دانشور
رفتار

برنامه‌ریزی درسی در دانشگاه به کمک مدل‌سازی دو مرحله‌ای برنامه‌ریزی ریاضی

نویسندگان: دکتر محمدرضا علیرضائی[1]، مسعود خلیلی[1] و سیدمهدی منصورزاده[2]

۱. عضو هیأت علمی دانشکده ریاضی دانشگاه علم و صنعت ایران
۲. دانشجوی دکتری ریاضی کاربردی دانشگاه علم و صنعت ایران
۳. کارشناس ارشد ریاضی کاربردی دانشگاه تهران

چکیده

در مسأله برنامه‌ریزی درسی در دانشگاه، لزوم در نظر گرفتن متغیرهای متناظر با دروس، اساتید، کلاس‌ها، روزهای هفته و ساعات قابل برنامه‌ریزی در روز سبب می‌شود که با یک مسأله برنامه‌ریزی ریاضی از نوع برنامه‌ریزی خطی با اعداد صحیح و با ابعاد بزرگ مواجه باشیم. غالباً مسأله آن‌قدر بزرگ می‌شود که با ابزارهای موجود قابل حل نیست و به جای استفاده از مدل‌های برنامه‌ریزی ریاضی، مجموعه‌ای از الگوریتم‌های ابتکاری برای حل آن پیشنهاد شده است. در این مقاله، ضمن تشریح مسأله و دسته‌بندی شرایط به شرایط سخت که حتماً باید برقرار باشند و شرایط نرم که حتی‌المقدور بهتر است برقرار باشند مسأله را به‌صورت یک مسأله برنامه‌ریزی خطی با اعداد صحیح فرمول‌بندی می‌کنیم. آنگاه با وارد کردن متغیرهای قابل برنامه‌ریزی، طی دو مرحله، مسأله را حل می‌کنیم. ضمناً بر اساس مدل پیشنهادی، یک سیستم نرم‌افزاری طراحی و ساخته شده که ضمن ارائه این سیستم آن‌را با داده‌های واقعی مربوط به نیمسال دوم ۸۳-۸۲ دانشکده ریاضی دانشگاه علم و صنعت ایران اجرا کرده، برنامه‌ریزی درسی را انجام می‌دهیم و نتایج حاصل را با برنامه‌ریزی صورت گرفته دستی مقایسه می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: برنامه‌ریزی درسی، جدول زمان‌بندی، مسأله برنامه‌ریزی خطی با اعداد صحیح، الگوریتم‌های ابتکاری

دوماهنامه علمی - پژوهشی
دانشگاه شاهد
سال سیزدهم - دوره جدید
شماره ۱۷
تیر ۱۳۸۵

۱. مقدمه

مسأله زمان‌بندی دروس از مسائل مهمی است که همه دانشگاه‌ها، مدارس و مؤسسات آموزشی با آن مواجه هستند. در این مسأله سعی بر این است که مجموعه‌ای از منابع معین، متشکل از کلاس‌ها، اساتید و دروس تحت شرایط خاص به مجموعه‌ای از ساعت‌های درسی اختصاص یابد. این شرایط درباره دانشگاه‌ها، و مدارس متفاوت است. از جمله تفاوت‌های اصلی بین دانشگاه‌ها و مدارس، در نحوه تخصیص واحدهای درسی به کلاس‌ها و استاد به واحدهای درسی است. در دانشگاه‌ها معمولاً استادی که به یک واحد درسی اختصاص می‌یابد از قبل معلوم نیست. به عبارت دیگر، یک استاد ممکن است چند درس را تدریس کند، در حالی که در مدارس معلم هر درس مشخص است.

همچنین در دانشگاه‌ها کلاسی که به هر درس تخصیص می‌یابد از قبل معلوم نیست، ولی در مدارس این گونه نیست. از طرفی، تعداد درس‌ها و اساتید در دانشگاه‌ها بسیار بیش‌تر از مدارس است و همین امر باعث می‌شود مسأله زمان‌بندی دروس در مورد دانشگاه‌ها بسیار پیچیده‌تر باشد. شرایطی را که در مسأله زمان‌بندی دروس باید رعایت شود، می‌توان به دو دسته اصلی تقسیم کرد:

الف) شرایط سخت که باید حتماً برقرار باشند.

ب) شرایط نرم که تا حد امکان باید برقرار باشند [۱و۲].

