Archive of SID

بررسی و حل عددی مدل‌های مختلف جریان آشفته و تصحیح شده Pope در فوران آزاد

ناصر ثقه‌الاسلامی*+ وحمید علیزاده
زاهدان، دانشگاه سیستان و بلوچستان، گروه مهندسی شیمی، کد پستی ۹۸۱۶۴

چکیده: مخلوط کردن توسط فوران آزاد (free jet) در صنایع مختلفی مانند محفظه های احتراق ، مخلوط کردن مایعات و در راکتورها به کار گرفته می‌شود. دینامیک سیالات این سیستم مغشوش بوده و به دلیل آنکه بتوان مخلوط کردن را به شرایط بهینه ای رساند می‌بایستی اطلاعات کافی از دینامیک سیالات و عمل‌های متقابل که در سیال رخ می‌دهد داشته باشیم. هدف از این تحقیق، حل عددی معادلات مدل‌های k-ε (با تصحیح Pope) ، k – ω , طول مخلوط و انتخاب مناسب‌ترین مدل در جریان آشفته برای سه نوع فوران صفحه‌ای ، فوران محوری و فوران شعاعی می‌باشد. در حل معادله‌های انفصال ذکر شده از روش سیمپل و خط به خط که ترکیبی از روش گاوس و ماتریس سه‌قطری می‌باشد کمک گرفته شده است. در این مقاله همچنین مقایسه ای نیز از نتایج به دست آمده از تحقیق حاضر و داده های آزمایشگاهی صورت پذیرفته است.

واژه‌های کلیدی : فوران آزاد ، جریان مغشوش ، مدل طول مخلوط ، مدل k – ω، مدل k – ε، فوران صفحه ای ، فوران محوری، فوران شعاعی ، روش سیمپل، روش تصحیح پاپ .

KEY WORDS: *Free jet, Turbulent, Mixing length, k – ω, k – ε, Plane jet, Round jet,Radial jet, Radial jet, SIMPLE, Pope's method.*

مقدمه

بیشتر تئوری جریان آشفته و مدل کردن آن در ابتدا با بررسی‌های دقیق از ساختمان آشفتگی لایه های برشی نازک توسعه یافته است. در چنین جریان‌هایی تغییرات زیاد سرعت در مناطق نازک متمرکز شده است. یکی از ساده ترین, معتبرترین و موفق‌ترین مدل به کار برده شده در جریان آشفته، مدل k – ε بوده که دارای کاربردهای وسیعی می‌باشد. این مدل در محاسبه مجموعه گسترده ای از جریان‌های لایه برشی نازک و چرخش مجدد, بدون اینکه احتیاجی به تنظیم مورد به مورد ثابت‌های مدل باشد، موفقیت چشمگیری داشته است. عملکردهای مدل, به ویژه برای جریان هایی که در آن تنش های برشی رینولدز اهمیت بیشتری دارد, خوب بوده است. این موضوع شامل محدوده وسیعی از جریان‌ها با کاربردهای مختلف صنعتی بوده, که این مسأله عمومیت آن را نشان داده و برای جریان‌های غیر محصور (مانند فوران آزاد) عملکرد خوبی را از خود نشان داده است [۱]. تحقیقات انجام شده در جریان فوران آزاد نشان می‌دهد که به طور معمول از دو ناحیه تشکیل شده است. دنباله‌ای که بلافاصله بعد از جسم تشکیل می‌شود و دیگری هسته پتانسیل می‌باشد که در نزدیکی محل تزریق فواره قرار داشته و به نسبت پیچیده بوده و بستگی به جزئیات شکل بدنه شیپوره دارد [۲]. اما در روش‌های عددی به کار رفته برای محاسبه میدان سرعت در فوران آزاد، از مدل k – ε با تصحیح Pope استفاده نشده است [۳]. ولی با توجه به اینکه در جریان‌های گردابه‌ای(1) شدید فرض ثابت بودن ضریب C_μ در مدل

* عهده دار مکاتبات
+ E-mail:
(۱) Vortex

www.SID.ir

Archive of SID

$k-\varepsilon$ صحیح نمی‌باشد، لذا تعدادی از محققین در صدد تصحیح مدل $k-\varepsilon$ استاندارد بر آمدند.

