

می‌گیرد. تصویر باینری X و عنصر سازنده B را دو زیر مجموعه در فضای اقلیدسی یا دیجیتال E در نظر بگیرید؛ همچنین فرض کنید موقعیت مبدا در این فضا را o و انتقال یافته B به نقطه p را B_p بنامیم. در این صورت دو عمل پایه مورفولوژی ریاضی که "گسترش (Dilation)" (\oplus) و "سایش (Erosion)" (\ominus) نامیده می‌شوند، با رابطه‌های زیر تعریف می‌گردند:

$$X \oplus B = \{x + b | x \in X, b \in B\} = \bigcup_{b \in B} X_b \quad (1)$$

$$X \ominus B = \{z \in E | B_z \subseteq X\} = \bigcap_{b \in B} X_{-b} \quad (2)$$

همه تبدیل‌های مورفولوژیک، از جمله اسکلت مورفولوژی [11]، گسترش و سایش ژنودزیک [9] و...، بر اساس این دو عمل تعریف می‌گردند. نتیجه دو عمل متوالی سایش و گسترش توسط عنصر سازنده B به X را "گشایش (Opening)" (\circ) و اعمال متوالی گسترش و سایش توسط عنصر سازنده B به X را "بستن (Closing)" (\bullet) می‌نامیم:

$$X \circ B = (X \ominus B) \oplus B \quad (3)$$

$$X \bullet B = (X \oplus B) \ominus B \quad (4)$$

گشایش و بستن مورفولوژیک دارای خواص زیر هستند [10-9]:

$$X \circ B \subset X \quad (5)$$

$$X \bullet B \supset B \quad \text{و}$$

$$X \subset Y \Rightarrow X \bullet B \subset Y \bullet B, X \circ B \subset Y \circ B \quad (6)$$

$$(X \bullet B) \bullet B = X \bullet B, (X \circ B) \circ B = X \circ B \quad (7)$$

همان‌گونه که قبلاً نیز آورده شد، مورفولوژی ریاضی در آغاز برای تصاویر (سیگنال‌های) باینری مطرح شد. سپس تعمیم‌هایی برای این ابزار در حالت تصاویر چند سطحی ارائه گردید. یکی از متداولترین

مقدمه

نمایش و تجزیه هرمی، روشی شناخته شده در کدگذاری تصویر است که موضوع بحث مقالات زیادی قرار گرفته است [1-8]. در تجزیه هرمی تصویر به صورت دنباله‌ای از تصاویر با جزییات متفاوت بیان می‌گردد. تصویر هر لایه با نمونه برداری از تصویر لایه بالاتر حاصل می‌شود. در بین هرم‌های موجود، هرم مورفولوژیک از کارایی بالاتری برخوردار است [5-6]. مورفولوژی ریاضی ابزار مناسبی برای استفاده در یک ساختار هرمی است چرا که بر خلاف روش‌های خطی (نظیر هرم گوسی یا لاپلاسی [8]) برخوردی هندسی و نه جبری با تصویر دارد و از این رو برای استخراج ساختارهای هندسی تصویر کاملاً مناسب می‌باشد.

در این مقاله، ما ابتدا به مرور مورفولوژی ریاضی می‌پردازیم و سپس تعدادی از هرم‌های موجود را معرفی می‌کنیم. در بخش ۲ یک روش جدید نمونه‌برداری مورفولوژیک، که آن را نمونه برداری مورفولوژیک از سایه می‌نامیم، ارائه می‌دهیم و خواص آن را بررسی می‌نمائیم. بخش ۳ به توصیف یک شمای هرمی مبتنی بر روش نمونه برداری ارائه شده، اختصاص دارد. پیاده سازی و ارائه نتایج عملی در بخش ۴ صورت خواهد گرفت و در پایان، نتیجه‌گیری و جمع بندی ارائه خواهد گردید.

تبدیل‌های مورفولوژیک

مورفولوژی ریاضی [9-10] که نخستین بار در سال ۱۹۶۴ توسط آقایان سرا و ماترون برای تصاویر باینری مطرح گردید، روشی مبتنی بر تئوری مجموعه‌ها برای تجزیه و تحلیل ساختارهای هندسی تصاویر است. این تجزیه و تحلیل در تصاویر باینری با توصیف تصویر توسط یک الگوی مشخص که آن را عنصر سازنده می‌نامیم و در سرتاسر تصویر جا به جا می‌کنیم، صورت

می‌کنیم و سیگنال خطا را به عنوان خروجی این لایه هرم در نظر می‌گیریم. تصویر نمونه برداری شده، تصویر لایه بعدی هرم را تشکیل می‌دهد. اگر هدف از این تجزیه، استفاده در کدگذاری تصویر باشد، کافی است سیگنال خطای لایه‌های مختلف هرم و نمونه‌های مربوط به آخرین لایه را ارسال نمائیم. از آنجا که روش بازسازی برای گیرنده معلوم است، گیرنده می‌تواند با دریافت این سیگنال‌ها، تصویر دریافتی را بازسازی کند. با توجه به اینکه در این روش از اطلاعات پیش مفروض (A priori information) استفاده گردیده است (اطلاعات مربوط به روش بازسازی)، می‌توان امیدوار بود که به کارگیری این روش منجر به کاهش نرخ بیت گردد. دو عمل اصلی در این روش، نمونه برداری و بازسازی می‌باشند. بر اساس روش نمونه برداری و بازسازی، شماهای هرمی متفاوتی حاصل گردیده اند که در ادامه به یادآوری تعدادی از پرکاربردترین آنها می‌پردازیم؛ اما قبل از آن نمادهایی را که در بحث بکار می‌گیریم معرفی می‌کنیم:

تصویر ورودی: $I(x, y): (x, y) \in Z^2$

زیر تصویر k ام: $I_k(x, y): k = 0, 1, \dots, K$

(تصویر ورودی لایه $k+1$ ام) $(I_0(x, y) = I(x, y))$ اپراتور نمونه بردار: Ψ_e

$(I_{k+1}(x, y) = \Psi_e(I_k(x, y)))$

تصویر بازسازی شده در لایه k ام هرم: $\hat{I}_k(x, y)$

اپراتور بازسازی: $\Psi_r: \hat{I}_k(x, y) = \Psi_r(I_{k+1}(x, y))$ و نهایتاً

تصویر خطای لایه k ام: $E_k(x, y) = I_k(x, y) - \hat{I}_k(x, y)$

هرم گوسی. در این هرم که توسط بروت و ادلسون در سال ۱۹۸۳ ارائه گردیده است [8]، اپراتور نمونه برداری به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$I_{k+1}(x, y) = \Psi_e(I_k(x, y)) = I_k(Nx, Ny) \quad (12)$$