الگوریتم‌های‌مختلفی برای حل‌این‌مسأله ارائه‌شده که غالباً از نوع الگوریتم‌های ابتکاری (heuristic algorithms) هستند. به‌عنوان نمونه‌هایی از این الگوریتم‌ها می‌توان از الگوریتم‌های رنگ‌آمیزی گراف (graph coloring) [۳]، جستجوی موضعی تابو (Tabo search) [۴]، مورچه (ant algorithm) [۵]، انجماد فلزات(Simulated Annealing) [۶]، و آلگوریتم ژنتیک (genetic algorithm) [۷] نام برد که از لحاظ نحوه عملکرد، سرعت محاسبه و میزان کارایی متفاوتند؛ اما اگر از منظر تحقیق در عملیات به این مسأله بنگریم، می‌بینیم که این مسأله، یک مسأله بهینه‌سازی است که می‌توان آن‌را در قالب یک مسأله برنامه‌ریزی خطی با اعداد صحیح، مدل‌سازی و با استفاده از الگوریتم شاخه و کران و با به‌کارگیری نرم‌افزارهایی مانند GAMS یا AIMMS حل کرد. هنگامی که مسأله زمان‌بندی را به مسأله برنامه‌ریزی خطی با اعداد صحیح تبدیل می‌کنیم با یک مدل با ابعاد بزرگ مواجه هستیم که حتی نرم‌افزارهای قوی نیز نمی‌توانند آن‌را در زمان کم حل کنند. لذا الگوریتم‌های ابتکاری مورد توجه قرار گرفته‌اند که بتوانند مسائل بهینه‌سازی با ابعاد بزرگ را با زمان اجرای مناسب تا حدودی حل کنند. ضعف اصلی الگوریتم‌های ابتکاری در مقایسه با الگوریتم‌های سیمپلکس و شاخه و کران در پیدا کردن جواب بهینه مطلق است. الگوریتم‌های سیمپلکس و شاخه و کران جواب بهینه مطلق را می‌یابند، ولی در مدل‌هایی با ابعاد بزرگ برای اجرای این الگوریتم‌ها زمان زیادی لازم است. در حالی‌که الگوریتم‌های ابتکاری زمان اجرای کمی دارند، نمی‌توانند جواب بهینه مطلق را بیابند و فقط یک جواب خوب (نزدیک به بهینه) ارائه می‌دهند؛ زیرا در آن‌ها عنصر احتمال نقش دارد و هزینه استفاده از این الگوریتم‌ها برای حل مسائل با ابعاد بزرگ، از دست دادن جواب بهینه مطلق است. در این مقاله روشی را به‌کار می‌بریم که این مشکل را رفع می‌کند؛ بدین‌ترتیب که مسأله زمان‌بندی را به دو مدل برنامه‌ریزی خطی صحیح با ابعاد کوچک تبدیل می‌کنیم، به طوری که این دو مدل مجموعاً توصیف‌کننده مسأله زمان‌بندی باشند و در زمان کم با استفاده از نرم‌افزارهای برنامه‌ریزی خطی با اعداد صحیح قابل حل باشند. با این روش در زمان کوتاه، جواب بهینه مطلق مسأله را می‌یابیم.

در این مقاله، قیود لازم برای یک جدول زمان‌بندی را شرح داده، مواردی را که می‌توان بهینه کرد ذکر می‌کنیم و به ترتیب مدل ریاضی هر قید را می‌نویسیم و سپس برنامه کامپیوتری تهیه شده برای استخراج داده‌های مورد نیاز مدل را ارائه می‌کنیم. در ادامه، نتیجه اجرای برنامه را برای داده‌های واقعی نیمسال دوم سال تحصیلی ۸۳–۸۲ دانشکده ریاضی دانشگاه علم و صنعت بیان کرده، در پایان، جدول زمان‌بندی تولید شده توسط مدل فوق مربوط به این نیمسال و جدول زمان‌بندی تهیه شده به روش دستی برای همین ترم را با هم مقایسه می‌کنیم و برتری مدل ریاضی را نشان می‌دهیم.

۲. قیدهای سخت و نرم یک جدول زمان‌بندی

همان‌طور که اشاره شد قیدهای سخت قیودی هستند که برقراری آن‌ها الزامی است. این قیود را می‌توان به پنج دسته زیر تقسیم کرد:

۱. در یک کلاس، در یک ساعت فقط یک درس می‌تواند تشکیل شود.
۲. دو درس مربوط به یک گروه درسی نباید همزمان تشکیل شود.
۳. یک استاد، در یک ساعت فقط یک درس می‌تواند تدریس کند.