در این مدل‌ها به طور عموم به اصلاح C_μ به صورت ارایه یک رابطه غیر خطی و با حاصل ضرب C_μ در توابع نمایی پرداخته شده است که از این میان مدل تصحیح شده Pope را می‌توان نام برد [۴]. در این تحقیق از این روش اصلاح شده مدل $k-\varepsilon$ استفاده و دو مدل دیگر $k-\omega$ و طول مخلوط مورد استفاده و بررسی قرار گرفته و با مقادیر تجربی مقایسه گردیده است.

معادلات حاکم بر جریان و مفروضات

فوران آزاد به عنوان جریانی از سیال در نظر گرفته می‌شود که از مجرایی خارج شده و به ناحیه بزرگتری وارد می‌شود که محتوی سیالی است که در اینجا سرعت آن صفر در نظر گرفته می‌شود. در این تحقیق حالت‌های فوران صفحه‌ای[۱]، فوران محوری[۲] و فوران شعاعی[۳] با استفاده از برنامه Wilcox مورد بررسی قرار گرفته است [۵]. فرموله کردن با استفاده از حجم کنترل انجام شده به طوری که در این روش میدان محاسباتی به تعدادی حجم کنترل به گونه‌ای تقسیم می‌شود که هر گروه را یک حجم کنترل احاطه کرده و حجم های کنترل دارای حجم های مشترک با یکدیگر نباشند. حل معادلات انفصال بصورت الگوریتم SIMPLE و با استفاده از روش خط به خط که ترکیبی از روش تکرار-Gauss Seidel و الگوریتم ماتریس سه قطری (TDMA) است صورت می‌پذیرد. حل عددی پروفیل سرعت در شکل‌های هندسی مختلف با استفاده از سه مدل $k-\varepsilon$ ، $k-\omega$, طول مخلوط و مقایسه با حل تجربی انجام می‌گیرد. سیال انتخابی ما آب که ویسکوزیته آن 10^{-3} نیوتن ثانیه بر متر مربع و دانسیته ۱۰۰۰ کیلوگرم بر مترمکعب می‌باشد. جریان سیال ماندگار، دو بعدی و مغشوش فرض و محاسبات در مختصات کارتزین صورت پذیرفته است.

به دلیل متقارن بودن جریان، نیمی از دامنه جریان مورد بررسی قرار گرفته و سرعت ورودی، طول، ارتفاع و محدوده جریان به ترتیب به صورت زیر انتخاب شده‌اند:

$U_{in}=$۳ متر بر ثانیه $x=$ ۵۰ سانتی‌متر $y=$ ۱۲/۵ سانتی‌متر $y/x=$۰/۲۵

شرایط مرز برای $0 \le y < \infty$ به صورت زیر تعریف شده است:

$$y\to\infty \quad \Rightarrow \quad u(x,y)\to 0 \qquad (۱)$$

$$y=0 \quad \Rightarrow \quad \partial u/\partial y=0 \qquad (۲)$$

معادلات به کار رفته برای تجزیه فوران آزاد در شرایط آشفته را می‌توان به صورت زیر بیان نمود [۵]:

$$\rho\frac{\partial\phi}{\partial t}+\rho\frac{\partial(u\phi)}{\partial x}+\rho\frac{\rho(v\phi)}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma_\phi\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\Gamma_\phi\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)+S_\phi \qquad (۳)$$

که در آن ϕ بیانگر متغییرهای u، v و T بوده و S_ϕ نیز جمله منبع مربوط می‌باشد.