این تعمیم‌ها، روش ارائه شده بر پایه مفهوم "سایه (Umbra)" تابع توسط اشتنبرگ [12] است. می‌توان به هر تابع $F: R \rightarrow E^n$ ، یک مجموعه $U(F) \subset E^n \times R$ بر اساس رابطه زیر نسبت داد که آن را سایه تابع می‌نامیم:

$$U(F) = \{(X, z): X \in D(F), z \in R \wedge z \leq F(X)\} \quad (8)$$

$$F(X) = \text{Max}_z U(F) \quad (9)$$

در واقع سایه مجموعه تمامی نقاط زیر منحنی می‌باشد. اشتنبرگ سایه تصویر چند سطحی (سیگنال دوبعدی) را به عنوان یک تابع باینری ۳ بعدی در نظر گرفت و بدین ترتیب مورفولوژی ریاضی را به تصاویر غیر باینری تعمیم داد [12]. نتیجه این تعمیم به صورت زیر است:

$$U(E(F, B)) = U(F) \ominus U(B) \quad (10) \text{ (سایش)}$$

$$\Rightarrow E(F, B) = \text{Min}_Y [F(X - Y) - B(-Y)]$$

$$U(D(F, B)) = U(F) \oplus U(B) \quad (11) \text{ (گسترش)}$$

$$\Rightarrow D(F, B) = \text{Max}_Y [F(X - Y) + B(Y)]$$

عملیات گشایش و بستن نیز در این حالت نظیر روابط ۳ و ۴ توسط سایش (گسترش) و گسترش (سایش) متوالی تعریف می‌شود.

مورفولوژی ریاضی به لحاظ توانایی در استخراج ساختارهای هندسی در تصویر، در فشرده‌سازی تصویر مورد توجه قرار گرفته است. در بین روش‌های فشرده سازی مبتنی بر مورفولوژی ریاضی می‌توان از الگوریتم اسکلت [11]، هرم‌های مورفولوژیک [1-7] و نمونه برداری غیر یکنواخت مورفولوژیک [13] نام برد.

تجزیه هرمی تصویر

در تجزیه هرمی، در هر لایه هرمی، از تصویر نمونه برداری کرده سپس از روی نمونه‌ها تصویر را بازسازی

گسسته S (شبکه نمونه برداری) که شرایط زیر را ارضا می‌کند، انجام می‌شود:

$$\begin{aligned} 1: S \oplus S &= S \\ 2: S &= \bar{S} \\ 3: K \cap S &= \{0\} \\ 4: K &= \bar{K} \\ 5: a \in K_b &\Rightarrow K_a \cap K_b \cap S \neq \emptyset \end{aligned} \quad (16)$$

تابع نمونه برداری در این روش برابر است با:

$$\Psi_e(I) = I \cap S \quad (17)$$

آنها برای بازسازی دو روش (تابع) پیشنهاد کردند. در روش اول، بازسازی با انجام گسترش مورفولوژیک توسط عنصر سازنده K روی تصویر نمونه برداری شده صورت می‌گیرد:

$$\hat{I} = D((I \cap S), K) \quad (18)$$

هارالیک نشان داد که این روش بازسازی خواص زیر را داراست:

$$\begin{aligned} E(I, K) &\leq \hat{I} \leq D(I, K) \\ \hat{I} &= \hat{I} \\ I_1 \leq I_2 &\Rightarrow \hat{I}_1 \leq \hat{I}_2 \\ \hat{I} &\geq I \circ K \\ \text{if } I &= I \circ K \Rightarrow I \leq \hat{I} \leq D(I, K) \end{aligned} \quad (19)$$

آخرین خاصیت بیانگر این نکته است که فقط در صورتی که $I = I \circ K$ باشد علامت سیگنال خطا همواره منفی خواهد بود. اگر چه این خاصیت بسیار مطلوب است چرا که نیاز به ارسال علامت خطا نمی‌باشد، اما شرط فوق در عمل برقرار نمی‌باشد.

در روش پیشنهادی دوم، هارالیک، بستن مورفولوژیک تصویر نمونه برداری شده توسط K را به عنوان بازسازی در نظر گرفت:

$$\hat{I} = (I \cap S) \bullet K \quad (20)$$

این روش بازسازی خواص زیر را داراست:

در اینجا N ضرب نمونه برداری است که معمولاً در نظر گرفته می‌شود. اپراتور بازسازی یک فیلتر خطی و تغییر ناپذیر با شیفیت است که پاسخ نمونه واحد آن به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} h(m, n) &= \hat{h}(m) \times \hat{h}(n) \quad (13) \\ \hat{h}(m) &= \begin{cases} 0,4 & m = 0 \\ 0,25 & m = \pm 1 \\ 0,05 & m = \pm 2 \\ 0 & \text{other} \end{cases} \quad \text{و} \end{aligned}$$

پاسخ نمونه واحد لایه k ام برابر است با:

$$h_k(2^k m, 2^k n) = \begin{cases} h(m, n) & -2 \leq m, n \leq 2 \\ 0 & \text{other} \end{cases} \quad (14)$$

به عبارت دیگر تصویر بازسازی شده برابر است با:

$$\begin{aligned} \hat{I}_k(x, y) &= \Psi_r(I_{k+1}(x, y)) \\ &= 4 \times \sum_m \sum_n h_k(2^k m, 2^k n) I_{k+1} \\ &\quad (x - 2^k m, y - 2^k n) \end{aligned} \quad (15)$$

همان گونه که از روابط مشخص است در این حالت عمل بازسازی تصویر از روی نمونه‌ها، در واقع یک پیشگویی خطی (Linear prediction) است. دستیابی به نتایجی بهتر، با استفاده از پیشگویی غیر خطی امکان پذیر است. بر اساس مقاله تووت [2]، در چارچوب استفاده از پیشگوهای غیر خطی، فیلترهای مورفولوژیک مناسبترین انتخاب هستند و به نتایجی بهتر از فیلترهای خطی منجر می‌شوند. در ادامه ما دو نوع هرم مبتنی بر فیلترهای مورفولوژیک را مرور می‌کنیم.

