

تحلیل جریان گذر صوتی و غیر لزج بخار ضمن چگالش در پاساژ تیغه‌های توربین به روش تایم مارچینگ جیمسون روی شبکه منطبق بر مرز*

علیرضا تیمورتاش^(۱)محمد رضا مه پیکر^(۲)

چکیده بخار، ضمن فرآیند انبساط در طبقات کم فشار توربین‌ها ابتدا فوق سرد شده و سپس به واسطه پدیده جوانه‌زایی به یک مخلوط دو فاز تبدیل می‌گردد. ظاهر شدن فاز مایع در بخار، مشخصات ترمودینامیکی و آنرودینامیکی جریان را تغییر داده و عملکرد طبقات یاد شده را تحت تأثیر قرار می‌دهد از این رو، تفحص بیشتر در این مقوله باعث بهبود در طراحی خواهد شد. در این مقاله یک روش عددی برای حل جریان دو بعدی و دو فاز بخار در پاساژ تیغه‌ها ارائه شده و ویژگی‌هایی چند از دو فاز شدن جریان در این مسیر مورد بررسی قرار گرفته است. معادلات ناپایای اویلر به عنوان معادلات حاکم بر رفتار سیال تراکم پذیر غیر لزج با روابط مربوط به تشکیل و رشد قطرات مایع تلفیق گردیده و با روش تایم مارچینگ جیمسون مبتنی بر فرمول بندی رأس سلولی که برای پذیرش اثرات دو فاز شدن جریان مورد اصلاح قرار گرفته است، روی یک شبکه منطبق بر مرز با به کارگیری تمهیدی برای ساده سازی معادلات رشد قطره در منطقه مرطوب حل شده است. نتایج به دست آمده ضمن مقایسه با اطلاعات تجربی موجود، به ویژه توزیع فشار روی سطوح تیغه، مورد ارزیابی قرار گرفته‌اند.

واژه‌های کلیدی پاساژ تیغه‌ها، تایم مارچینگ، توربین، جیمسون، جریان چگالشی، جوانه زایی، غیر لزج، فوق سرد.

A Balde to Balde Inviscid Transonic Flow Analysis of Nucleating Steam in a Turbine Cascade by the Jameson's Time – Marching Scheme Using Body Fitted Grid

A.R. Teymourtash

M.R. Mahpeykar

Abstract During the course of expansion in turbines, the steam at first supercools and then nucleated to become a two-phase mixture. This is an area where greater understanding can lead to improved design. This paper describes a numerical method for the solution of two-dimensional two-phase flow of steam in a cascade of turbine blading; The unsteady Euler equations governing the overall behaviour of compressible inviscid flow are combined with equations describing droplet behaviour and treated by the Jameson's time marching scheme which modified to allow for two-phase effects. The results are discussed in the light of knowledge of actual surface pressure distributions and some predictions of two-phase effects in blade cascades are also presented.

Key Words Cascade, Condensing flow, Inviscid, Jameson, Nucleating, Supercooling, Time Marching, Turbine.

* نسخه اولیه مقاله در تاریخ ۸۱/۱۱/۹ و نسخه نهایی آن در تاریخ ۸۴/۵/۱۵ به دفتر نشریه رسیده است.

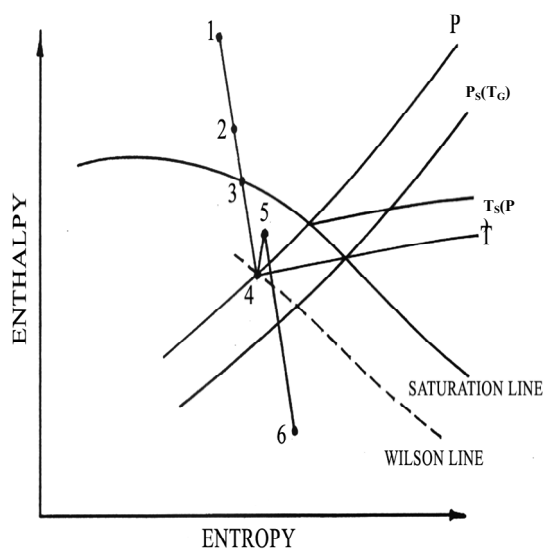
(۱) استادیار، دانشگاه فردوسی مشهد، دانشکده مهندسی، گروه مکانیک

(۲) دانشیار، دانشگاه فردوسی مشهد، دانشکده مهندسی، گروه مکانیک

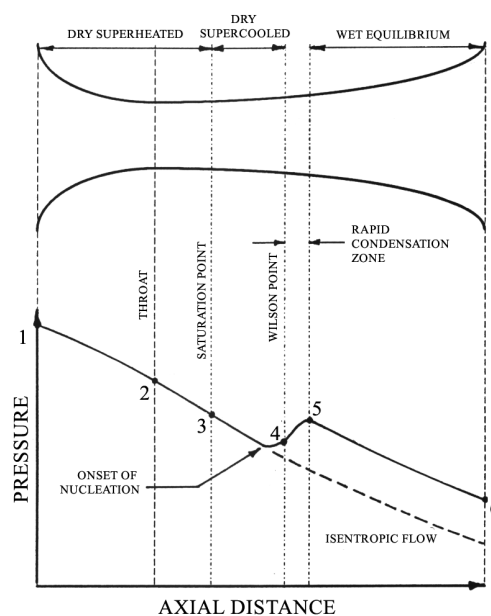
با توجه به توزیع محوری فشار و مسیر تغییر حالت در شکل های (۱ و ۲)، بخار سوپر هیت از نقطه (۱) تا رسیدن به شرایط صوتی در گلوگاه (۲) منبسط شده است. در نقطه (۳) خط اشباع قطع شده و قطره های بسیار ظریف مایع شروع به شکل گرفتن نموده اند اما نرخ جوانه زایی آن قدر کم بوده که جریان همانند بخار خشک به انبساط ادامه داده است. ضمن انبساط آیسستروپیک، دمای بخار سریعتر از دمای اشباع متناظر با فشارش کاسته شده و از این رو، حالتی ناپایدار موسوم به فوق اشباع یا فوق سردی بر بخار حاکم گردیده است. پس از آن بسته به شرایط محلی و شدت انبساط، نرخ جوانه زایی به طور چشمگیری افزایش یافته و به حداکثر مقدار ممکن در نقطه (۴) که آستانه شکسته شدن درجه فوق سردی می باشد، رسیده است. نقطه یاد شده که بر حداکثر فوق سردی دلالت دارد به نقطه ویلسون معروف می باشد. قطره های بسیار ظریف

مقدمه

طیف وسیعی از شرایط مختلف جریان در طبقات توربین های بخار قابل ملاحظه است. گاه فرآیند انبساط و پدیده چگالش در توربین با جریان بخار در یک نازل لاوال تحت شرایط گذر صوتی شبیه سازی می شود. در شکل (۱) انبساط بخار از شرایط فوق گرم به شرایط مرطوب داخل چنین شیپوره ای نشان داده شده است. به طور معمول، نرخ انبساط سریعتر از آن است که بخار در شرایط تعادلی باقی بماند و از این رو، بدون تغییر فاز تا زیر خط اشباع سرد شده و در شرایط نامتعادل موسوم به فوق اشباع یا فوق سرد قرار می گیرد، و نهایتاً با افزایش درجه فوق سردی، حرکات اتفاقی مولکول ها موجب تولید جوانه ها و خوشه های پایدار مایع شده و در اثر فرآیند چگالش سیستم به تعادل ترمودینامیکی برگشت می نماید. فرآیند یاد شده که در غیاب سطوح صلب و ذرات خارجی در بخار به وقوع می پیوندد، جوانه زایی همگن نامیده می شود.



شکل ۲ مسیر تغییر حالت برای انبساط بخار همراه با چگالش ناگهانی در نازل لاوال



شکل ۱ تغییرات محوری فشار برای انبساط بخار در نازل لاوال همراه با چگالش ناگهانی

تحقیقات قبلی نشان می‌دهند که محاسبات بخار جوانه زده شده و مرطوب نه تنها به زمان زیادی نیاز دارند بلکه مشکل ناپایداری عددی نیز در آنها قابل توجه است. به طور معمول، ناپایداری‌ها ناشی از حساسیت بیش از حد معادلات حاکم بر رفتار قطره و معاشر نبودن آنها با معادلات بقاء می‌باشند [12] از این رو، اگر قرار باشد روش‌های مختلف ارائه شده برای بررسی جریان چگالشی به صورت یک ابزار طراحی مناسب برای صنعت درآیند، می‌بایست به کدهای سریعتر و کم در دستری تبدیل شوند. در این تحقیق چنین هدفی دنبال شده و یک راه حل مؤثر برای جریان چگالشی و دوبعدی در تیغه‌های توربین تشریح شده است. به این منظور، روش تایم مارچینگ رنگ کوتای مرتبه چهار منسوب به جیمسون که برای جریان تک فاز [13] ابداع شده، مبنای کار قرار گرفته است و سپس به منظور پیشگویی اثرات دوفازی شدن جریان، از طریق دخالت دادن ترم‌های رطوبت، تغییراتی در آن اعمال شده است. به طور کلی در هر گام از محاسبات، آزمایشی مبنی بر چگونگی وضعیت تعادل بخار به عمل آمده و با ابداع روشی برای انتگرال‌گیری از ترکیب معادلات انرژی و رشد قطرات اقدام به کاربرد طرح مذکور شده است.

معادلات عمومی جریان

اگر یک جریان غیر دائم، دو بعدی، غیر لزج و تراکم‌پذیر بخار شامل مجموعه‌ای از قطرات مایع را با فرض عدم لغزش بین فازها مدنظر قرار دهیم، می‌توان برای هر المان در مختصات x و y معادلات بقاء جرم، مومنتوم و انرژی را به فرم انتگرالی زیر ارائه نمود:

$$\Omega \frac{\partial \omega}{\partial t} = - \oint [F_c dy - G_c dx] \quad (1)$$

در این رابطه Ω مساحت سلول محاسباتی، ω بردار

در حد فاصل نقاط (۴) و (۵) ضمن انتقال حرارت و جرم با بخار محیط سریعاً رشد می‌نمایند. رها شدن گرمای نهان و انتقال آن به بخار مافوق صوت باعث ایجاد شوک یا ضربه میعان می‌گردد که بین نقاط (۴) و (۵) افزایش فشار ناشی از آن را شاهد هستیم. از آن پس انبساط نزدیک به شرایطی تعادلی ادامه یافته است. در این مرحله تعداد قطرات ثابت مانده و درصد رطوبت با رشد قطرات افزایش می‌یابد.