۴. ساعات تعیین شده برای یک استاد باید با وقت پیشنهادی استاد هماهنگ باشد.
۵. ظرفیت کلاس نباید از تعداد دانشجویان آن کم‌تر باشد.

بند ۴ می‌تواند یک قید نرم باشد، یعنی تا حد امکان برقرار باشد، ولی در این مقاله آن‌را قید سخت فرض کرده‌ایم. علاوه بر قیود فوق، شرایط دیگری نیز وجود دارند که تا حد امکان باید برقرار باشند. این شرایط را تحت عنوان قیود نرم به چهار دسته تقسیم کرده‌ایم:

۱. ساعت‌های خالی در برنامه هفتگی هر کلاس حداقل شود.
۲. کلاس‌های مربوط به دو جلسه درس‌های سه یا چهار واحدی یکسان باشد.
۳. زمان برگزاری دو جلسه درس‌های سه یا چهار واحدی یکسان باشد.
۴. یک روز بین زمان برگزاری دو جلسه درس‌های سه یا چهار واحدی فاصله باشد.

می‌خواهیم مسأله زمان‌بندی را به‌صورت یک مسأله برنامه‌ریزی خطی صحیح بیان کنیم، به طوری که مینیمم شدن تابع هدف مسأله به معنای تا حد امکان برقرار بودن قیود نرم باشد؛ مشروط بر این‌که قیود سخت برقرار باشند. در بخش بعد، متغیرها و پارامترهای لازم برای این کار را معرفی می‌کنیم.

۳. اطلاعات لازم برای جدول زمان‌بندی

در بخش قبل، شرایطی را که باید در یک برنامه زمان‌بندی رعایت شود ذکر کردیم. برای بیان این شرایط به‌صورت عبارات ریاضی، لازم است مجموعه‌ای از پارامترها و متغیرها را تعریف کنیم. ابتدا اطلاعاتی را که برای تنظیم یک جدول زمان‌بندی لازم است شرح می‌دهیم:

- اطلاعات مربوط به دروس:
  - تعداد کل دروس،
  - نام هر درس،
  - تعداد واحد هر درس،
  - تعداد دانشجویانی که برای هر درس پیش ثبت نام کرده‌اند.
- اطلاعات مربوط به اساتید:
  - تعداد اساتید،
  - نام درس‌هایی که هر استاد جهت تدریس اعلام آمادگی کرده است،
  - وقت پیشنهادی هر استاد برای ارائه درس‌های پیشنهادی.
- اطلاعات مربوط به کلاس‌ها:
  - تعداد کلاس‌ها،
  - ظرفیت هر کلاس.
- اطلاعات مربوط به گروه‌های درسی
- اطلاعات مربوط به زمان‌های موجه برای تشکیل دروس
  - تعداد روزهای کاری در هفته،
  - تعداد جلسات هر روز.

در این مقاله در هر هفته ۵ روز کاری و در هر روز ۵ جلسه در نظر گرفته‌ایم که در برنامه قابل تنظیم است و دروس می‌توانند فقط در این زمان‌ها برگزار شوند.

بعضی از دانشگاه‌ها هنگام ثبت نام فهرستی از دروس تفکیک شده ۸ ترم تحصیلی را به دانشجو داده، پیشنهاد می‌کنند که دانشجو طبق آن فهرست انتخاب واحد کند. برای این‌که دانشجو بتواند از این فهرست پیروی کند لازم است زمان تشکیل دروس یک ترم با هم تداخل نداشته باشد. برای وارد کردن این شرط در مدل، مفهوم گروه‌های درسی را معرفی می‌کنیم؛ بدین‌ترتیب که درس‌هایی را که نباید از لحاظ زمان برگزاری در طول یک ترم با هم تداخل داشته باشند در یک گروه قرار می‌دهیم. برای مثال، درس‌های مربوط به دانشجویان ترم اول را در گروه یک، ترم دوم را در گروه دو و... قرار می‌دهیم.