هرم مورفولوژیک تووت. در سال ۱۹۸۹ هارالیک و همکارانش یک روش نمونه برداری و بازسازی مبتنی بر مورفولوژی ریاضی ارائه دادند [1]. این نمونه برداری توسط یک عنصر سازنده K و یک زیر مجموعه

$$\forall (i, j) \in \text{support } I_k \quad (25)$$

خاصیت ۲ - همانی :

$$\hat{I} = \hat{I} \quad (26)$$

خاصیت ۳ - غیرگسترشی بودن :

$$\Psi[I_k(i, j)] \leq I_k(i, j) \quad \forall (i, j) \in \text{support } I_k \quad (27)$$

خاصیت ۴ - فاکتورپذیری (Factorability): اپراتورهای Ψ_e و Ψ_r وجود دارند به قسمی که:

$$\Psi(\cdot) = \Psi_r[\Psi_e(\cdot)] \quad (28)$$

خاصیت اول مبین این نکته است که اپراتور تخمین ترتیب را حفظ می‌کند به عبارت دیگر، تخمین تصویر روشنتر، روشنتر از تخمین تصویر تاریکتر است. خاصیت دوم، بهینه بودن اپراتور تخمین را از دیدگاه کاربرد در شمای هرمی بیان می‌دارد. بر اساس مرجع [14]، منحصراً فیلترهای مورفولوژیک هر دو خاصیت ۱ و ۲ را دارا هستند (هرچند که این مورد به یک فیلتر مورفولوژیک خاص منحصر نمی‌باشد). خاصیت سوم، غیر منفی بودن سیگنال خطا را تضمین می‌کند که این نیز به نوبه خود کاهش محدوده دینامیکی سیگنال خطا و در نتیجه کاهش آنتروپی آن را به دنبال دارد. خاصیت چهارم، در واقع شرط لازم برای قابل استفاده بودن روش تخمین در یک شمای هرمی و تحقق پذیری آن است. در بین روش‌های موجود، روش هرمی ارائه شده توسط هژمان و تووت تنها روشی است که هر چهار شرط فوق را ارضا می‌کند (هرم ارائه شده توسط بروت و آدلسون تنها دو شرط اول و چهارم و هرم تووت سه شرط ۱، ۲ و ۴ را ارضا می‌کنند). از این رو، کونگ و گوتسیاس نتیجه می‌گیرند که هرم هژمان-تووت بهترین هرم موجود است و نظر خود را با ارائه نتایج عملی تایید می‌کنند [5].

در ادامه، روشی جدید برای نمونه برداری و بازسازی ارائه خواهیم داد که هر چهار شرط مورد بحث را ارضا می‌کند و از کارایی بالاتری نسبت به هرم هژمان-تووت (و

$$E(I, K) \leq (I \cap S) \bullet K \leq D((I \cap S), K) \leq D(I, K)$$

$$[(I \cap S) \bullet K] \cap S = I \cap S$$

$$I_1 \leq I_2 \Rightarrow \hat{I}_1 \leq \hat{I}_2 \quad (21)$$

بر پایه این روش نمونه برداری و بازسازی، تووت در سال ۱۹۸۹ روشی برای تجزیه هرمی ارائه کرد [2].

هرم مورفولوژیک ارائه شده توسط هژمان و تووت. در سال ۱۹۹۱ هژمان و تووت روشی دیگر برای نمونه برداری و بازسازی مورفولوژیک ارائه دادند [3-6]. آنها به جای نمونه برداری از خود تصویر، از سایش تصویر (توسط K) نمونه برداری کردند (به نکته ۲-۳ در مرجع [۳] مراجعه شود):

$$\Psi_e(I_k(x, y)) = E(I_k, K) \cap S \quad (22)$$

که بازسازی توسط رابطه زیر صورت می‌گیرد:

$$\begin{aligned} \hat{I}_k &= \Psi_r(I_{k+1}) \\ &= \text{Sup}\{E(I_k, K) \cap S \mid s \in \bar{K}_x \cap S\} \end{aligned} \quad (23)$$

هژمان نشان داد که این روش نمونه برداری و بازسازی غیر افزایشی (Increasing)، همانی (Idempotent) و غیرگسترشی (Anti-extensivity) است، یعنی:

$$\begin{aligned} I_k \leq I'_k &\Rightarrow \hat{I}_k \leq \hat{I}'_k \\ \hat{I}_k &= \hat{I}_k \\ \hat{I}_k &\leq I_k \end{aligned} \quad (24)$$

همان‌گونه که قبلاً آورده شد، کارایی روش هرمی به اپراتور تخمین ($\Psi(\cdot) = \Psi_r[\Psi_e(\cdot)]$) بستگی دارد. کونگ و گوتسیاس [۵] در مقاله خویش مقایسه‌ای بین کارایی روش‌های مختلف تجزیه هرمی ارائه می‌دهند. بر اساس نتیجه این مقاله، اپراتور تخمین بهینه به منظور کاربرد در شمای هرمی، اپراتوری است که چهار خاصیت زیر را دارا باشد:

خاصیت ۱ - افزایشی بودن :

$$I_k(i, j) \leq J_k(i, j) \Rightarrow \Psi[I_k(i, j)] \leq \Psi[J_k(i, j)]$$

سیگنال نمونه برداری فشرده شده شکل (۱-f) برابر است با:

$$F_S^C = \text{Max}_Z (\text{comp}(U_{S,K}(F))) \quad (۳۲)$$

شکل (۲) مثال دیگری از الگوریتم ارائه شده را نشان می‌دهد. در این شکل، تصویر 8×8 ورودی شکل (۲-الف) توسط عنصر سازنده 2×2 شکل (۲-ج) و به دو روش هژمان-تووت و روش ارائه شده، نمونه برداری می‌شود. شبکه نمونه برداری در مورد روش اول، شبکه مربعی $S_1 = (2Z)^2$ شکل (۲-ب) و در مورد روش پیشنهادی شبکه مکعبی $S_2 = (2Z)^3$ می‌باشد. شکل (۲-د)، سایش تصویر ورودی توسط عنصر سازنده را نشان می‌دهد. در روش هژمان-تووت نمونه‌ها از ضرب تصویر سائیده در شبکه نمونه برداری به دست می‌آیند شکل (۲-ه). اما در مورد روش پیشنهادی، با توجه به بعد سوم نمونه برداری، سطح خاکستری نمونه‌ها عددی زوج خواهد بود (بزرگترین عدد زوج کوچکتر یا مساوی مقدار سطح خاکستری موقعیت نمونه). تصویر نمونه برداری شده توسط روش پیشنهادی در شکل (۲-و) نمایش داده شده است. زوج بودن سطح خاکستری نمونه‌ها، امکان فشرده سازی را در جهت سوم برای تصویر ورودی لایه بعدی هرم فراهم می‌سازد. این مطلب در شکل (۲-ط) مشهود می‌باشد. دقت شود که در این شکل، سطح خاکستری نمونه‌ها و در نتیجه محدوده دینامیکی آن‌ها نصف گردیده است. برای تبیین این تفاوت، تصاویر مربوط به چهار لایه اول هرم‌های هژمان-تووت و پیشنهادی، در مورد تصویر "دختر بچه" در شکل (۳) به نمایش درآمده‌اند.

