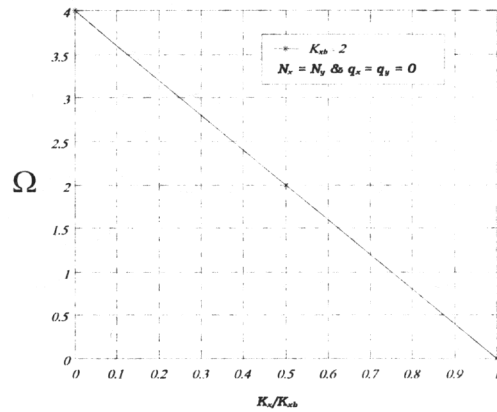
در شکل (۹) اثر تغییرات شرایط مرزی از تکیه گاه ساده تا تکیه گاه گیردار بر فرکانس طبیعی پایه بر حسب عکس نسبت اضلاع بررسی شده است. مشاهده می شود با نزدیک شدن به شرایط تکیه گاه گیردار فرکانس طبیعی بی بعد افزایش می یابد. شدت بروز این رفتار با کاهش نسبت اضلاع بیشتر می باشد.

در این مقاله ابتدا با اعمال شرایط مرزی الاستیک پیچشی به معادله حاکم بر ارتعاشات صفحات ارتوتروپیک که تحت تاثیر بار فشاری داخل صفحه قرار دارد، معادله فرکانسی صفحه مشخص گردید. سپس، روش حل عددی مناسب برای معادله فرکانسی مطرح شد و در نهایت با استفاده از نتایج حل عددی، نمودارهای لازم برای بررسی بدست آمد. با توجه به نمودارهای بدست آمده، مشاهده می شود که افزون بر فرکانس طبیعی صفحات با شرایط مرزی ساده و گیردار، شرایط مرزی بینابین را نیز می توان محاسبه نمود.

در ادامه به عنوان ارائه پیشنهاد برای کارهای آینده می توان به شرایط مرزی فوق تکیه گاههای الاستیک در راستای قائم را اضافه نمود. همچنین امکان استفاده از روش فوق برای بدست آوردن پاسخ صفحات مرکب چند لایه در حالت کلی نیز می تواند مورد بررسی قرار گیرد.



شکل ۹ اثر شرایط مرزی و نسبت اضلاع بر فرکانس طبیعی



شکل ۸ تاثیر نیروی فشاری (N_y=N_x) بر فرکانس طبیعی

در شکل های (۵)، (۶) اثر نسبت اضلاع بر فرکانس طبیعی در ماده همسانگرد و مرکب بررسی شده است. مشاهده می شود برای صفحه مربعی شکل $a=b$ ساخته شده از ماده همسانگرد فرکانس های دوم و سوم با هم یکی می شوند، در صورتی که در ماده مرکب به دلیل خواص جهتی آن در این حالت فرکانس های دوم و سوم با هم یکی نیستند و کاملاً از یکدیگر جدا می باشند.

شدت همگرایی فرکانس ها در ماده مرکب بیشتر از ماده همسانگرد است. از طرف دیگر مشاهده می شود که با افزایش نسبت $\frac{b}{a}$ (صفحه به نوار تبدیل می شود) افزون بر کاهش مقادیر، فرکانس ها به یکدیگر نزدیک میشوند.

شکل های (۷)، (۸) اثر اعمال نیروهای فشاری عرضی را بر روی فرکانس ارتعاشی صفحه نشان می دهند. در این شکل ها منظور از Kx بار فشاری اعمالی و Kxb بار بحرانی بی بعد صفحه است که برای هر صفحه با استفاده از پارامترهای A و B و برابر صفر قرار دادن فرکانس بی بعد (Ω^2) دست می آید. همانطور که نیروهای عرضی به نیروی بحرانی نزدیک می شوند فرکانس های طبیعی به سمت صفر میل می کنند.

w	خیز صفحه در راستای قائم
a, b, h	طول و عرض و ضخامت صفحه
ρ	جرم حجمی
t	زمان
X''', X'', X'	مشتقات مرتبه های مختلف نسبت به $(\frac{a}{x})$
A_4, A_3, A_2, A_1	ضرایب معادله مشخصه
m_4, m_3, m_2, m_1	ریشه های معادله مشخصه.