تحقیقات زیادی در خصوص رفتار بخار مرطوب داخل توربین‌ها گزارش شده است [1-5]. رطوبت موجب خوردگی تیغه‌ها می‌شود؛ اما، این اثر تنها یکی از اثرات تشکیل فاز مایع در بخار است. انحراف محلی از شرایط تعادل ترمودینامیکی از مهمترین ویژگی‌های یک جریان توأم با جوانه زایی است که با آزاد شدن گرمای نهان تقطیر ضمن بازگشت به وضعیت تعادل همراه می‌باشد. افزایش حرارت ناشی از تقطیر به جریان بخار اثرات مهمی به دنبال دارد که خفگی جریان در طبقات مرطوب و تغییر الگوی جریان حول پره‌های توربین از آن جمله‌اند.

مطالعات در زمینه ظاهر شدن رطوبت در طبقات کم فشار توربین‌ها مدیون توسعه تئوری جوانه‌زایی بوده است چرا که لازم است معادله حاکم بر تشکیل جوانه‌ها و نیز، معادلات رشد قطرات در بخار را که خود تابع نرخ انتقال حرارت و جرم بین قطره و بخار محیط می‌باشند، با معادلات بقاء در دینامیک گازها تلفیق و سیستم معادلات حاصل را به صورت عددی حل نمود [6-11]. از دیگر ویژگی‌های جریان انبساطی بخار در تیغه‌های توربین آن است که سرعت صوت در آن به شرایط محلی وابسته می‌باشد. به طور کلی این مسائل شامل نواحی زیرصوتی، فراصوتی و مقاطع گذر صوتی می‌باشند و تحت چنین شرایطی مناسب‌ترین شیوه حل، اتخاذ روش‌های تایم مارچینگ است. افزون بر این،

پراکنده شده‌اند، تصور می‌گردد و نیز از آن جهت که اندازه جوانه‌ها و قطرات تشکیل شده در توربین‌ها بسیار کوچک است معمولاً فرض می‌شود که این ذرات خط مسیر بخار را بدون لغزش در سرعت طی می‌نمایند. به عنوان یک اصل، کل سیستم می‌بایست از قوانین بقاء تبعیت نماید اما به منظور اعمال قوانین یاد شده بر جریان دو فازی می‌بایست آنها را با معادلات (۳۱ و ۳۶) در قسمت ضمیمه که حاکم بر تشکیل جوانه‌ها و رشد قطرات می‌باشند، تلفیق و به طور همزمان حل نمود. در روند یاد شده بذل توجه به تفاوت این دو دسته معادلات حائز اهمیت است، چرا که روابط حاکم بر تشکیل و رشد قطرات در مقایسه با معادلات دیگر حساس‌تر بوده و از این رو، می‌بایست روی فواصل کوتاه‌تری انتگرال‌گیری شوند. افزون بر این، معادلات رشد قطره اصولاً بر مبنای دیدگاه لاگرانژ شکل گرفته‌اند و لذا هر گونه تغییر و تحول در قطرات می‌بایست در امتداد خطوط جریان تصور شود که این خطوط همیشه بر خطوط شبکه محاسباتی منطبق نمی‌باشند. بنابر دلایل فوق، دو رشته محاسبات جداگانه اما موازی به کار گرفته می‌شوند. ادغام کردن صحیح این محاسبات حائز اهمیت است. برای این منظور، کسر رطوبت که از حل معادلات جوانه‌زایی و رشد قطرات حاصل می‌شود در معرفی انتالی و دانسیته مخلوط به کار می‌رود، به طوری که:

$$h = w h_L + (1 - w)h_G \quad (6)$$

و

$$1/\rho = w \rho_L + (1 - w)/\rho_G \quad (7)$$

در روابط فوق پانویس‌های G و L به ترتیب به فاز بخار و مایع دلالت می‌نمایند. کسر رطوبت عملاً در هر نقطه از میدان محاسباتی توسط شعاع متوسط قطرات و تعداد قطرات در واحد جرم مخلوط مایع و بخار قابل محاسبه است:

متغیرهای بقایی و بردارهای \underline{E}_C و \underline{G}_C فلاکس‌ها در جهات x و y می‌باشند:

$$\underline{\omega} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho V_x \\ \rho V_y \\ \rho e_0 \end{bmatrix}, F_C = \begin{bmatrix} \rho V_x \\ \rho V_x^2 + P \\ \rho V_x V_y \\ \rho V_x h_0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\underline{G}_C = \begin{bmatrix} \rho V_y \\ \rho V_y V_x \\ \rho V_y^2 + P \\ \rho V_y h_0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

در روابط فوق e_0 و h_0 بر انرژی کل و انتالی کل دلالت دارند به طوری که:

$$e_0 = h_0 - \frac{P}{\rho} \quad (3)$$

و

$$h_0 = h + \frac{V_x^2 + V_y^2}{2} \quad (4)$$

معادلات بقایی بالا عمومیت داشته و بر جریان تک فاز و نیز جریان دو فاز حاکم می‌باشند. اما باید توجه داشت که در مورد دوم خواص ترمودینامیکی نظیر دانسیته (ρ) و انتالی (h) به مخلوط مایع و بخار مربوط می‌شوند.

کاربرد معادلات بقاء برای جریان دو فازی

در حالت جریان دوفازی اصلی‌ترین اثر تغییر فاز، آزاد شدن گرمای نهان تقطیر است که به طور مستقیم معادله انرژی را تحت تأثیر قرار می‌دهد. به منظور اعمال این ویژگی کسر رطوبت، به صورت زیر تعریف شده است:

$$w = \frac{\text{جرم مایع}}{\text{جرم مایع} + \text{جرم بخار}} \quad (5)$$

نحوه عمل بر این فرض استوار است که بخار مرطوب به صورت مجموعه‌ای از قطرات کروی با اندازه‌ای معلوم که درون بخار تحت فشار و دمایی مشخص

$$h_L = c_L (T_L - T_D) \quad (11)$$

در این عبارت T_D دمای مبنا و برابر با 273.15°K می باشد.

معادله حالت مورد استفاده برای فاز بخار، معادله حالت ویریال تا ضریب دوم بوده است؛

$$P = \rho_G RT_G(1+B\rho_G) \quad (12)$$

و بالاخره بر اساس معادله بالا خواص بخار نیز از روابط مناسبی برآورد شده اند. از تلفیق قوانین اول و دوم ترمودینامیک و با استفاده از روابط ماکسل می توان نشان داد که:

$$\left(\frac{\partial h_G}{\partial P_G}\right)_{T_G} = v_G - T_G \left(\frac{\partial v_G}{\partial T_G}\right)_P \quad (13)$$

با انتگرال گیری از رابطه بالا داریم:

$$h_G = \int \left[v_G - T_G \left(\frac{\partial v_G}{\partial T_G}\right)_P \right] dP + F_h(T_G) \quad (14)$$

با استفاده از معادله حالت، عبارت نهایی برای انتالپی بخار خشک به شکل زیر در می آید:

$$h_G = \frac{RT_G}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{4PB}{RT_G}} - 1 \right) \left(1 - \frac{T_G}{B} \frac{dB}{dT_G} \right) + F_h(T_G) \quad (15)$$

می توان نشان داد:

$$F_h(T_G) = a \ln T_G + b T_G + c T_G^2 - d T_G^3 + e T_G^4 - f T_G^5 + \text{const} \quad (16)$$

که:

$$\begin{aligned} a &= 46.0 & b &= 1.47276 & c &= 0.419465 \cdot 10^{-3} \\ d &= 7.33297 \cdot 10^{-8} & e &= 6.16548 \cdot 10^{-11} \\ f &= 1.94063 \cdot 10^{-14} & \text{const.} &= 1782.24 \text{ in SI units} \end{aligned}$$

مجموعه معادلات فوق برای تشریح میدان جریان کافی می باشند.

$$w = 4/3 \pi r^3 \rho_L N \quad (8)$$

در این عبارت r شعاع متوسط قطرات بوده که از تئوری جوانه زائی و معادلات رشد قطره که در پیوست درج شده بدست می آید؛ N تعداد قطرات در واحد جرم سیال عامل می باشد و باید متذکر شد که تعداد کل قطرات در انتهای هر گام محاسباتی شامل قطرات موجود در ابتدای ایستگاه محاسباتی یعنی N_1 و نیز قطرات تشکیل شده به واسطه جوانه زایی در حداصل پیمایش سیال تا ایستگاه بعدی است:

$$N = N_1 + J\delta t \quad (9)$$

با توجه به پیوست، J بیانگر نرخ جوانه زایی در واحد جرم سیال است. عملاً در انتهای هر گام محاسباتی قطرات حاصله، شامل قطرات تازه شکل گرفته و قطراتی که از قبل در جریان موجود بوده اند به یک مجموعه تبدیل می شوند و شعاع متوسط این مجموعه (\bar{r}) بر اساس ریشه متوسط مربعات محاسبه شده است.