٤. معرفی قیدهای سخت و نرم

در این بخش، معادلات مربوط به هر قید، متغیرها و پارامترهای مربوط را شرح می‌دهیم. متغیر اصلی به‌کار رفته در این مدل‌سازی Y_{idjr} است که از نوع متغیرهای صفر و یک بوده، در آن، اندیس i «تعداد دروس» .. ۱= i اندیس درس‌ها است. اندیس d، d=۱..۵

اندیس روز و متناظر با روزهای شنبه تا چهارشنبه است. اندیس j، ۵..۱ = j اندیس زمان تشکیل درس و متناظر با ساعت تشکیل درس در یک روز محسوب می‌شود. برای مثال j=1 نشان‌دهنده ساعت ۱۰- ۸ است. اندیس r، «تعداد اساتید» .. ۱= r اندیس استاد درس است.

$$Y_{idjr} = \begin{cases} 1 & \text{درس i در روز d و ساعت j با استاد r ارائه‌می‌شود} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

همان‌طور که ملاحظه می‌شود اندیس کلاس‌ها را در متغیر فوق قرار نداده‌ایم، چون با این‌کار، تعداد متغیرها برای یک مسأله واقعی زیاد شده، حل مدل مستلزم صرف زمان بسیار زیادی خواهد بود. مسأله مدل‌سازی شده در این مقاله، شامل ۷۹ درس، ۳۷ استاد، ۱۱ کلاس، ۵ روز در هر هفته و ۵ ساعت در هر روز است. بدون وارد کردن اندیس کلاس‌ها، تعداد متغیرها برابر است با ۷۳۰۷۵ و اگر اندیس کلاس‌ها را نیز در نظر بگیریم آنگاه بیش از ۸۰۰۰۰۰ متغیر خواهیم داشت که مدل را خیلی بزرگ می‌کند. چون می‌خواهیم مدلی ارائه دهیم که در زمان معقول قابل اجرا باشد مسأله را طی دو مدل حل می‌کنیم. در مدل، اول اندیس کلاس‌ها را در نظر نمی‌گیریم و مدل را اجرا می‌کنیم. از جواب بهینه مدل اول استفاده کرده، کلاس‌ها را در طی مدل دوم تخصیص می‌دهیم. ابتدا پارامترهایی را که برای تشکیل قیدها لازم داریم شرح می‌دهیم.

- U_i تعداد جلساتی است که درس i در هفته باید برگزار شود که برای درس‌های سه یا چهار واحدی برابر با دو و برای درس‌های یک یا دو واحدی برابر با یک است.
- POP_i تعداد دانشجویانی است که برای درس i پیش ثبت نام کرده‌اند.
- $\alpha_{idjr} = \{0,1\}$ اگر استاد r درس i را بتواند در روز d ساعت j تدریس کند α_{idjr} برابر با یک و در غیر این صورت برابر با صفر است. این پارامتر با استفاده از زمان پیشنهادی استادان برای تدریس دروس مورد نظرشان مقداردهی می‌شود.
- $G_{li} = \{0,1\}$ اگر درس i در گروه درسی l قرار داشته باشد G_{li} برابر با یک و در غیر این صورت برابر با صفر است. در واقع با استفاده از این پارامتر می‌فهمیم که کدام درس‌ها نباید با هم تداخل داشته باشند.
- $\beta_{ik} = \{0,1\}$ اگر درس i بتواند در کلاس k برگزار شود β_{ik} برابر با یک و در غیر این صورت برابر با صفر است. این پارامتر را با توجه به ظرفیت کلاس k و تعداد دانشجویان متقاضی درس i مقداردهی می‌کنیم.

لازم به ذکر است که پارامترهای فوق قبل از اجرای مدل باید مقداردهی کرده باشیم. در ادامه به شرح قیدهای مدل اول می‌پردازیم.

اولین قیدی که باید برقرار باشد این است که استاد r در روز d ساعت j حداکثر یک درس ارائه دهد. این قید را به شکل زیر بیان می‌کنیم:

$$\sum_i Y_{idjr} \le 1 \qquad \forall d, j, r$$

قید فوق بیان می‌کند که مجموع درس‌هایی که در یک روز و یک ساعت با یک استاد برگزار می‌شود حداکثر یک باشد.

قید دیگری که لازم است برقرار باشد عبارت ست از این‌که از درس دو جلسه‌ای i در روز d حداکثر باید یک جلسه برگزار شود. این قید را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\sum_{r,j} Y_{idjr} \le 1 \qquad \forall d, i \,|\, U_i > 1$$

این قید سبب می‌شود مجموع جلسات یک درس در یک روز حداکثر یک باشد.