فهرست نشانه‌ها

A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}	اعضای ماتریس‌های سفتی ماده مرکب
N_x, N_y	نیروهای عرضی (داخل صفحه) بر واحد طول
q_x, q_y	ضرایب قیود پیچشی
θ_x, θ_y	ثابت فنری فنرهای پیچشی (الاستیکی).
A	پارامتر معادل مشخصات فیزیکی صفحه
B	پارامتر معادل مشخصات فرکانسی صفحه
Ω, ω_n	فرکانس طبیعی و فرکانس بی بعد

مراجع

1. Sloss, J.M. , Sadek, I. S., Bruch Jr., J.C., and Adali S., "Design/Control Optimization of Cross-Ply Laminates Under Buckling and Vibration", *Journal of Aerospace Engineering*, Vol.5 , No.1, (1992).
2. Koichi Maruyama, Yoshihiro Narita, and Osamu Ichinomiya, "Comparison of Experimental And Analytical Results For Free Vibration of Laminated Composite Plates", PVP-Vol.302, PP.9-13 , Composites For The Pressure Vessel Industry , ASME (1995).
3. Osamu Ichinomiya , Koichi Maruyama, and Kouji Sekine, " Vibration Analysis of Rectangular Sandwich Plates Resting On Some Elastic Point Supports," PVP-Vol.302 ,PP.2 1-26 , *Composites For The Pressure Vessel Industry* , ASME (1995).
4. Rakesh K . Kapania, and Andrew E . Lovejoy, "Free Vibration of Thick Generally Laminated Cantilever quadrilateral Plates," *AIAA Journal*, Vol.34, No.7 , pp.1474 – 1486 , (1996).
5. Andrew E. Lovejoy and Rakesh K. Kapania, "Free Vibration of Thick Generally Laminated Quadrilateral Plates With Point Supports," *Proceeding of 37th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC, SDM Conference*, PP 248-259,(1996).
6. Murphy, K.D., Virgin, L. N., and Rizzi, S.A., "The Effect of Thermal Prestress On The Free Vibration Characteristics of Clamped Rectangular Plates : Theory and Experiment," *Journal of Vibration and Acoustics*, Vol.119, (1997).
7. Le-Chung Shiau and Teng-Yuan Wu. J, "Free Vibration of Buckled Laminated Plates by Finite Element Method ," *Journal of Vibration and Acoustics*, Vol.119, (1997).
8. Yucheng shi , Raymond Y,Y.Lee, and Chuh Mei, " Finite Element Method for Nonlinear Free Vibrations of Composite Plate," *AIAA Journal*, Vol.35, No .1 , pp.159 – 166 , (1997).
9. Chien-Ching Ma, and Chan-Chiao Lin, " Experimental Investigation of Vibrating Laminated Composite Plates By Optical Interferometry Method," *AIAA Journal*, Vol.39, No .3 , (2001).
10. Whitney, J. M, " *Structural Analysis of Laminated Anisotropic Plates*," Technomic Pub. Co., (1987).
11. Reismann, H., and Pawlik, P.S., " *Elasticity, Theory and Application*," Wiley Interscience Pub. (1980).
12. Weeks & Shideler J.L., "Effect of Edge Loading on Vibration of Rectangular Plate with Various B.C'S", NASA TN-D-2815, (1985).

۱۳. اسماعیلی، جلیل، " بررسی رفتار اثرالاستیک صفحه‌ای از جنس مواد مرکب". پایان نامه کارشناسی ارشد مکانیک گرایش طراحی کاربردی، دانشکده مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد، (۱۳۸۰).