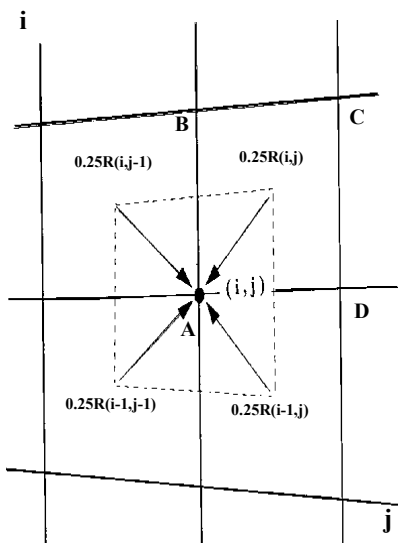
اطلاعات مورد نیاز دیگر در این تحقیق معادلات توصیف کننده خواص برای مایع و بخار آب بوده است؛ حجم مخصوص مایع اشباع (v_L)، از کینان و کیز استخراج شده [14]:

$$v_L = \frac{v_C + a(T_C - T_S)^{1/3} + b(T_C - T_S) + c(T_C - T_S)^4}{1 + d(T_C - T_S)^{1/3} + e(T_C - T_S)} \quad (10)$$

که v_C حجم مخصوص در نقطه بحرانی معادل $3.1975 \text{ cm}^3/\text{g}$ ، T_C دمای بحرانی معادل 647.27°K بوده و نیز:

$$\begin{aligned} a &= -0.3151548 & b &= -1.203374 \cdot 10^{-5} \\ c &= 7.48908 \cdot 10^{-13} & d &= 0.1342489 \\ e &= -3.946263 \cdot 10^{-3} & & \text{in SI units} \end{aligned}$$

ضمناً انتالپی مخصوص آب در دمای قطره (T_L)، با دقت مطلوب از رابطه زیر برآورد شده است:



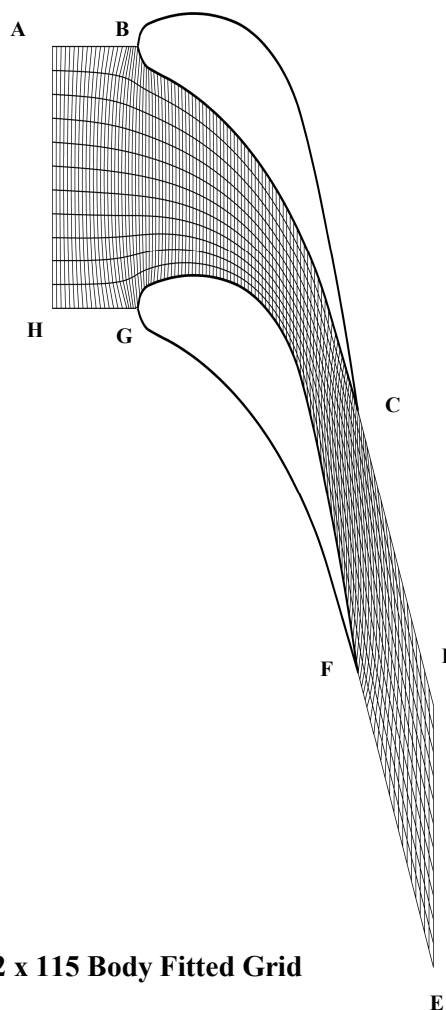
شکل 4 نمونه‌ای از المان‌های محاسباتی و نحوه توزیع باقیمانده‌ها به نقاط شبکه

در رئوس المان‌ها ذخیره می‌شوند. محققانی چون مارتینلی [15]، دیک [16]، سو آن سون و راد اسپیل [17] اظهار داشته‌اند که فرمول‌بندی رأس سلولی در مقایسه با فرمول‌بندی مرکز سلولی مزایایی دربر دارد؛ از جمله آنکه چون متغیرها روی سطوح سلول تکه تکه خطی فرض می‌شوند، فرمول‌بندی رأس سلولی قطع نظر از بی‌قاعدگی شبکه از دقت مرتبه دو برخوردار خواهد بود و بالاخره ذخیره‌سازی متغیرها در رأس سلول‌ها نیاز به برون‌یابی فشار استاتیک روی مرزهای جامد که در حل معادله مومنتوم مورد استفاده قرار می‌گیرد را منتفی می‌سازد. طرح یاد شده که در زیر به اختصار تشریح شده نتایجی سریع و با دقتی مطلوب به دست داده است.

برای محاسبه نمو متغیرها در نقاط محاسباتی می‌بایست از میزان تغییر متغیرهای بقایای در هر المان استفاده شود. برای این منظور معادله (1) به طور جداگانه برای هر المان به کار رفته است، به عنوان مثال

تشریح روش عددی و شرایط مرزی

شبکه محاسباتی در شکل (3) و نمای بزرگ شده از یک المان نمونه به صورت ABCD در شکل (4) به نمایش درآمده است. فرآیند حل عددی بر مبنای انتگرال‌گیری رانج کوتای مرتبه چهار منسوب به جیمسون بوده که بر اساس فرمول‌بندی رأس سلولی بسط داده شده است. در این نوع فرمول‌بندی، متغیرها



شکل 3 هندسه جریان، مرزهای میدان محاسباتی و نمایش شبکه تولید شده منطبق بر مرز

تدوین شده تلفیقی از ترم های رسته دو و رسته چهار از متغیرهای بقایی به همراه یک سوئیچ فشار است که با توجه به تغییرات گرادیان فشار در هر ناحیه، اضمحلال مناسب را فعال می سازد.

و سرانجام معادله (۲۰) با استفاده از طرح چهار مرحله ای رانج کوتاه نسبت به زمان، انتگرال گیری شده است در این فرآیند ترم های اضمحلال فقط در اولین مرحله محاسبه شده و در سه مرحله بعد ثابت انگاشته شده اند. در این ارتباط فرآیند بروزکردن متغیرها در گام زمانی n+1 از مقادیر معلوم در گام زمانی n به صورت زیر بوده است:

$$\begin{aligned} \underline{\omega}^0 &= \underline{\omega}^n \\ \underline{\omega}^1 &= \underline{\omega}^0 + \alpha_1 \Delta t (\underline{R}^0 + \underline{D}^0) \\ \underline{\omega}^2 &= \underline{\omega}^1 + \alpha_2 \Delta t (\underline{R}^1 + \underline{D}^1) \\ \underline{\omega}^3 &= \underline{\omega}^2 + \alpha_3 \Delta t (\underline{R}^2 + \underline{D}^2) \\ \underline{\omega}^4 &= \underline{\omega}^3 + \alpha_4 \Delta t (\underline{R}^3 + \underline{D}^3) \\ \underline{\omega}^{n+1} &= \underline{\omega}^4 \end{aligned} \quad (21)$$

در روابط فوق Δt گام زمان محلی، اعداد 1، 2، 3 و 4 مبین مراحل میانی طرح رانج کوتاه و ضرایب $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ به ترتیب 1/4، 1/3، 1/2 و 1 می باشند. طرح یاد شده از دقت مرتبه چهار در زمان و از دقت رسته دو در فضا برخوردار است.

با مراجعه به شکل (۳) چهار نوع شرط مرزی قابل توصیف است: مرز ورودی AH، مرز خروجی DE، دیواره های صلب BC و GF و نیز مرزهای پرریودیک AB، CD، HG و FE شرایط مرزی ورودی و خروجی در این مطالعه از نوع مشخصاتی و برونیابی شونده محسوب شده اند. اگر جریان مادون صوت باشد در ناحیه مرز ورودی سه مشخصه ورودی و یک مشخصه خروجی موجود و عکس این وضعیت در مرز خروجی قابل تصور می باشد. بنابراین بر اساس تئوری مشخصاتی ممکن است سه شرط مرزی در ورودی و

با در نظر گرفتن فلاکس های غیرلزوج F_C و G_C در ارتباط با یک متغیر بقایی مثل دانسیته، سمت راست معادله پیوستگی به صورت زیر برآورد می شود:

$$R_{ij}(\rho) = -\frac{1}{\Omega_{ij}} \oint (F_{ij}(\rho) dy - G_{ij}(\rho) dx) \quad (17)$$

که در آن $F(\rho) = \rho V_Y$ و $G(\rho) = \rho V_X$ می باشند. اعمال فرآیند یاد شده بر معادلات بقا به سیستمی از معادلات دیفرانسیل معمولی، به شکل زیر، منجر می گردد.

$$\left(\frac{\partial \underline{\omega}}{\partial t} \right)_{ij} = R_{ij}(\underline{\omega}) \quad (18)$$

که $R_{ij}(\underline{\omega})$ مبین باقیمانده است. باید تصریح نمود که باقیمانده های محاسبه شده برای متغیرهای بقایی $\underline{\omega}$ ، در هر تکرار، مربوط به سلول های محاسباتی می شوند، در حالی که مقدار متغیرها می بایست در نقاط کنترلی ارائه و به روز گردند، بنابراین باقیمانده ها را با توجه به طرح رأس سلولی به رئوس سلول ها اعمال نموده ایم. این عمل به سادگی و با تقسیم باقیمانده های مربوط به چهار سلول همسایه به طور مساوی و اختصاص دادن نتیجه به رأس مشترک A مطابق شکل (۴) انجام گرفته است؛ به طوری که:

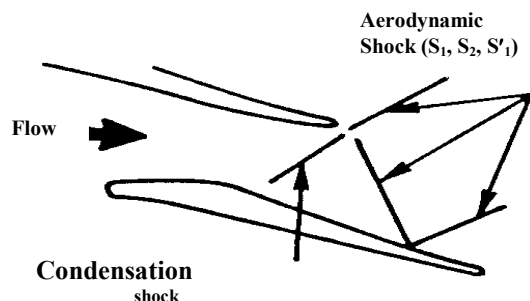
$$R_A(\underline{\omega}) = 0.25 [R_{ij}(\underline{\omega}) + R_{i-1,j}(\underline{\omega}) + R_{i,j-1}(\underline{\omega}) + R_{i-1,j-1}(\underline{\omega})] \quad (19)$$

به این ترتیب طرح مورد نظر از تقارن خاصی در فضا برخوردار شده و در نتیجه معادلات انفصال برای نقطه فرضی A به صورت زیر درآمده است:

$$\left(\frac{\partial \underline{\omega}}{\partial t} \right)_A = R_A(\underline{\omega}) + D_A(\underline{\omega}) \quad (20)$$

در عبارت فوق $D_A(w)$ اضمحلال مصنوعی است که توسط جیمسون و همکارانش [18] برای فرونشاندن ناپایداری های عددی معرفی شده است. خاطر نشان می سازد اضمحلال مصنوعی مورد استفاده در کد

می شود [20]؛ سیال رسیده به لبه فرار از سطح مکش معمولاً جوانه زده شده و حال آنکه سیال رسیده از سطح فشار هنوز فوق سرد و خشک است. در جریان مرطوب نیز کسر رطوبت در امتداد سطح مکش متفاوت از میزان آن در سطح فشار می باشد و در نتیجه سایر خواص نیز متفاوت خواهند بود. در چنین شرایطی فرض منطقی آن بوده است که خطوط جریان مرزی در پایین دست لبه فرار موازی و فقط مقادیر فشار برای نقاط متناظر روی آنها مساوی انگاشته شود [12].