خواص نمونه برداری از سایه

خواص مهم روش نمونه برداری ارائه شده را در قالب سه قضیه زیر ارائه می‌نماییم:

در نتیجه هرم‌های موجود (برخوردار است که البته این مطلب با ارائه نتایج عملی نیز نشان داده خواهد شد.

نمونه برداری از سایه

گیریم $S \subset Z^{n+1}$ یک مجموعه گسسته و $K \subset Z^n$ یک عنصر سازنده با خصوصیات زیر باشند:

$$\forall s \in S \Rightarrow S_s = S - 1$$

$$S_1 = S \cap Z^n \quad \text{که در اینجا } K \cap S_1 = \{0\} - 2$$

$$-3 \quad a \in K_b \Rightarrow K_a \cap K_b \cap S_1 \neq \emptyset \quad \text{انتقال یافته } K \text{ حول نقطه } a \text{ است}$$

$$-4 \quad \bigcup_{s \in S} (U(K))_s = U(K) \oplus S = R^{n+1}$$

شرط اول بیانگر یکنواختی شبکه نمونه برداری است. شرط دوم بیان می‌کند که شبکه نمونه برداری و عنصر سازنده دارای نقطه مشترک $\{0\}$ ، یعنی مبدا مختصات هستند. دو شرط ۳ و ۴ بیان می‌نمایند که کل فضا توسط شبکه نمونه برداری و عنصر سازنده قابل پوشش است.

در این صورت سایه نمونه برداری شده را با رابطه‌های زیر تعریف می‌کنیم:

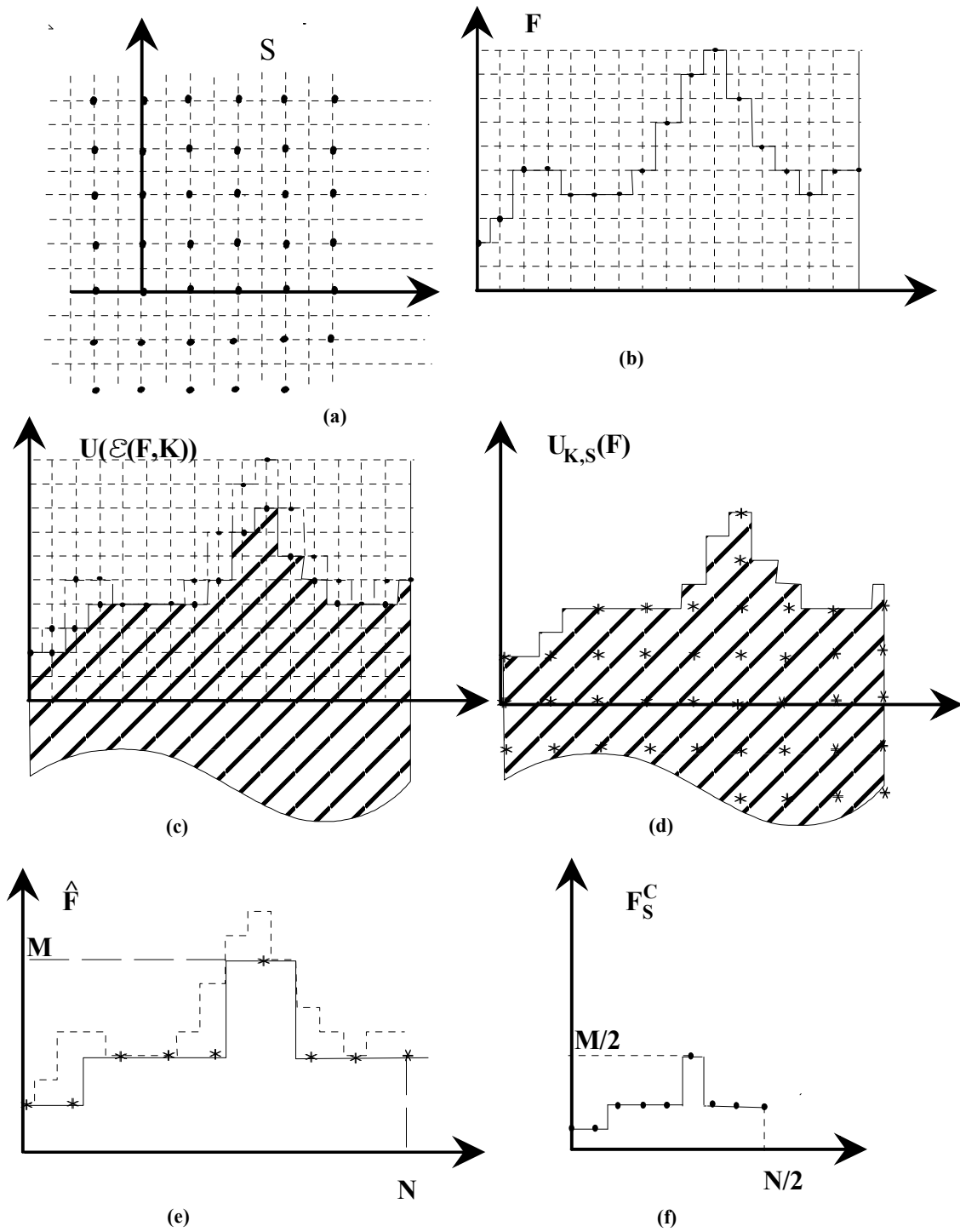
$$U_{K,S}(F) = U(E(F,K)) \cap S \quad (۲۹)$$

$$F_s = \text{Max}_Z (U_{K,S}(F)) \quad (۳۰)$$

همچنین اپراتور بازسازی را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$U(\hat{F}) = (U_{K,S}(F)) \oplus U(K) \quad (۳۱)$$

شکل (۱) مثالی از نمونه برداری سایه یک سیگنال یک بعدی را نشان می‌دهد. همان‌گونه که در این شکل مشخص است، روش نمونه برداری ارائه شده امکان فشرده سازی سیگنال نمونه برداری شده را در $(n+1)$ جهت (به جای n جهت در روش‌های کلاسیک نمونه برداری) فراهم می‌سازد و این خصوصیت وجه تمایز روش ارائه شده با روش‌های موجود است.