معادلات مدل‌های دو معادله $k-\varepsilon$ و $k-\omega$ را به صورت زیر می‌توان بیان نمود [۶].

مدل $k-\omega$

$$\rho u\frac{\partial k}{\partial x}+\rho v\frac{\partial k}{\partial y}=\tau_{xy}\frac{\partial u}{\partial y}-\beta^*\rho\omega k+\frac{1}{y^j}\frac{\partial}{\partial y}\left(y^j\ \sigma^*\mu_T\frac{\partial k}{\partial y}\right)$$

$$\rho u\frac{\partial\omega}{\partial x}+\rho v\frac{\partial\omega}{\partial y}=\alpha\frac{\omega}{k}\tau_{xy}\frac{\partial u}{\partial y}-\beta\rho\omega^2+\frac{1}{y^j}\frac{\partial}{\partial y}\left(y^j\ \sigma^*\mu_T\frac{\partial\omega}{\partial y}\right) \qquad (۴)$$

که در اینجا :

$$\mu_T=\rho k/\omega;\ \alpha=5/9;\ \beta=9/100;\ \sigma=1/2$$

مدل $k-\varepsilon$

$$\rho u\frac{\partial k}{\partial x}+\rho v\frac{\partial k}{\partial y}=\tau_{xy}\frac{\partial u}{\partial y}-\rho\varepsilon+\frac{1}{y^j}\frac{\partial}{\partial y}\left(y^j\ \frac{\mu_T}{\sigma_k}\frac{\partial k}{\partial y}\right) \qquad (۵)$$

$$\rho u\frac{\partial\varepsilon}{\partial x}+\rho v\frac{\partial\varepsilon}{\partial y}=C_{\varepsilon 1}\rho\frac{\varepsilon}{k}\tau_{xy}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2-C_{\varepsilon 2}\rho\frac{\varepsilon^2}{k}+\frac{1}{y^j}\frac{\partial}{\partial y}\left(y^j\ \frac{\mu_T}{\sigma_\varepsilon}\frac{\partial\varepsilon}{\partial y}\right)$$

که در اینجا:

$$\mu_T=C_\mu\rho k^2/\varepsilon\quad;C_{\varepsilon 1}=1/44\quad;C_{\varepsilon 2}=1/92\ ;$$
$$C_\mu=1/99\quad;\sigma_k=1/0\quad;\sigma_\varepsilon=1/3\quad;\tau_{xy}=C_\mu k^2/\varepsilon$$

برای حل شبیه سازی جریان برشی فوران آزاد خواهیم داشت:

$$U(x,y)=\frac{J^{1/2}}{x^{(j+1)/2}}\upsilon(\eta)\ ;\ k(x,y)=\frac{J}{x^{j+1}}K(\eta) \qquad (۶)$$
$$\omega(x,y)=\frac{J^{1/2}}{x^{(j+3)/3}}W(\eta)\ ;\varepsilon(x,y)=\frac{J^{3/3}}{x^{3j+5}}E(\eta)$$

(۱) Plane jet
(۲) Round jet
(۳) Radial jet

www.SID.ir

Archive of SID

جدول ۱- پارامترهای جریان برشی آزاد

جریان	S_u	S_k	S_w	S_e	j	$\nu(\eta)$
فوران صفحه ای	۰/۵υ	۱/۰	۱/۵	۲/۵υ	۰	$1/2\int_0^\eta \nu(\eta)d\eta$
فوران محوری	۱/۰	۱/۰	۲/۰	۴/۰	۱	$1/n\int_0^\eta \nu(\eta)d\eta$
فوران شعاعی	۱/۰	۰/۵υ	۰/۷۵υ	۳/۰	۱	$1/n\int_0^\eta \nu(\eta)d\eta$

به طوری که J شار خاص ممان[1] و η به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$J = 2\pi^j \int_0^\infty u^2 y^j dy \qquad ; \qquad \eta = y/x$$