Tracing of schlieren

photograph presented by Ikeda & Suzuki (1973), [19]

شکل ۵ الگوی شوکها بین تیغه های توربین در یک جریان چگالشی

روش حل در ناحیه تک فاز

در قسمتی از جریان که بخار تغییر فاز نداده است جریان تک فاز و کسر رطوبت صفر تلقی می گردد. از این رو، انتالیپی مخصوص، h ، مساوی با h_G و دانسیته کل، ρ ، مساوی با ρ_G بوده و انرژی داخلی به صورت زیر تعیین می شود:

$$e = h_G - P/\rho_G \quad (22)$$

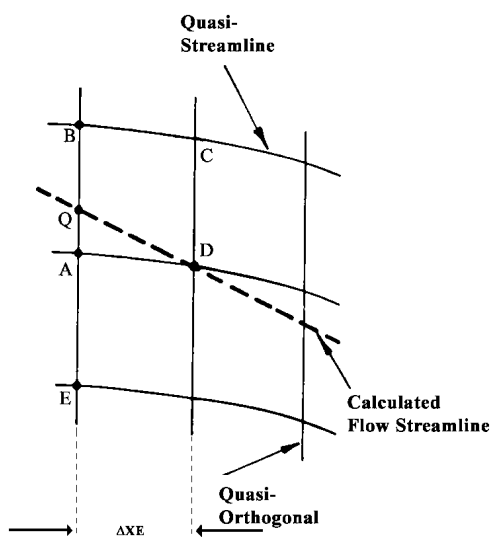
در طرح عددی، دانسیته و انرژی داخلی کل از فرآیند گام زنی وبه عبارتی از حل معادلات بقاء به دست می آیند و انرژی داخلی مخصوص به سادگی تعیین می گردد به طوری که:

یک شرط مرزی در خروجی معلوم و سایر شرایط را به وسیله حل معادلات دیفرانسیل و به صورت عددی تعیین نمود. شرایط مرزی معلوم شده در قسمت ورودی فشار سکون P_0 ، دمای سکون T_0 ، و زاویه جریان ورودی θ_0 ، بوده اند و فشار استاتیک با حل عددی از نقاط داخلی به جریان ورودی برونیابی شده اند و اما شرط تعیین شده در مرز خروجی، فشار استاتیک بوده است که در این حالت فشار کل، دمای کل و زاویه خروجی جریان با حل عددی از نقاط داخلی برونیابی گردیده اند.

مرزهای صلب همان سطوح تیغه ها می باشند که شرط فلاکس صفر بر آنها اعمال شده است و نیز، شرایط پریرودیک به خطوط جریان مرزی در بالادست و پایین دست تیغه ها مربوط می شوند. در این مورد باید اذعان نمود که در محاسبات تیغه به تیغه مبتنی بر فرمول بندی رأس سلولی و تحت شرایطی که جریان عاری از رطوبت و به صورت سوپر هیت باشد، اعمال شرایط مورد نظر با مساوی انگاشتن تمام خواص در نقاط متناظر روی مرزهای یاد شده در بالادست لبه حمله و پایین دست لبه فرار به سادگی قابل اجرا است. اما گاهی اعمال این روش در پایین دست لبه فرار از آن بابت که سیال رسیده به انتهای تیغه از سطح مکش و نیز سیال رسیده از سطح فشار همیشه فرآیند یکسانی را طی نمی نمایند، سؤال برانگیز می شود. به عنوان مثال در صورت وجود شوک در جریان تک فاز و گذر صوتی داخل پاساژ تیغه ها، همان گونه که در متون استاندارد [19] آورده شده است، افت فشار کل و از این رو، مقادیر خواص به روی سطح مکش متفاوت از مقادیر مربوط به سطح فشار خواهند بود. این موضوع در جریان چگالشی حالت جدی تری می یابد. یک نمونه از الگوی شوکها در جریان چگالشی داخل گذرگاه تیغه های توربین به طور شماتیک در شکل (۵) ملاحظه

بقاء همان گونه که بر ناحیه تک فاز حاکم می‌باشند شامل حال قسمت دوفازی نیز می‌شوند. بنابراین، با توجه به شکل (۶) مراحل بروزکردن دانسیته و انرژی در نقطه محاسباتی D برای وضعیت تک فاز و دوفاز یکسان است. اما نحوه محاسبه فشار و دما از مقادیر معلوم دانسیته و انرژی در مقایسه با ناحیه تک فاز کاملاً متفاوت می‌باشد، چرا که این محاسبات در شرایط دوفازی با کسر رطوبت، w ، درگیر بوده و به حل معادلات رشد قطره و تعیین میزان رطوبت نیازمند می‌باشند. خاطر نشان می‌سازد محاسبات مربوط به رشد قطرات بر دیدگاه لاگرانژ متکی بوده و می‌بایست در امتداد خطوط جریان انجام شوند و از این رو، خط جریان QD که از نقطه D می‌گذرد، باید مشخص شود. این عمل با توجه به مقادیر سرعت و معادله خط جریان امکان‌پذیر است؛ در این صورت با معلوم بودن شرایط در ایستگاه BAE که قبلاً به روز شده‌اند، شرایط در نقطه Q قابل میانمایی بوده و زمان لازم برای رسیدن قطرات به نقطه D یعنی δt ، قابل محاسبه خواهد بود.

$$\delta t = \frac{\Delta X_E}{(V_{XQ} + V_{XD}) / 2} \quad (27)$$



شکل ۶ جزئیات خط جریان محاسبه شده

$$e = e_0 - \frac{V_x^2 + V_y^2}{2} \quad (23)$$

برای محاسبه فشار، P ، و دما، T_G ، در هر گام با توجه به مقادیر معلوم انرژی، e ، و دانسیته، ρ ، روش نیوتن رافسون مورد استفاده قرار گرفته است، به این صورت که با استفاده از مقدار معلوم دانسیته و یک دمای حدسی از طریق معادله حالت (۱۲) مقداری برای فشار به دست می‌آید و بر این اساس انتالپی از رابطه (۱۵) و متعاقباً انرژی داخلی از معادله (۲۲) محاسبه می‌گردد. در این حال چنانچه مقدار به دست آمده برای انرژی داخلی با مقدار محاسبه شده از معادله (۲۳) که منتج از فرآیند گام زنی است، مساوی نباشد، دمای حدسی مورد اصلاح قرار می‌گیرد. برای این منظور تابع خطا به صورت زیر در نظر گرفته شده است:

$$F(T_G) = (e_0 - \frac{V_X^2 + V_Y^2}{2}) - (h_G - \frac{P}{\rho_G}) \quad (24)$$

واز این رو، تصحیح دما به صورت زیر میسر گردیده است.

$$\Delta T_G = \frac{-F(T_G)}{dF(T_G)/dT_G} \quad (25)$$

بنابر این:

$$T_{G(new)} = T_{G(old)} + \Delta T_G \quad (26)$$

به محض معلوم شدن مقادیر نهایی فشار، P ، دما، T_G ، و انتالپی، h_G ، نرخ جوانه زایی محاسبه و با حداقل مقدار ممکنه که می‌توان هنوز جریان را تک فاز تصور نمود مقایسه می‌شود. در این تحقیق $J_{min} = 10^{-18}$ Nuclei/Kg.sec منظور شده است.

روش حل در ناحیه دوفازی

در بررسی جریان‌های چگالشی، متغیرهای بقایی بر مخلوط مایع و بخار دلالت داشته و از این رو، معادلات

تغییر لازم در مقادیر دماهای حدسی یعنی ΔT_L ، ΔT_G و $\Delta T_S(P)$ به کمک روش نیوتن رافسون و از طریق توابع یاد شده صورت گرفته‌اند. در این ارتباط مشتق‌های جزئی لازم نظیر $\partial F_1/\partial T_L$ ، $\partial F_1/\partial T_G$ ، $\partial F_1/\partial T_S(P)$ که در فرآیند تکرار نیوتن رافسون به کار می‌آیند، به صورت تحلیلی محاسبه شده و نیز، در مواقعی که تغییرات در نرخ تشکیل و رشد قطرات حساس بوده‌اند مسیر بین Q و D را به تعدادی زیر فاصله مناسب تقسیم نموده و فرآیند تکرار برای هر یک جداگانه انجام گرفته است. در این صورت توزیع دانسیته و انرژی داخلی مخروط در امتداد مسیر QD خطی فرض و گاه تا ۸ زیر فاصله منظور شده است. در انتهای این رشته از محاسبات تمام خواص سیال شامل فشار، دما و انتالپی در نقطه D بروز شده و حل گام زنی زمانی برای تکمیل تکرارهای لازم ادامه یافته است.

بررسی نتایج و بحث

نتایج تجربی موجود ناشی از اندازه‌گیری‌هایی هستند که به منظور تعیین مشخصه عملکرد یک کسکید از توربین بخار در دپارتمان مکانیک دانشگاه بیرمنگام به انجام رسیده‌اند [10]. تجهیزات موجود قادر به تولید بخار فوق اشباع بوده و نیز می‌توانند تحت شرایط کاملاً سوپرهیت عمل نمایند. بدین ترتیب امکان بررسی جریان‌های خشک و مرطوب از گذرگاه تیغه‌ها فراهم شده است.