شکل ۱ مثالی از نمونه برداری از سایه در مورد یک سیگنال یک بعدی: (a) شبکه نمونه برداری، (b) تابع اصلی، (c) سایه تابع توسط عنصر سازنده باینری به طول ۳ و سایه آن، (d) سایه نمونه برداری شده، (e) تابع بازسازی شده، (f) تابع فشرده شده در دوره و در سطح خاکستری

۱۲۱	۱۲۳	۱۲۰	۱۲۱
۱۲۲	۱۱۹	۱۲۱	۱۲۳
۱۲۴	۱۱۸	۱۲۵	۱۲۴
۱۲۰	۱۲۳	۱۲۳	۱۲۸

•		•	
•		•	

	•

۱۱۹	۱۱۹	۱۲۰	۱۲۱
۱۱۸	۱۱۸	۱۲۱	۱۲۴
۱۱۸	۱۱۸	۱۲۳	۱۲۴
۱۲۰	۱۲۳	۱۲۳	۱۲۸

۱۱۹		۱۲۰	
۱۱۸		۱۲۳	

۱۱۸		۱۲۰	
۱۱۸		۱۲۲	

۱۱۸	۱۱۸	۱۲۰	۱۲۰
۱۱۸	۱۱۸	۱۲۰	۱۲۰
۱۱۸	۱۱۸	۱۲۲	۱۲۲
۱۱۸	۱۱۸	۱۲۲	۱۲۲

۳	۵	۰	۱
۴	۱	۱	۳
۶	۰	۳	۱
۲	۵	۱	۶

۵۹	۶۰
۵۹	۶۱

شکل ۲ مثالی از روش ارائه شده: الف) یک تصویر ۴×۴، ب) شبکه نمونه برداری و ج) عنصر سازنده، د) سایش تصویر توسط عنصر سازنده، ه) نمونه های برداشته شده توسط روش هژمان-توت، و) نمونه های برداشته شده توسط روش نمونه برداری از سایه، ز) تصویر بازسازی شده توسط روش ارائه شده، ح) تصویر خطا، ط) تصویر نمونه برداری شده توسط روش ارائه شده پس از فشرده سازی (ورودی لایه بعدی هرم)



شکل ۳ تصاویر نمونه برداری شده لایه های مختلف هرم: بالا سمت چپ تصویر اصلی و ردیف های بالا راست و پایین، به ترتیب، ۴ لایه اول هرم هژمان-توت و هرم ارائه شده

$$\Leftrightarrow U(E(F_1, K)) \subseteq U(E(F_2, K))$$

$$\Leftrightarrow (U(E(F_1, K)) \cap S) \subseteq (U(E(F_2, K)) \cap S)$$

$$\Leftrightarrow (U(E(F_1, K)) \cap S) \oplus U(K) \subseteq$$

$$(U(E(F_2, K)) \cap S) \oplus U(K)$$

$$\Leftrightarrow \hat{F}_1 \leq \hat{F}_2$$

بنابراین براساس سه قضیه فوق، این روش نمونه برداری خواص مناسب برای کاربرد در یک شمای هرمی را داراست. بدین منظور کافی است دو اپراتور نمونه برداری و باز سازی را به صورت زیر در نظر بگیریم:

$$\Psi_e(I_k) = \text{Max}_Z [U(E(I_k, K)) \cap S] \quad (33)$$

$$\hat{I} = \Psi_r(\Psi_e(I_k)) = \text{Max}_Z [(U(E(I_k, K)) \cap S) \oplus K] \quad (34)$$

از آنجا که در این روش بر روی تصویر لایه بعدی هرمی، فشرده سازی در سه جهت - دو جهت مکانی و یک جهت مربوط به سطح خاکستری- انجام می شود و با توجه به برقراری چهار خاصیت (۲۵) الی (۲۸)، می توان امیدوار بود که نتایجی بهتر از هرم های موجود قابل دستیابی است. زیرا فشرده شدن سطح خاکستری، کاهش محدوده دینامیکی سیگنال خطا و در نتیجه کاهش انترپوی را به دنبال خواهد داشت. خاطر نشان می سازد نتایج عملی این موضوع را تایید می کنند.

نتایج تجربی

در این بخش ابتدا با در نظر گرفتن سه تصویر با محتویات متفاوت (یک منظره، یک پرتره، و یک طبیعت بی جان) به مقایسه هرم ارائه شده با هرم هژمان - توت که بر اساس مقاله کونگ از کارایی بالاتری نسبت به سایر هرم ها برخوردار است، می پردازیم و سپس به آنالیز پیچیدگی محاسباتی روش ارائه شده خواهیم پرداخت.

نتایج مقایسه ای. برای مقایسه کارایی هرم روش ارائه

قضیه ۱: خاصیت غیرگسترشی بودن:

$$\hat{F} \leq F \circ K \leq F$$

اثبات: با توجه به تعریف سایه می دانیم که $\hat{F} \leq F \circ K \Leftrightarrow U(\hat{F}) \subseteq U(F \circ K)$ ، از طرفی:

$$U(\hat{F}) = (U(E(F, K)) \cap S) \oplus U(K) \subseteq (U(E(F, K)) \oplus U(K)) \cap (S \oplus U(K))$$

زیرا: (مرجع شماره ۱۱ را ببینید) $(A \cap B) \oplus C \subseteq (A \oplus C) \cap (B \oplus C)$ ، این با توجه به شرط ۴ در مورد شبکه نمونه برداری، $(U(E(F, K)) \cap S) \oplus U(K) \subseteq (U(E(F, K)) \oplus U(K)) \cap (S \oplus U(K))$

$$U(\hat{F}) \subseteq (U(E(F, K)) \oplus U(K)) \cap (S \oplus U(K))$$

$$= (U(E(F, K)) \oplus U(K)) \cap (S \oplus U(K))$$

$$= (U(E(F, K)) \oplus U(K)) \cap (S \oplus U(K))$$

$$= (U(E(F, K)) \oplus U(K)) \cap (S \oplus U(K))$$

بنابراین بر اساس نتیجه قضیه فوق، $U(\hat{F}) \subseteq U(F \circ K) \Rightarrow \hat{F} \leq F \circ K \leq F$ همواره غیر منفی است.