در معادلات بالا j= ۰ برای فوران صفحه ای و j= ۱ برای فوران محوری و شعاعی می‌باشد.
از ترکیب معادلات (۴) ، (۵) و (۶) خواهیم داشت:

مدل k – ω

$$\nu\frac{\partial k}{\partial\eta}-\frac{1}{\eta^j}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\eta^j\sigma^* N\frac{\partial K}{\partial\eta}\right)=S_k K+N\left(\frac{\partial\upsilon}{\partial\eta}\right)^2-\beta^* W K$$
$$\nu\frac{\partial w}{\partial\eta}-\frac{1}{\eta^j}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\eta^j\sigma N\frac{\partial W}{\partial\eta}\right)=S_\omega W+\alpha\frac{W}{K}N\left(\frac{\partial\upsilon}{\partial\eta}\right)^2-\beta W^2 \qquad (۷)$$

که در اینجا $N = K/W$ می‌باشد.

مدل k – ε

$$\nu\frac{\partial k}{\partial\eta}-\frac{1}{\eta^j}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\eta^j\frac{N}{\sigma_k}\frac{\partial K}{\partial\eta}\right)=S_k K+N\left(\frac{\partial\upsilon}{\partial\eta}\right)^2-E$$
$$\nu\frac{\partial E}{\partial\eta}-\frac{1}{\eta^j}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\eta^j\frac{N}{\sigma_k}\frac{\partial E}{\partial\eta}\right)=S_\varepsilon E+C_{\varepsilon1}\frac{E}{K}N\left(\frac{\partial\upsilon}{\partial\eta}\right)^2-C_{\varepsilon2}\frac{E^2}{K} \qquad (۸)$$

ضرایب معادلات بالا با توجه به جدول ۱ می‌باشند.
در اینجا $\upsilon(\eta)$ سرعت بدون بعد بر حسب η می‌باشد و $\eta = y/x$ نسبت انتشار برای حالت‌های مختلف بر اساس جدول ۲ می‌باشند.
معادله دیگر به کار رفته در این تحقیق مدل طول مخلوط می‌باشد که روابط آن به قرار زیر می‌باشد:

$$\mu_T = \mu_T \qquad (y \le y_m) \qquad (۹)$$
$$\mu_T = \mu_{To} \qquad (y > y_m)$$

به طوریکه y_m کوچکترین مقدار به ازای $\mu_{Ti} = \mu_{To}$ می‌باشد.
مقدار μ_T در لایه داخلی μ_{Ti} و لایه خارجی μ_{To} است. البته لازم به ذکر است که μ_T در هر لایه بر اساس آزمایش به دست می‌آید.

www.SID.ir

Archive of SID

لایه داخلی:

$$\mu_{Ti} = \rho\, l_{mix}^2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 \right]^{1/2} \quad (۱۰)$$

که در اینجا:

$$l_{mix} = K\, y \left(1 - e^{-y^+/A^+} \right)$$

لایه خارجی:

$$\mu_{To} = \alpha\, \rho\, u_e\, \delta_\upsilon^*\, F_{kleb}(y, \delta) \quad (۱۱)$$

ضرایب ثابت در معادله بالا به قرار زیر می‌باشند:

$$K = 0/41 \quad ; \alpha = 0/0168 \quad ;$$

$$A^+ = 26 \left[1 + y \left(\frac{\partial p/\partial x}{\rho u_r^2} \right) \right]^{-1/2}$$

جدول ۲- نسبت انتشار جریان‌های برشی

جریان	مدل $k-\omega$	مدل $k-\varepsilon$	مقادیر اندازه گیری شده
فوران صفحه‌ای	۰/۰۹–۰/۱۳۶	۰/۱۰۹	۰/۱۰۰–۰/۱۱۰
فوران محوری	۰/۰۷۳–۰/۱۳۶	۰/۱۲۰	۰/۰۸۶–۰/۰۹۵
فوران شعاعی	۰/۰۶۸–۰/۳۳۲	۰/۱۲۷	۰/۰۸۲–۰/۰۹۳