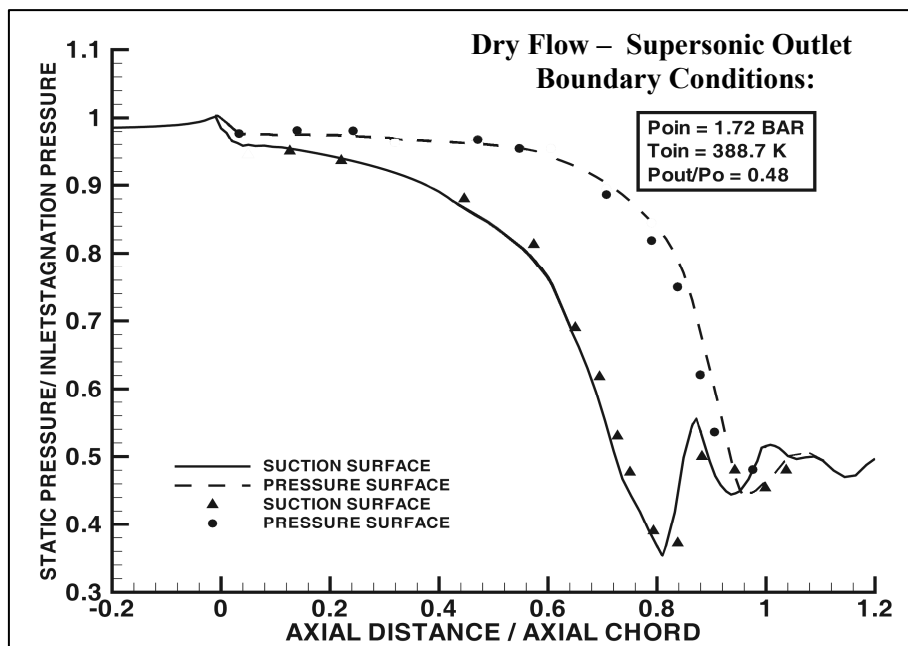
توزیع تئوری و تجربی فشار روی سطوح مکش و فشار تیغه برای جریان سوپرهیت با خروجی مافوق صوت و نیز، برای جریان مرطوب با خروجی مافوق صوت به ترتیب در شکل‌های (۷ و ۸) مقایسه شده‌اند.

خاطر نشان می‌سازد حل نشان داده شده در شکل (۷) به عنوان شرایط اولیه مربوط به حل مرطوب معرفی می‌شود. با توجه به نمودار شکل (۷)، دو افزایش فشار روی سطح مکش ملاحظه می‌شود. نخستین افزایش فشار ناشی از شوک لبه فرار روی سطح فشار

شعاع قطرات، r_Q ، و تعداد قطرات در واحد جرم، N_Q ، در نقطه Q به عنوان شرایط شروع در محاسبه نرخ رشد قطرات در امتداد QD پذیرفته می‌شوند. مقادیر یاد شده اگر در مرحله شروع دوفازی شدن باشند از رابطه شعاع بحرانی قطرات جوانه زده شده و نیز رابطه نرخ تولید جوانه‌ها که در پیوست آورده شده، محاسبه می‌گردند، در غیر این صورت، از روابط رشد و ایجاد قطرات در مراحل قبلی به دست می‌آیند. در هر حال، به طور کلی محاسبات با حدس دمای بخار، T_G ، دمای قطره، T_L ، و نیز دمای اشباع متناظر با فشار بخار یعنی $T_S(P)$ به عنوان متغیرهای مستقل در D شروع می‌شود. بدین ترتیب خواص سیال نظیر ρ_G ، ρ_L ، h_G و نیز تخمین شعاع قطره از طریق تقریب گارماسی (رابطه ۳۳ در پیوست) میسر می‌شود. پس از آن فرآیند حل برای محاسبه رشد قطره به طور رسمی و توسط انتگرال گیری مطابق آنچه که در پیوست تشریح شده، صورت می‌پذیرد. چنانچه در انتهای مرحله انتگرال‌گیری از معادله رشد قطره، ترم رطوبت و مقادیر تخمینی اولیه برای نقطه D ارضاء نشوند، حدس جدیدی برای دماهای سه‌گانه در نظر گرفته شده و فرآیند فوق تکرار می‌گردد.

در عمل مقادیر انرژی، دانسیته و شعاع قطره ناشی از اعمال معادلات بقاء و فرآیند گام زنی زمانی یعنی e'_D ، ρ'_D با Γ'_D مقادیر تخمینی بر اساس دماهای فرضی مقایسه گردیده و اختلاف آنها به صورت توابع F_1 ، F_2 و F_3 بیان شده‌اند:

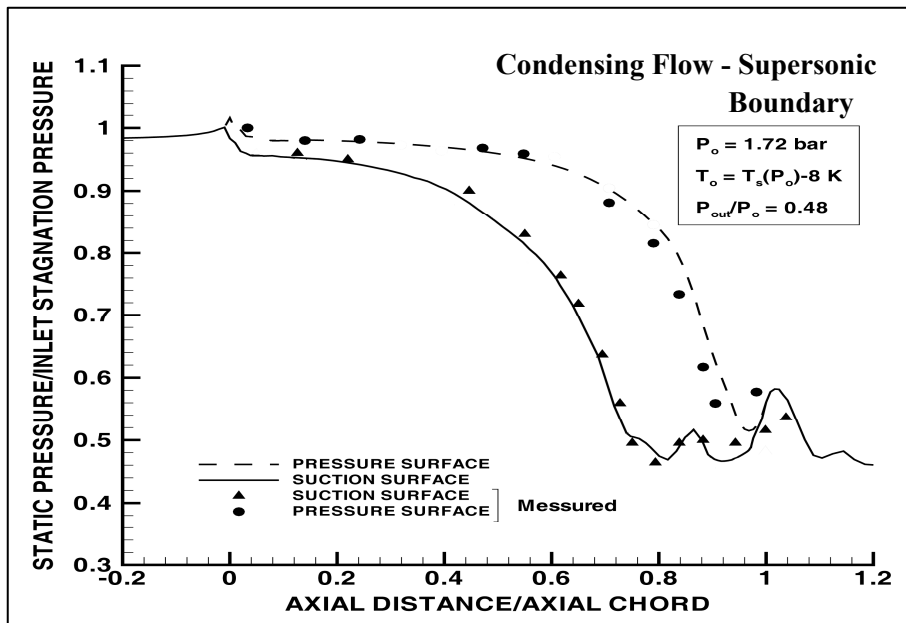
$$\begin{aligned} F_1 &= e_D - e'_D = \left[(1-w)h_G + wh_L - \frac{P}{\rho} \right] - e'_D \\ F_2 &= \frac{1}{\rho_D} - \frac{1}{\rho'_D} = \left[(1-w)v_G + wv_L \right]_D - \frac{1}{\rho'_D} \\ F_3 &= r_D - r'_D \end{aligned} \quad (28)$$



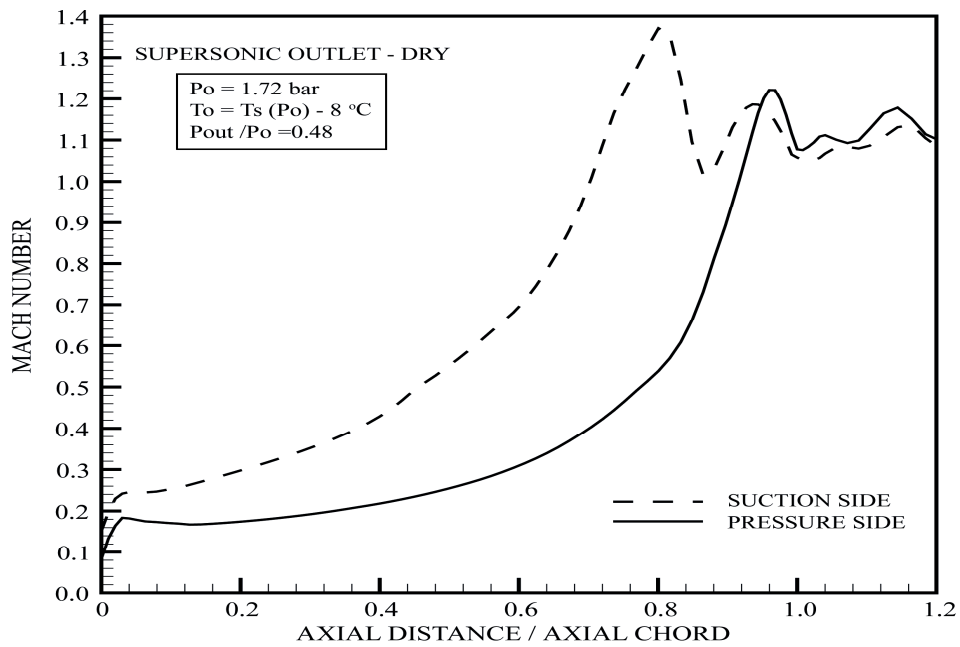
شکل ۷ توزیع فشارهای محاسبه شده و فشارهای اندازه‌گیری شده روی سطوح تیغه (جریان بخار سوپرهیت - خروجی فراصوتی)

بالاتر از توزیع فشار در جریان خشک می‌باشد. توزیع ماخ بر روی سطوح تیغه برای جریان بخار خشک و نیز جریان چگالشی بخار به ترتیب در شکل‌های (۹ و ۱۰) به نمایش گذاشته شده‌اند. تغییرات ماخ بر روی سطوح تیغه در دو نوع جریان مطالب فوق را به خوبی تأیید می‌نماید. کانتورهای ماخ ثابت برای جریان سوپرهیت در شکل (۱۱) و برای جریان چگالشی در شکل (۱۲) ارائه شده‌اند. گفتنی است موقعیت ناحیه تقطیر ناگهانی به درجه فوق سردی بخار ورودی وابسته است و در پایین دست ناحیه یاد شده سیمای عمومی شوک‌های لبه فرار مشابه با جریان خشک است و اختلاف موجود به خاطر تفاوت اعداد ماخ می‌باشد که در جریان مرطوب نسبتاً کم‌ترند.