قضیه ۲: خود توانی: $\hat{F} = \hat{F}$

اثبات: بنا به تعریف

$$\begin{aligned} U(\hat{F}) &= (U(E(\hat{F}, K)) \cap S) \oplus U(K) \\ &= ((U(\hat{F}) \cap U(K)) \cap S) \oplus U(K) \\ &= (((U(E(F, K)) \cap S) \oplus U(K)) \cap U(K)) \cap S \oplus U(K) \\ &= (((U(E(F, K)) \cap S) \bullet U(K)) \cap S) \oplus U(K) \end{aligned}$$

از طرفی براساس رابطه (۵) اپراتور بستن مورفولوژیک گسترشی است [9-10] یعنی: $A \bullet B \supseteq A$ لذا:

$$U(\hat{F}) \supseteq ((U(E(F, K)) \cap S) \oplus U(K))$$

$$= (U(E(F, K)) \cap S) \oplus U(K)$$

$$\Rightarrow U(\hat{F}) \supseteq U(\hat{F}) \Rightarrow \hat{F} \geq \hat{F}$$

$$\hat{F} \leq \hat{F}$$

از طرفی بنا بر نتیجه قضیه ۱:

$$\hat{F} = \hat{F}$$

در نتیجه:

قضیه ۳: خاصیت افزایشی:

$$F_1 \leq F_2 \Leftrightarrow \hat{F}_1 \leq \hat{F}_2$$

اثبات:

$$F_1 \leq F_2 \Leftrightarrow U(F_1) \subseteq U(F_2)$$

ورودی در هر یک از دو هرم فوق در نظر گرفتیم. نتایج کمی حاصل از اعمال این دو هرم به این سه تصویر در جدول (۱) نشان داده شده‌اند.

بر اساس نتایج حاصله، محدوده تغییرات سیگنال خطا از لایه اول به بعد به میزان چشمگیری در هرم ارائه

شده با هرم هژمان-توت، این دو هرم را با در نظر گرفتن عنصر سازنده مربعی 2×2 با مرکز مبدا مختصات و شبکه نمونه برداری زیر بر پا نمودیم:

$$S = (2Z)^3 = \{(2i, 2j, 2k) : i, j, k \in Z\} \quad (35)$$

سه تصویر یاد شده به ابعاد 256×256 پیکسل را به عنوان

شماره لایه	انترویی	ماکزیمم سطح خاکستری	تعداد سطح خاکستری
۰	۴/۱۲	۱۷۷	۱۲۹
۱	۴/۰۹	۱۶۰	۱۲۸
۲	۴/۲۹	۱۵۲	۱۱۳
۳	۴/۶۳	۱۴۰	۱۰۱
۴	۴/۶۸	۱۰۹	۶۲
۵	۳/۸	۹۳	۲۵
۶	۲/۳۸	۲۹	۸

(۱-ب)

شماره لایه	انترویی	ماکزیمم سطح خاکستری	تعداد سطح خاکستری
۰	۴/۲۶	۱۷۷	۱۳۰
۱	۳/۴۹	۸۱	۶۹
۲	۳/۰۸	۳۹	۳۹
۳	۲/۸۱	۱۸	۱۹
۴	۲/۳۸	۷	۸
۵	۱/۳۳	۳	۳
۶	۰	۰	۱

(۱-الف)

شماره لایه	انترویی	ماکزیمم سطح خاکستری	تعداد سطح خاکستری
۰	۴/۷۸	۲۲۶	۱۹۱
۱	۴/۸۸	۲۰۵	۱۶۸
۲	۴/۹	۱۷۸	۱۴۰
۳	۴/۶۶	۱۶۵	۹۵
۴	۴/۰۹	۹۷	۴۲
۵	۲/۸۷	۷۹	۱۵
۶	۲/۳۱	۱۳	۶

(۲-ب)

شماره لایه	انترویی	ماکزیمم سطح خاکستری	تعداد سطح خاکستری
۰	۴/۹۴	۲۲۶	۱۸۸
۱	۴/۲۸	۱۰۳	۹۳
۲	۳/۶۵	۴۵	۴۲
۳	۲/۸۶	۲۱	۱۹
۴	۱/۷۷	۷	۷
۵	۰/۳۹	۲	۳
۶	۰	۰	۱

(۲-الف)

شماره لایه	انترویی	ماکزیمم سطح خاکستری	تعداد سطح خاکستری
۰	۵/۰۱	۲۳۹	۲۰۲
۱	۴/۹۲	۲۱۳	۱۶۹
۲	۵/۱۳	۱۷۴	۱۵۳
۳	۴/۹۵	۱۶۱	۱۲۰
۴	۴/۷۰	۱۴۱	۷۴
۵	۳/۸۵	۱۱۳	۲۸
۶	۲/۶۶	۳۶	۸

(۳-ب)

شماره لایه	انترویی	ماکزیمم سطح خاکستری	تعداد سطح خاکستری
۰	۵/۱۵	۲۴۰	۲۰۱
۱	۴/۳۱	۱۰۷	۹۲
۲	۳/۸۶	۴۴	۴۲
۳	۳/۲۱	۲۱	۲۲
۴	۲/۵۷	۹	۱۰
۵	۱/۵۹	۳	۴
۶	۰/۳۴	۱	۲

(۳-الف)

جدول ۱ انترویی، مقادیر مینیمم و ماکزیمم سطح خاکستری پیکسل‌ها و تعداد سطوح خاکستری مربوط به لایه‌های مختلف هرمی (۱) پرتره، (۲) گل و (۳) بندر؛ اندیس (الف) مربوط به روش پیشنهادی و اندیس (ب) مربوط به روش هژمان-توت می‌باشد.

ناقص خطای لایه صفرم را نادیده گرفته و $\bar{I}_0(x, y)$ را به عنوان تصویر بازسازی شده نهایی در نظر می‌گیریم. در حالت بازسازی کامل، انتروپی کلی را برای سه تصویر فوق و در مورد دو هرم بحث شده محاسبه نموده‌ایم که در جدول (۲-الف) این مقادیر با انتروپی تصاویر اصلی مقایسه شده‌اند. گفتنی است که این انتروپی‌ها توسط رابطه زیر محاسبه می‌گردند:

$$H_t = \frac{1}{N^2} \sum_{k=0}^K \left(\frac{N}{2^k} \right)^2 H_k \quad (36)$$

که در این رابطه H_k بیانگر انتروپی تصویر خطای k ام و N اندازه تصویر است.