(۱) Specific momentum

شکل ۱- پروفایل سرعت برای سه مدل و مقایسه آن با روش Wygnanski - Fiedler برای jet از نوع radial

تابع F_{kleb} متناوب Klebanoff می‌باشد که از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$F_{kleb}(y, \delta) = \left[1 + (y/\delta)^6 \right]^{-1}$$

همچنین u_e (سرعت لبه لایه مرزی) و δ_υ^* (ضخامت لایه سرعت) به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\delta_\upsilon^* = \int_0^\delta (1 - u/u_e)\, d$$

نتایج و بحث

با استفاده از این برنامه Wilcox و برای یک شبکه ۵۰۰ نقطه‌ای، سه مدل $k - \varepsilon$ با تصحیح Pope، $k - \omega$ و طول مخلوط برای شبیه سازی جریان آشفته در فوران آزاد و برای سه حالت فوران صفحه‌ای، محوری و شعاعی مورد بررسی قرار گرفته است. با توجه به اینکه هدف از این تحقیق مقایسه مدل‌های مختلف آشفته می‌باشد، هر سه مدل در یک نمودار رسم و با نتایج آزمایشگاهی مقایسه شده‌اند. شکل ۱ مقایسه سه مدل را برای حالت فوران شعاعی نشان می‌دهد. در این نمودار مدل $k - \omega$ اختلاف زیادی با مقادیر آزمایشگاهی Wagnanski-Fielder از خود نشان می‌دهد [۵]. در صورتیکه در مدل $k - \varepsilon$ این انحراف ناچیز می‌باشد. بنابراین با توجه به شرایط مسأله، مدل $k - \varepsilon$ را می‌توان مناسب‌ترین روش برای مدل‌سازی برای این نوع جریان در نظر گرفت.

www.SID.ir

Archive of SID

شکل ۲- پروفایل سرعت برای سه مدل و مقایسه آن با ارزش Wyganski-Fiedler برای jet از نوع radial همراه با تصحیح pope

در شکل ۲ سه مدل برای حالت فوران شعاعی همراه با تصحیح Pope مقایسه شده‌اند که دو مدل k - ε و طول مخلوط اختلاف زیادی با نتایج آزمایشگاهی از خود نشان می‌دهند ولی در مدل k ε - این انحراف ناچیز می‌باشد.
در شکل ۳ برای حالت فوران صفحه‌ای اختلاف زیادی بین سه مدل و نتایج آزمایشگاهی مشاهده نمی‌گردد. مدل طول مخلوط در محدوده ای که سرعت به سمت صفر میل می‌نماید نتایج بهتری از خود نشان می‌دهد که این محدوده بین ۰ 〈 u/u_m 〈 ۰/۴ و۰/۲۵ 〈 y/x 〈 ۰/۱۳ قرار دارد.درمحدوده ۱/۰ 〈 u/u_m 〈 ۰/۴ و ۰/۱۳ 〈 y/x 〈 ۰ مدل k-ε بهتر عمل می‌نماید و این ناحیه در اطراف سرعت ماکسیمم و محور متمرکز می‌باشد.

شکل ۳- پروفایل سرعت برای سه مدل و مقایسه آن با روش Fiedler–Wygnanski برای jet از نوع plane