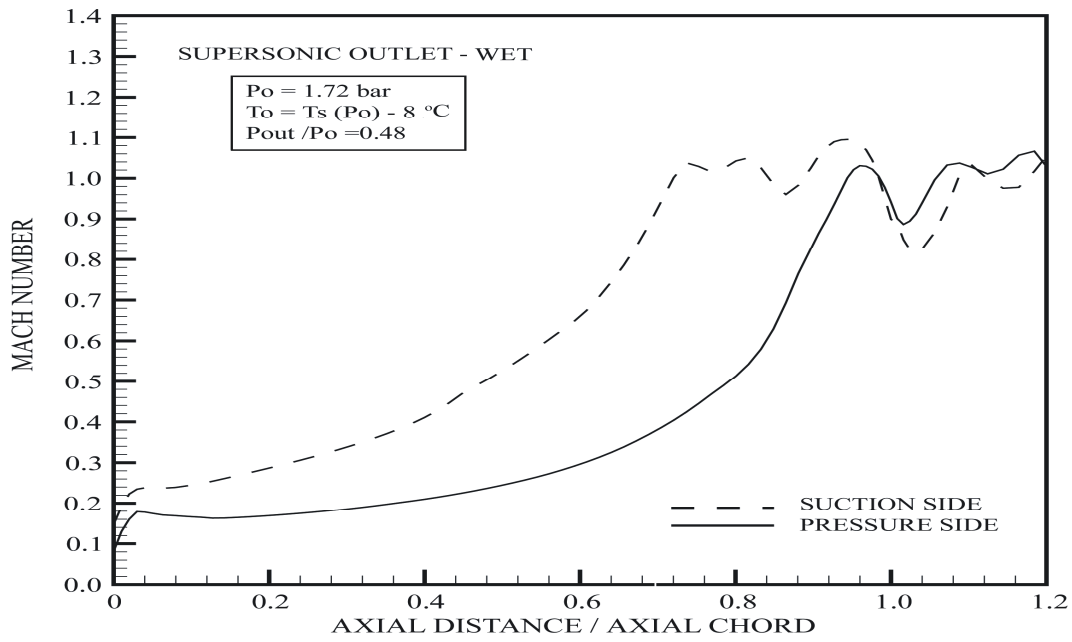
تیغه است که در عرض گذرگاه منتشر شده و پس از برخورد به سطح مکش بازتاب می‌نماید. افزایش فشار دوم ناشی از تشکیل شوک در لبه فرار روی سطح مکش است. در حالت جریان مرطوب، با توجه به شکل (۸)، یک افزایش فشار دیگر بر روی سطح مکش و در فاصله 74% از وتر تیغه به چشم می‌خورد. این افزایش فشار ناشی از تقطیر ناگهانی بخار و آزاد شدن گرمای نهان تقطیر ضمن بازگشت شرایط بخار به شرایط تعادلی است؛ بدین ترتیب در حل تئوری ویژگی‌های جریان به طور ارضاء‌کننده‌ای پیشگویی شده‌اند. با کمی دقت ملاحظه می‌شود که توزیع فشارها ناشی از حل جریان خشک و جریان مرطوب روی سطح مکش تا قبل از ناحیه جوانه‌زایی شبیه به یکدیگر و پس از آن توزیع فشار مربوط به جریان مرطوب به طور قابل ملاحظه‌ای



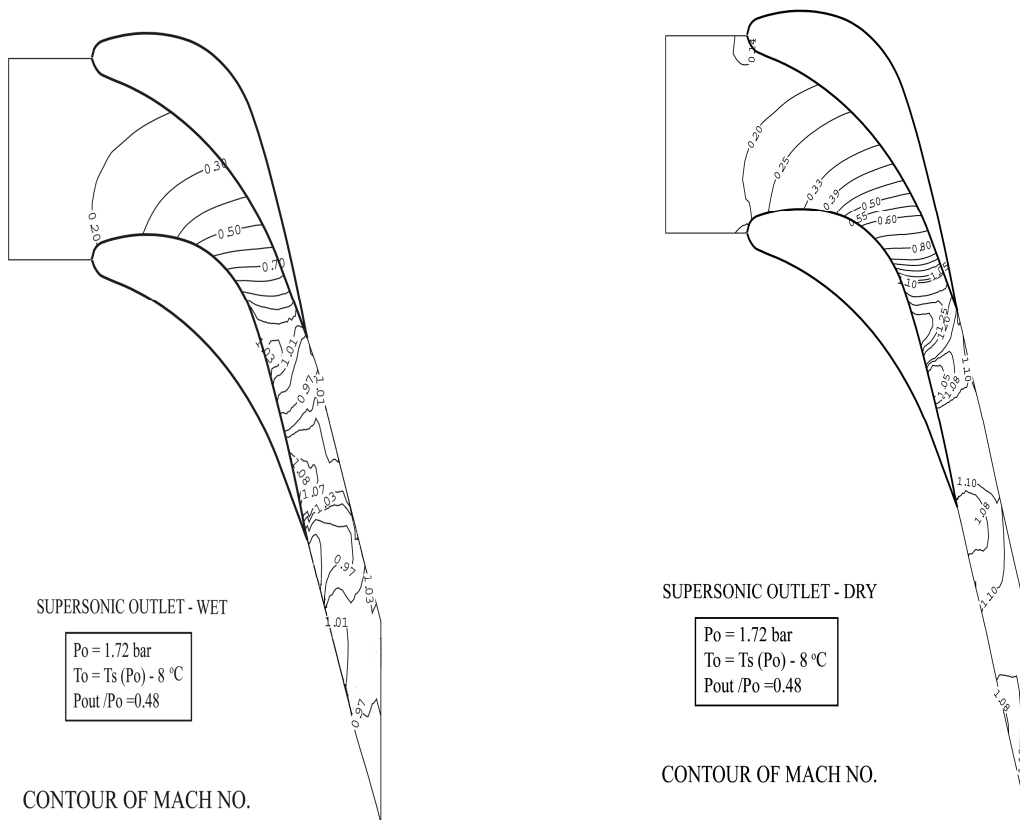
شکل ۸ توزیع فشارهای محاسبه شده و فشارهای اندازه گیری شده روی سطوح تیغه (جریان چگالشی - خروجی فراصوتی)



شکل ۹ توزیع ماخ روی سطوح تیغه (جریان بخار سوپرهیت - خروجی فراصوتی)

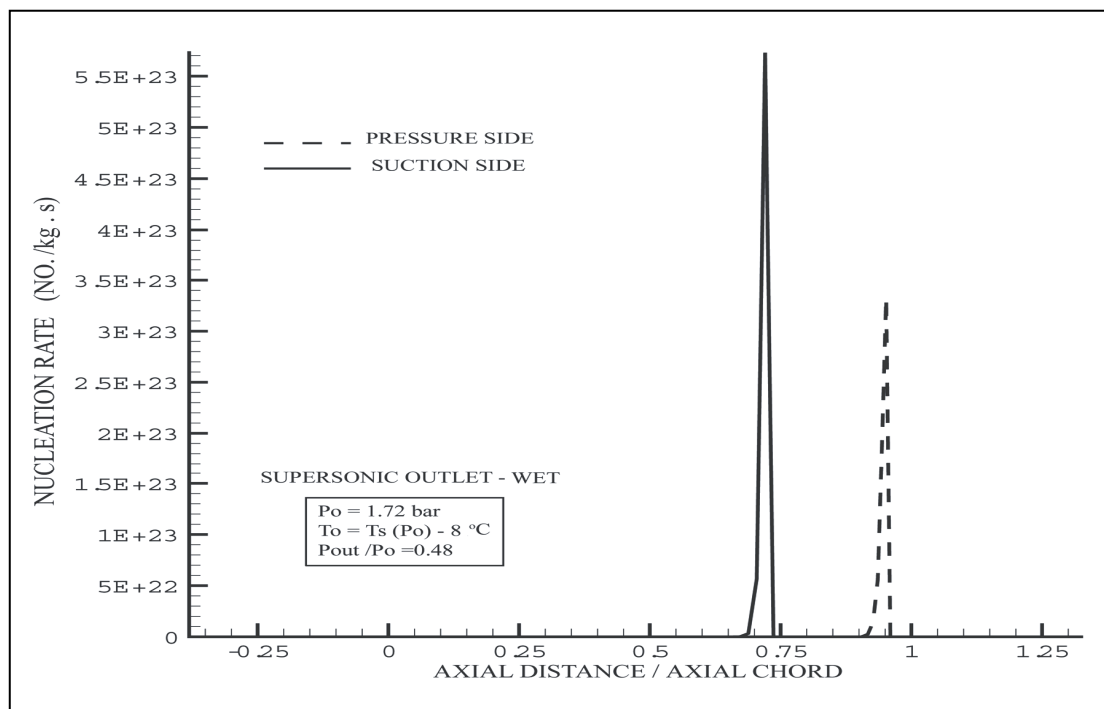


شکل ۱۰ توزیع ماخ روی سطوح تیغه (جریان چگالشی - خروجی فراصوتی)