شده نسبت به هرم هژمان-تووت کاهش یافته است که این نیز بنوبه خود، کاهش انتروپی را به دنبال داشته است. کاهش محدوده تغییرات خطی، ناشی از این نکته است که در روش ارائه شده، پس از نمونه برداری، سطح خاکستری نمونه‌ها قبل از انتقال به لایه بعدی هرمی با ضریب ۲ فشرده می‌شوند. این مطلب از شکل (۱-f) و همچنین شکل (۲) نیز بخوبی استنباط می‌شود.

در یک شمای هرمی، ممکن است بازسازی کامل یا ناقص تصویر مورد نظر باشد. در بازسازی کامل، تصویر توسط تصاویر خطا و تصویر مانده آخرین لایه هرم، به طور کامل بازسازی می‌شود ولی در بازسازی

نام تصویر	انتروپی تصویر اصلی	هرم هژمان-تووت	هرم ارائه شده
پرتره	۷/۲۲	۵/۵	۵/۳۸
گل	۷/۷۲	۶/۴	۶/۲۸
بندرگاه	۷/۰۷	۶/۶۶	۶/۵۳

الف

نام تصویر		هرم هژمان-تووت	هرم ارائه شده
پرتره	H_p	۱/۳۸	۱/۱۲
	PSNR	۲۶/۴	۲۶/۲
	M_p	۲/۳۳	۲/۲۲
گل	H_p	۱/۶۲	۱/۳۵
	PSNR	۲۱/۴	۲۱/۲۹
	M_p	۲/۶۵	۲/۲۲
بندرگاه	H_p	۱/۶۵	۱/۳۸
	PSNR	۲۰/۱	۲۰/۰۱
	M_p	۲/۶۴	۲/۲۲

ب

جدول ۲ (الف) مقایسه انتروپی تصاویر بازسازی شده کامل توسط روش هرمی هژمان-تووت و روش ارائه شده، (ب) مقایسه انتروپی وسیگنال به نویز پیک در مورد بازسازی ناقص (با صرف نظر کردن از مانده لایه اول هرم) و توسط روش هرمی هژمان-تووت و روش ارائه شده

اما به هر حال میزان انتروپی به عنوان حد تئوریک نرخ بیت، ایده‌ای مناسب در مورد نرخ بیت، در صورت به کارگیری روش کدگذاری مناسب به دست می‌دهد. چنانچه با در نظر گرفتن تعداد سطوح خاکستری خطای هر لایه، اقدام به کد گذاری با طول ثابت نماییم، در این صورت تعداد بیت‌های لازم برای کد کردن مقدار سطح خاکستری لایه i ام برابر است با:

$$m_i = \begin{cases} \log_2(L_i) & \text{if } \log_2(L_i) \in Z \\ \lceil \log_2(L_i) \rceil + 1 & \text{else} \end{cases} \quad (39)$$

که در این رابطه L_i ، تعداد سطوح خاکستری لایه i ام می‌باشد. در این صورت نرخ بیت تصویر بازسازی شده ناقص برابر خواهد بود با:

$$M_p = \frac{1}{N^2} \sum_{k=1}^K \left(\frac{N}{2^k} \right)^2 m_k \quad (40)$$

مقادیر مربوط به نرخ بیت، برای تصاویر مورد آزمایش در جدول (۲-ب) داده شده‌اند. همچنان که این نتایج نشان می‌دهند در این حالت نیز، روش پیشنهادی به مراتب بهتر از روش هژمان-تووت عمل می‌نماید.

آنالیز پیچیدگی. نمونه برداری و بازسازی یک تصویر توسط روش نمونه برداری هژمان-تووت به وسیله عنصر سازنده و شبکه نمونه برداری مورد استفاده در این بخش، معادل است با تقسیم تصویر به بلوک های 2×2 و پر کردن هر بلوک با کمترین مقدار سطح خاکستری پیکسل های آن بلوک. این مطلب بخوبی در مثال شکل (۲) نشان داده شده است. بنابراین برای محاسبه مقدار نمونه مربوط به هر بلوک نیاز به ۳ عمل مقایسه می‌باشد و برای نمونه برداری از یک تصویر $N \times N$ در مجموع $\frac{N}{2} \times \frac{N}{2} \times 3 = \frac{3N^2}{4}$ عمل مقایسه نیاز است. تنها

همان‌گونه که نتایج این جدول نشان می‌دهند در مورد همه تصاویر، روش ارائه شده منجر به انتروپی کوچکتر در مقایسه با هرم هژمان-تووت می‌گردد. گفتنی است که در مورد بازسازی ناقص، افزون بر انتروپی، بایستی کیفیت تصاویر بازسازی شده را نیز در نظر گرفت. معیاری که در عمل مورد استفاده قرار می‌گیرد نسبت سیگنال به نویز پیک، PSNR، است که توسط رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$PSNR = 10 \log_{10} \left(\frac{255^2}{MSE} \right) \quad (37) \text{ (دسی بل)}$$

که در این رابطه:

$$MSE = \frac{1}{N^2} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} [I(i, j) - \hat{I}_0(i, j)]^2$$

هر چند که به لحاظ غیر ایستا بودن تصویر این معیار، که بر اساس متوسط انرژی خطا استوار است، به طور کامل گویا نمی‌باشد. همچنین، انتروپی تصویر بازسازی شده ناقص به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$H_p = \frac{1}{N^2} \sum_{k=1}^K \left(\frac{N}{2^k} \right)^2 H_k \quad (38)$$

نتایج کمی مربوط به بازسازی ناقص در جدول (۲-ب) ارائه شده‌اند. همچنین نتایج کیفی در شکل (۴) نشان داده شده‌اند. همان‌گونه که این نتایج نشان می‌دهند روش ارائه شده با کیفیتی تقریباً معادل، منجر به انتروپی کمتر (در حدود ۲۰٪) می‌گردد. بنابراین در هر دو حالت بازسازی کامل و ناقص، روش پیشنهادی از کارایی بالاتری نسبت به روش هژمان-تووت برخوردار می‌باشد.