شکل ۴ سه مدل را در حالت فوران محوری نشان می‌دهد. مدل-k ε در این شرایط با نتایج آزمایشگاهی Bradbury اختلاف زیادی از خود نشان نمی‌دهد[۴]. بنابراین در این حالت مدل k-ε را به عنوان بهترین مدل جهت شبیه سازی می‌توان انتخاب نمود.
در شکل ۵ سه مدل در حالت فوران محوری با توجه به تصحیحPope مقایسه شده‌اند. در محدوده ۰/۶۵ 〈 u/u_m 〈 ۰ و ۰/۲۵ 〈 y/x 〈 ۰/۰۷ مدل k-ε جواب دقیق‌تری به ما می‌باشد که با نتایج آزمایشگاهی فوق اختلاف ناچیزی دارد. در گستره ۱/۰ 〈 u/u_m 〈 ۰/۶۵ و ۱/۰ 〈 y/x 〈 ۰ مدل طول مخلوط با نتایج آزمایشگاهی همخوانی خوبی را از خود نشان می‌دهد که می‌توان نتیجه گرفت که استفاده از روش مدل طول مخلوط

شکل ٤- پروفایل سرعت برای سه مدل و مقایسه آن با روش Bradbury برای jet از نوع round

مطلوب‌ترین نتیجه را برای ما حاصل خواهد نمود. بنابراین به طور کلی با توجه به نمودارهای بالا می‌توان نتیجه گیری کرد که مدل k – ε مناسب‌ترین و ساده ترین مدل برای شبیه‌سازی جریان. آشفته در فوران آزاد حالت‌های مختلف فوران صفحه‌ای، محوری و شعاعی می‌باشد

نتیجه‌گیری نهایی

سه مدل مختلف آشفته در این تحقیق مورد بررسی قرار گرفته است که نتایج حاصل را می‌توان به‌صورت زیر خلاصه کرد:

www.SID.ir

Archive of SID

شکل ۵- پروفایل سرعت برای سه مدل و مقایسه آن با روش Bradbury برای jet از نوع round با تصحیح Pope

ـ برای حالت plane jet هر سه مدل k–ε ، k–ω , طول مخلوط جواب‌های قابل قبولی می‌دهند.

ـ برای حالت round jet با تصحیح Pope مدل‌های k–ε k – ω , و طول مخلوط مورد قبول هستند.

ـ مدل k – ε مناسب‌ترین و ساده‌ترین مدل برای شبیه‌سازی جریان آشفته در فوران آزاد می‌باشد.

نمادها

تابع متناوب Klebanoff	F_{kleb}
جمله چشمه	S
جمله منبع	S_ϕ
سرعت لبه لایه مرزی	u_e
سرعت متوسط	u_m
سرعت جریان بدون بعد بر حسب η	$u(\eta)$
سرعت جریان آزاد	u_∞
پهنای لایه-عرضی جریان (یا نصف پهنا)	X
فاصله در راستای عرضی جریان	Y

فهرست علایم یونانی

ضخامت لایه سرعت	δ_V^*
ضریب پخش	Γ
بیانگر متغیرهای T و V و U`	ϕ
نسبت x/y	η

تاریخ دریافت : ۸۰/۱۰/۴ ، تاریخ پذیرش : ۸۱/۱۱/۶

مراجـع

[1] Versteeg, H. K. and Malalasekera, W., An Intoduction to Computational Fluid Dynamics, Longman Scientific & Technical, U.K., (1995).

[2] Gutmark, E. and Wygananski, I., "The Planer Turbulent Jet", *J. Fluid Mech*.,. **73**, (3), 465-495 (1976).

[3] Patankar, S. V., Basu, D. K., and Alpay, "Prediction of the Three-Dimensional Velocity Field of a Deflected Turbulent Jet", *J. Fluid Eng*., **99**, 758(1977).

[4] Launder, B. E. and Spalding, D. B., "The Numerical Computation of Turbulent Flow", *Copm. Methods Appl. Mech. Eng.,* **3**, 269(1974).

[5] Wilcox, D. C., Turbulence Modeling for CFD, DCW Indu stries, Inc , La Canada, California, (1998).

[6] Patankar, S. V., Numerical Heat Transfer and Fluid Flow, Hemisphere Publishing Corporation, New York, (1977).

[7] Patankar, S. V., Numerical Heat Transfer and Fluid Flow, Hemisphere Publishing Corporation, New York, (1977).

www.SID.ir