شکل ۱۲ خطوط ماخ ثابت ناشی از حل جریان چگالشی بخار در گذرگاه تیغه‌ها

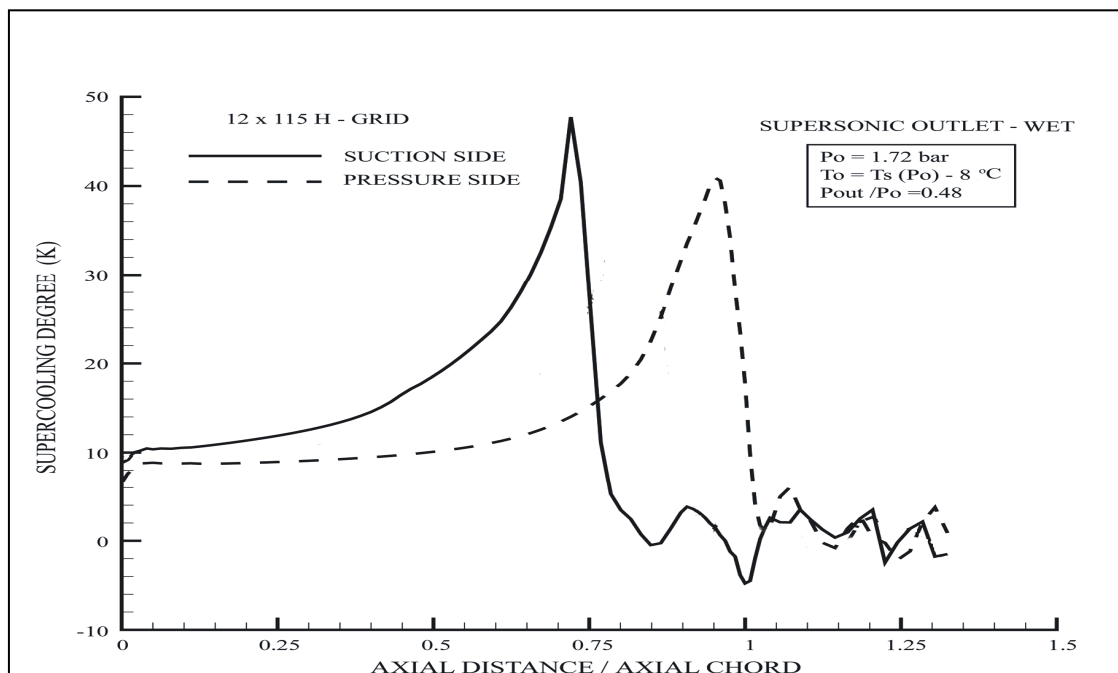
شکل ۱۱ خطوط ماخ ثابت ناشی از حل جریان بخار سوپرهیت در گذرگاه تیغه‌ها



شکل ۱۳ تغییرات نرخ جوانه زایی (جریان چگالشی - خروجی مافوق صوت)

فوق سردی بخار در جریان چگالشی را روی سطوح مکش و فشار ارائه می نمایند. درجه فوق سردی بخار به صورت $(T_s(P) - T_G)$ که $T_s(P)$ دمای اشباع متناظر با فشار حاکم و T_G دمای واقعی بخار می باشد. از بررسی شکل های یاد شده معلوم می شود که جوانه زایی و متعاقباً رشد قطرات بر روی سطح مکش زودتر از سطح فشار حاصل شده که این تقدم از بیشتر بودن نرخ انبساط بر روی سطح مکش ناشی شده است. ضمناً با کمی دقت آشکار می شود که نرخ جوانه زایی پس از رسیدن به یک قله کاسته شده است. باید خاطر نشان کرد که موقعیت قله یاد شده با تغییر انحنای توزیع فشار روی سطوح مکش و فشار منطبق می باشد. با بررسی تغییرات درجه فوق سردی می توان دریافت که با ادامه انبساط میزان درجه فوق سردی بخار تا رسیدن به حداکثر مقدار ممکنه افزایش یافته و پس از به وقوع پیوستن چگالش ناگهانی،

مقایسه کانتورهای ماخ در جریان بخار خشک و جریان بخار مرطوب بیانگر آن است که ویژگی جریان های یاد شده در بالادست گلوگاه (جایی که ماخ در جریان خشک برابر با واحد شده) تقریباً شبیه به یکدیگرند اما، با کمی دقت در حل جریان چگالشی معلوم می شود که خط صوتی در مقایسه با موقعیت گلوگاه کمی به پایین دست جریان منتقل شده و ماخ در گلوگاه فیزیکی کمتر از یک می باشد، پس می توان نتیجه گرفت که جریان یاد شده در سرعتی کمتر از صوت به خفگی رسیده است. در پایین دست گلوگاه جزئیات جریان مرطوب در مقایسه با جریان سوپر هیت متفاوت شده است و همان گونه که اشاره گردید این تفاوت ها ناشی از کاهش ماخ در جریان مرطوب به خاطر آزاد شدن گرمای نهان تقطیر است. شکل های (۱۳ و ۱۴) تغییرات نرخ جوانه زایی و درجه



شکل ۱۴ تغییرات درجه فوق سردی (جریان چگالشی - خروجی مافوق صوت)

آترودینامیکی و الگوی جریان در اطراف تیغه‌ها را تحت تأثیر قرار می‌دهد و نیز، نرخ تغییرات فشار در خطوط مختلف جریان مسیره‌های ترمودینامیکی متفاوتی را برای سیال عامل ایجاد می‌نماید. کیفیت توافق بین نتایج عددی به دست آمده و نتایج آزمایشگاهی موجود نشان دهنده آن است که به کار گرفتن روش تایم مارچینگ جیمسون مبتنی بر فرمول‌بندی رأس سلولی برای محاسبه جریان چگالشی بخار در تیغه‌های توربین، نتایج نسبتاً خوب و قابل اعتمادی را فراهم می‌آورد.

پیوست (رفتار قطره)

الف: تئوری جوانه‌زایی تشکیل قطرات بحرانی در بخار خالص با تئوری جوانه‌زایی همگن بیان شده است [21-24]. به طور خلاصه تغییر انرژی آزاد گیبز

از مقدارش ضمن تمایل بخار به وضعیت تعادلی کاسته شده است. باید توجه داشت که فوق سردی منفی مربوط به بخشی از جریان می‌شود که بخار به لحاظ شرایط حاکم بر جریان نظیر بروز شوک‌ها، فوق گرم شده و تبخیر محلی قطرات به وقوع پیوسته است.

خلاصه و نتیجه‌گیری

مهمترین خصوصیت جریان توأم با جوانه‌زایی ایجاد درجه فوق سردی شدید در بخار و متعاقباً آزاد شدن گرمای نهان به خاطر تقطیر ناگهانی و توأم با ضربه چگالش است که موجب بازگشت سیستم به حالت تعادل ترمودینامیکی می‌شود. فرآیند انتقال حرارت بین قطرات تشکیل شده و بخار اطراف بازگشت ناپذیر تلقی می‌شود و باعث افت ترمودینامیکی می‌گردد. از طرفی همان گونه که ملاحظه شد گرمای آزاد شده رفتار

نرخ جوانه زایی در واحد جرم بخار به صورت زیر تبدیل می شود.

$$J = \frac{J'}{\rho_G} \quad (32)$$

q ضریب تقطیر است. با توجه به نتایج ارائه شده توسط پلامر و هیل [25] ضریب کشش سطحی برای خوشه های مولکولی آب با مقدار مربوط به سطح تخت مایع معادل قرار گرفته شده و ضریب چگالش یک فرض شده است این ترکیب از ضرایب فوق نتایج خوبی را در شرایط مختلف به بار می آورد.

ب: معادلات رشد قطره قطرات فوق بحرانی تمایل به رشد کردن دارند تا به این وسیله به انرژی آزاد گیبز متعادل تری نزدیک شوند. گرمای نهان حاصل از چگالش مولکول ها در وهله اول درون قطرات ظاهر و سپس به واسطه اختلاف دمای قطره و محیط قسمتی از آن به بخار منتقل می گردد. برای محاسبه نرخ رشد قطره می بایست معادلات انتقال حرارت و جرم همزمان حل شوند که از نقطه نظر عددی کار پرزحمتی است.

در تحقیق حاضر برای کاستن حجم محاسبات تقریب گارماسی [26] که دمای قطره را به شعاعش مرتبط می سازد، مورد استفاده قرار گرفته است به طوری که:

$$T_L = T_S(P) - [T_S(P) - T_G] \left(\frac{r}{r^*} \right) \quad (33)$$

در تقریب فوق از تغییر ضریب کشش سطحی و انتالپی تبخیر در بازه T_L تا T_G نادیده انگاشته شده است. با چشمپوشی از اینرسی حرارتی قطره و از طریق بالانس انرژی می توان نرخ رشد قطره را به صورت زیر نتیجه گرفت:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\alpha(T_L - T_G)}{\rho_L(h_G - h_L)} \quad (34)$$

در رابطه فوق α ضریب انتقال حرارت بین سطح قطره و بخار اطراف است. قطرات تشکیل شده اولیه در

برای یک توده از بخار در فشار P و دمای T_G ضمن چگالش به یک قطره آب دارای نقطه ماکزیمی مثل (ΔG^*) است که در شعاعی از قطره معادل با (r^*) که به شعاع بحرانی قطره موسوم است، به وقوع می پیوندد. با کاربرد معادله حالت ویریا تا ضریب دوم می توان نشان داد که:

$$r^* = \frac{2\sigma}{\rho_L RT_G \left\{ \ln \left[\frac{\rho_S(T_G)}{\rho_G} \right] + 2B \left[\rho_S(T_G) - \rho_G \right] \right\}} \quad (29)$$

$$\Delta G^* = \frac{4}{3} \pi r^{*2} \sigma \quad (30)$$

قله منحنی ΔG بر حسب شعاع به عنوان مانعی که تغییر فاز را مقید می سازد، شناخته شده است. تئوری و مشاهدات هر دو بیانگر آنند که افزایش نسبت فوق اشباع $(S = P/P_S(T_G))$ موجب افزایش نرخ بمباران مولکولی، کاهش r^* و متعاقباً کوتاه شدن قله ΔG به اندازه ای می شود که در این شرایط احتمال آنکه تعدادی از قطرات زیر بحرانی به طور اتفاقی تا اندازه فوق بحرانی رشد نمایند به یک می رسد و در این حالت جوانه زایی همگن فرآیندی مؤثر شده و تبدیل فاز به وقوع می پیوندد [22].

در تحقیق حاضر نرخ جوانه زایی به عنوان تعداد قطرات بحرانی تشکیل شده در واحد حجم سیال و در واحد زمان مأخوذ از تئوری کلاسیک جوانه زایی می باشد:

$$J' = q \frac{\rho_G^2}{\rho_L} \sqrt{\frac{2\sigma n^3}{\pi}} \cdot \exp \left\{ \frac{16\pi n \sigma^3}{3\rho_L^2 (RT_G)^3 \left\{ \ln \left[\frac{P}{P_S(T_G)} \right] \right\}^2} \right\} \quad (31)$$

$$c = r^* (r^* + 1.59\bar{1}) [h_G - c_L (T_G - T_D)]$$

$$d = \left(\frac{\lambda}{\rho_L} \right) [T_S(P) - T_G] \quad (38)$$

معادله (۳۷) تغییرات شعاع قطره با زمان را نسبتاً خوب برآورد می‌سازد و علی‌رغم آنکه تحلیلی است به علت وجود ترم لگاریتمی می‌بایست از طریق تکرار حل شود [27].