هرچند در عمل میزان نرخ بیت است که حائز اهمیت می‌باشد و نرخ بیت با انتروپی متفاوت است،



شکل ۴: نتایج کیفی تصاویر بازسازی شده ناقص توسط هرم هژمان-تووت و روش ارائه شده، ستون سمت چپ تصاویر اصلی و ستون‌های وسط و سمت راست، به ترتیب، تصاویر بازسازی شده توسط روش هژمان-تووت و روش ارائه شده

شده از تقسیم تصویر به بلوک های 2×2 و جایگذاری پیکسل‌های هر بلوک توسط بزرگترین عدد زوج کوچکتر از مقدار مینیمم آن بلوک، بدست می‌آید. بنابراین تنها پیچیدگی اضافی روش ارائه شده در

پیچیدگی اضافی نمونه برداری از سایه در مقایسه با روش هژمان-تووت مربوط به نمونه برداری از سطح خاکستری می‌باشد. در صورتی که شبکه نمونه برداری مطابق رابطه (۳۵) در نظر گرفته شود، تصویر بازسازی

مورفولوژیک (گشایش) قابل حصول می‌باشند. بر طبق این چهار شرط، هرم مورفولوژیک هژمان-تووت برترین کارایی را در میان هرم‌های موجود داراست. گفتنی است کونگ و گوتسیاس با ارائه نتایج عملی این مطلب را تأیید نموده‌اند.

در این مقاله نشان داده شد که روش ارائه شده نیز همانند روش هژمان-تووت چهار شرط بهینه بودن برای کاربرد هرمی را داراست. افزون بر این، خاصیت امکان فشرده سازی در جهت سطح خاکستری در روش ارائه شده، منجر به کاهش محدوده (رنج) دینامیکی سیگنال خطا و در نتیجه کاهش اتروپی آن می‌گردد. هر چند نمونه برداری در جهت سطح خاکستری در واقع بمثابة چندی کردن (کوآنتیزاسیون) است اما روش ارائه شده از دو جهت حائز اهمیت است: نخست اینکه چندی کردن در چهارچوب فرمالیسمی ارائه گردیده که چهار شرط بهینه بودن را ارضا می‌نماید و دوم اینکه، حتی در حالت بازسازی کامل (که در این حالت چندی کردن مطرح نمی‌باشد) نیز این روش به نتایجی بهتر از سایر هرم‌ها منجر می‌شود.

نتایج عملی کارایی برتر روش ارائه شده را در دو حالت بازسازی کامل و بازسازی ناقص تأیید می‌کنند. همچنین نشان داده شد که پیچیدگی روش ارائه شده در مقایسه با روش هژمان-تووت در مورد یک لایه هرمی با تصویر ورودی $N \times N$ تنها به میزان $\frac{N^2}{2}$ عمل شیفب باینری بیشتر است.

مقایسه با روش هژمان - تووت ناشی از تقسیم بر دو کردن و در نظر گرفتن قسمت صحیح خارج قسمت در مرحله نمونه برداری (به شکل ۲ رجوع شود) و ضرب در ۲ در مرحله بازسازی است. چنانچه مقادیر پیکسل‌ها به صورت باینری بیان شده باشند، عمل تقسیم صحیح بر دو توسط حذف بیت با ارزش کمتر (یک بیت شیفب به راست) و عمل ضرب در ۲ با شیفب به چپ به اندازه یک بیت، قابل انجام خواهد بود.

به این ترتیب، پیچیدگی روش ارائه شده، در دو مرحله نمونه برداری و بازسازی، به اندازه $2 \times \frac{N^2}{4} = \frac{N^2}{2}$ عمل شیفب باینری بیشتر از روش هژمان - تووت می‌باشد.

نتیجه گیری

در این مقاله یک روش نمونه برداری یکنواخت مبتنی بر مورفولوژی ریاضی ارائه گردید. در روش ارائه شده بجای نمونه برداری از تابع، از سایه آن نمونه برداری نمودیم که با این روش امکان فشرده سازی تصویر نه تنها در ابعاد مکانی بلکه در جهت سطح خاکستری نیز برای کاربرد در یک شمای هرمی فراهم آمد.

کونگ و گوتسیاس در مقاله خود چهار شرط برای بهینه بودن یک زوج اپراتور نمونه برداری و بازسازی را برای کاربرد در شمای هرمی مطرح می‌نمایند که بعضی از آنها تنها توسط اپراتورهای

مراجع

1. HARALICK. R. M, ZHUANG. X, LIN. C, LEE. J, "The Digital Morphological Sampling Theorem", *IEEE Trans. on ASSP.*, No.37, pp. 2067-2090, (1989).
2. TOET. A, "A Morphological Pyramidal Image Decomposition", *Pattern Recognition Letters*, No.9, pp. 255 261, (1989).
3. HEIJMANS. H, TOET. A, "*Morphological Sampling*", *CVGIP Image Understanding*, Vol 54, No.3, pp. 384 400, (1991).

4. SUN. F. K, MARAGOS. P, "Experiments on Image Compression Using Morphological Pyramids", *SPIE, Vol.1199 Visual Communications & Image Processing IV*, pp 1303-1309, (1989).
5. KONG. X, GOUTSIAS. J, "A Study of Pyramidal Techniques for Image Representation and Compression", *Journal of Visual Communication & Image Representation, Vol.5, No. 2*, pp. 190-203, (1994).
6. GOUTSIAS. J, HEIJMANS. H. J, "Nonlinear Multi-Resolution Signal Decomposition Schemes: I. Morphological Pyramids", *IEEE Trans. on Image Processing, Vol. 9, No. 11* , pp. 1862-1876, (2000).
7. OUERTURF. L.A, COMER. M. L, DELP. E. J, "Color Image Coding Using Morphological Pyramid Decomposition", *IEEE Trans. on Image Processing, Vol. 4, No. 2*, pp 177-185, (1995).
8. BURT. P. J, ADELSON. E. H, "Laplacian Pyramid As a Compact Image Code", *IEEE Trans. on Comm. No. 31*, pp 532-540, (1983).
9. SERRA. J, "Image Analysis and Mathematical Morphology", Academic Press, New York, (1982).
10. HEIJMANS. H. J. A., RONSE. C, "The Algebraic Basis of Mathematical Morphology I : Dilations and Erosions", *Computer Vision, Graphics and Image Processing, Academic Press, No 50*, (1990).
11. MARAGOS. P, SCHAFER. R, "Morphological Skeleton Representation and Coding of Binary Images", *IEEE Transactions on ASSP, Vol.34 No 5*, (1986).
12. STERNBERG. S. R, "Grayscale Morphology", *Computer Vision, Graphics, and Image Processing, No.35*, pp. 333-355, (1986).
13. SARYAZDI. S., HAESE-COAT. V., RONSIN. J., "Image Representation by a New Optimal Non-Uniform Morphological Sampling", *Pattern Recognition, Vol. 33, No 6*, pp 961-977, (2000).
14. SERRA. J., Vincent. L., "An Overview of Morphological Filtering", *Circuits Systems Signal Processing, No 11*, pp. 47-108, (1992).