ج: تقریب مستقیم در این تحقیق برای آن قسمت از حوزه محاسباتی که درصد رطوبت بالاست ($w > 1\%$) از تقریب ساده‌تری برای محاسبه رشد قطره استفاده شده است. در این حالت رشد قطرات کند شده و از این رو T_L ، و در نتیجه h_L را می‌توان همانند شرایط بخار نظیر T_G و h_G روی گام محاسباتی ثابت انگاشت. به این ترتیب معادله (۳۶) به طور مستقیم قابل انتگرال‌گیری می‌شود به طوری که:

$$\frac{1}{2} (r^2 - r_1^2) + (1.59\bar{1}) (r - r_1) = \frac{\lambda}{\rho_L} \left(\frac{T_L - T_G}{h_G - h_L} \right) \delta \quad (39)$$

و بالاخره شعاع قطره (r) به صورت زیر استخراج شده است:

$$r = -1.59\bar{1} + \sqrt{(1.59\bar{1})^2 + r_1 [r_1 + 2(1.59\bar{1}) + \frac{\lambda}{\rho_L} \left(\frac{T_L - T_G}{h_G - h_L} \right) \delta t}} \quad (40)$$

با به دست آمدن شعاع قطره و جایگذاری آن در تقریب گارمسی، رابطه (۳۳)، دمای قطره به دست می‌آید. این دما در مرحله بعدی به عنوان دمای ثابت روی گام منظور شده است.

مقایسه با مسیر پویش آزاد مولکول‌های بخار کوچکند ولی ضمن رشد کردن می‌توانند از آن بزرگتر شوند. در این رابطه عبارت زیر که به گارمسی منسوب است تمام بازه یاد شده را می‌پوشاند و لذا در این کار مورد استفاده قرار گرفته است:

$$\alpha = \frac{\lambda}{r (1 + 3.18Kn)} \quad (35)$$

در معادله فوق $Kn = \bar{1}/2r$ عدد نودسن می‌باشد. با استفاده از رابطه‌های (۳۳) و (۳۵) به منظور

حذف T_L و α از رابطه (۳۴) نتیجه می‌شود که:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\lambda}{(r + 1.59\bar{1}) \rho_L} \left(\frac{T_L - T_G}{h_G - h_L} \right) \quad (36)$$

اگر شرایط بخار به عنوان محیط، ثابت انگاشته شود تنها متغیرهای سمت راست در معادله فوق T_L ، r و h_L خواهند بود. چنانچه h_L را بر حسب T_L بیان نماییم و معادله (۳۳) را برای جایگزینی T_L در رابطه (۳۶) مورد استفاده قرار دهیم، عبارت حاصله را می‌توان پس از انتگرال‌گیری تحلیلی به شکل زیر ارائه کرد:

$$\frac{a}{2} (r^2 - r_1^2) + b(r - r_1) + c \ln \left(\frac{r - r^*}{r_1 - r^*} \right) = d \cdot \delta t \quad (37)$$

در این عبارت r_1 مقدار اولیه شعاع در $t=t_1$ و $\delta t = t - t_1$ و T_D دمای مبنا معادل $273.15^\circ K$ می‌باشد و نیز:

$$a = h_G - c_L [T_S(P) - T_D]$$

$$b = (r^* + 1.59\bar{1}) \{ h_G - c_L [T_S(P) - T_D] \} + c_L r^* [T_S(P) - T_G]$$

فهرست نشانه‌ها

B	ضریب دوم ویریا	r	شعاع قطره
C	گرمای ویژه	t	زمان
E_C, G_C	بردارهای شار در معادله (۱)	T	دما
G	انرژی آزاد گینر	$T_S(P)$	دمای اشباع در فشار P
h	انتالپی مخصوص	v	حجم مخصوص
j	نرخ تشکیل قطرات در واحد جرم	V_X, V_Y	مؤلفه‌های سرعت در جهات X و Y
Kn	عدد نودسن	w	نسبت رطوبت
\bar{I}	مسیر پویش آزاد مولکول‌ها	x, y	مختصات کارتیزین
L	گرمای نهان تقطیر آب	α	ضریب انتقال حرارت
N	تعداد مولکول‌ها در واحد جرم سیال	λ	قابلیت هدایت حرارتی
N	تعداد قطرات در واحد جرم سیال	ρ	دانسیته
P	فشار	$\rho_S(T)$	دانسیته بخار اشباع در دمای T
$P_S(T_G)$	فشار اشباع بخار در دمای T_G	σ	ضریب کشش سطحی
Q	ضریب چگالش	$\underline{\omega}$	بردار متغیرهای بقایی
R	ثابت گاز برای بخار آب	Ω	مساحت سلول محاسباتی
*	نماد مقادیر بحرانی		زیرنویس‌ها
		O	شرایط سکون
		G	فاز بخار
		L	فاز مایع
		r	قطره‌ای به شعاع
		s	اشباع

مراجع

- Haller, B.R., Unsworth, R.G., Walters, P.T., and Lord, M.J., "Wetness measurement in a model multistage low pressure steam turbine", Proceeding of BNES Conference on Technology of Turbine Plant Operating with Wet Steam, (British Nuclear Energy Society, London), pp. 137-145, (1989).
- Walters, P., "Wetness and efficiency measurement in L.P. turbines with an optical probe as an aid to improving performance", ASME paper 85-JPGC-GT-9, (1985).

3. Kleitz, A., Laali, A.R., and Courant, J.J., "Fog droplet size measurement and calculation in steam turbines", Proceeding of BNES/IMEchE Conference on Technology of Turbine Plant Operating with Wet Steam, (British Nuclear Energy Society, London), pp. 177-188, (1988).
4. Tanuma, T., and Sakamoto, T., "The removal of water from steam turbine stationary blades by suction slots", In proceeding of IMechE Conference on Turbomachinery, Mechanical Engineering Publication, London, Vol. 3, paper C423/022, pp. 179-189, (1991).
5. Dibelius, G.H., Mertens, K., Pitt, R.V., and Strauf, E., " Investigation of wet steam flow in turbines", In proceeding of IMechE Conference on Turbomachinery – Efficiency Prediction and Improvement, Cambridge, (Mechanical Engineering Publication, London), C271/87, pp. 135-143, (1986).
6. Bakhtar, F., and Mohammadi Tochai, M.T., "An investigation of two – dimensional flows of nucleating and wet steam by the time – marching method", Int. J. Heat and Fluid Flow, pp.5-18, (1980).
7. Bakhtar, F., and Bamkole, B.O., "An examination of the throughflow of steam in a turbine stage by a time – marching method", Proc. Instn Mech. Engrs, Part A, pp. 233-243, (1989).
8. Yeoh, C.C., and Young, J.B., "Non-equilibrium throughflow analysis of low-pressure wet steam turbines", Trans. ASME, J. Engng for Gas Turbines and power, pp. 716-724, (1984).
9. Young, J.B., "Two – dimensional Non-equilibrium wet steam calculations for nozzles and turbines cascades", Trans. ASME, J. Turbomachinery, pp. 569-579, (1992).
10. Bakhtar, F., Mahpeykar, M.R., and Abbas, K.K., "An investigation of nucleating flows of steam in a cascade of turbine blading - theoretical treatment", Transactions of the ASME. Vol.117, (1995).
11. Bakhtar, F., and Mahpeykar, M.R., "On the performance of a cascade of turbine rotor tip section blading in nucleating steam", ImechE ,vol. 211, part C , (1997).
12. Moheban, M., and Young, J.B., "A time – marching method for the calculation of blade – to – blade non – equilibrium wet steam flows in turbine cascades", C76/84 ImechE, (1984).
13. Subramanina, S.V., and Bozzola, R., "Application of Runge Kutta time marching scheme for the computation of transonic flows in turbomachines", AIAA, propulsion conference, Monterey California, July (1985).
14. Keenan, J.H. , Keyes, F.G. , Hill, P.G. and Moore, J.G., " Steam tables, thermodynamic properties of water including vapour, liquid and solid phases", John Wiley and Sons, Inc (1978).
15. Martinelli, L., "Calculations of viscous flows with a multigrid method", Ph.D. Thesis, Princeton University, (1987).
16. Dick, E., "Introduction to finite volume techniques", V.K.I Lecture series, (1990).

17. Swanson, R.C., and Radespiel, R., "Cell center and cell vertex multigrid scheme for the Navier Stokes equations", AIAA Journal, May (1991).
18. Jameson, A., Schmidt, W., and Turkel, E., "Numerical solution of Euler equations by finite volume method using Runge Kutta time-stepping scheme", AIAA Journal, 81: 1259-1265, June (1981).
19. Gostelow, J.P., "Cascade aerodynamics", Pergamon, (1984).
20. Skillings, S.A., "Condensation phenomena in a turbine blade passage", J. Fluid Mech. vol. 200, pp. 409 – 424, (1989).
21. Frenkel, J., "Kinetic theory of liquids", (Oxford University Press), (1946).
22. MacDonald, J.E., "Homogeneous nucleation of vapour condensation", Am. J. Phys. pp. 817-870, (1962-63).
23. Courtney, W. A., "Remarks on homogeneous nucleation", J.Chem. Phys., 35: 2249-2260, (1961).
24. Kantrowitz, A., "Nucleation in very rapid vapour expansion", J.Chem. Phys. , 19(9): 1097-1100, (1951).
25. Plummer, P.L.M., and Hale, B.N., "Molecular models for prenucleation water clusters", J.Chem. Phys., 56(9):4329- 4334 (1972).
26. Gyarmathy, G., "Zur Wachstumsgeschwindigkeit Kleiner Flüssigkeitstropfen in einer Übersättigtm – Atmosphäre", ZAMP, 14, 280, (1963).
27. Teymourtash, A.R., and Mahpeykar, M.R. , "An investigation of two dimensional , two – pahse flow of steam in a cascade of turbine blading by the time – marching method", Amirkabir J. of science & technology, Vol.14. 56 – C , (2003).