درس‌های سه یا چهار واحدی در یک هفته در دو جلسه برگزار می‌شوند و لذا باید در مورد این دروس این قید را قرار دهیم که همه جلسات درس i در یک هفته با یک استاد ارائه شود. برای ساخت این قید، متغیر A_{ir} را معرفی می‌کنیم. متغیر صفر و یک A_{ir} به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$A_{ir} = \begin{cases} 1 & \text{درس } i \text{ با استاد } r \text{ ارائه می‌شود} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

با توضیحات بالا قید فوق را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\sum_{r} A_{ir} = 1 \quad \forall i$$

$$\sum_{d,j} Y_{idjr} = U_i \times A_{ir} \quad \forall i,r \,\Big|\, \sum \alpha_{idjr} \neq 0$$

دو قید فوق بیان می‌کنند که باید درس i فقط با یک استاد ارائه شود، مجموع جلسات درس i برابر با U_i باشد و تمام جلسات درس i با استاد r برگزار شود.

در قید بعد می‌خواهیم درس‌های یک گروه درسی با هم تداخل نداشته باشد. این قید را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\sum_{r,i:G_{li}=1} Y_{idjr} \leq 1 \quad \forall l,d,j$$

قید فوق بیان می‌کندکه در یک روز، در یک ساعت، تعداد درس‌هایی که از گروه l برگزار می‌شود حداکثر باید یک باشد.

قیدهای گفته شده در بالا همگی قید سخت هستند، یعنی حتماً باید برقرار باشند. حال می‌خواهیم چند قید نرم معرفی‌کنیم که تا حد امکان باید برقرار باشند. اولین قید نرم که در یک جدول زمان‌بندی باید در نظر بگیریم این است که دو جلسه درس‌های سه یا چهار واحدی در دو روز متوالی برگزار نشود و تا حد امکان یک روز بین آن‌ها فاصله باشد یا در روزهای اول و پنجم تشکیل شوند و همچنین هر دو جلسه در یک ساعت برگزار بشوند. برای ساخت این قیدها، متغیر صفر و یک B_{ij} را معرفی می‌کنیم:

$$B_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{روزی‌هست‌که درس } i \text{ در ساعت } j \text{ تشکیل می‌شود} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

ابتدا قید مربوط به این‌که درس‌های دو جلسه‌ای تا حد امکان در ساعت‌های یکسان برگزار شوند را توضیح می‌دهیم. قیدهای زیر را در نظر بگیرید:

$$B_{ij} \leq \sum_{d,r} Y_{idjr} \leq U_i \times B_{ij} \quad \forall i,j \,|\, U_i > 1$$

این قیدها متغیر B_{ij} را مقداردهی می‌کنند. اگر درس i در ساعت j هیچ روزی ارائه نشود آنگاه $\sum_{d,r} Y_{idjr}$ برابر با صفر است و نامساوی سمت چپ عبارت فوق ایجاب می‌کند که B_{ij} برابر با صفر باشد. در غیر این صورت B_{ij} برابر با یک می‌شود. عبارت $\sum_{i,j} B_{ij}$ را در تابع هدف قرار داده، آن‌را مینیمم می‌کنیم. این عبارت وقتی به مینیمم خود می‌رسد که همه جلسات یک درس در ساعت‌های یکسان برگزار شود. مثلاً اگر جلسه اول درس i در ساعت اول یک روز و جلسه دوم در ساعت دوم روز دیگر برگزار شود آنگاه B_{i1} و B_{i2} برابر با یک می‌شوند. مینیمم شدن مجموع B_{ij}ها سبب می‌شود که یا B_{i1} برابر با یک باشد یا B_{i2}؛ یعنی دو جلسه درس i یا در ساعت اول یا در ساعت دوم برگزار می‌شوند.

قید بعدی این است که دو جلسه درس‌های سه یا چهار واحدی تا حد امکان یک روز در میان یا در روزهای اول و پنجم برگزار شوند. برای ساخت این قید، متغیر صفر و یک E_{idm} را معرفی می‌کنیم که در آن m =۱,۳

$$E_{idm} = \begin{cases} 1 & \text{دو جلسه‌درس} i \text{ در روز } d \text{ و} d+m \text{ تشکیل‌می‌شود} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

تخصیص نابهینه روزها به درس‌های دو جلسه‌ای این است که دو جلسه درس i در یک روز یا دو روز متوالی برگزار شود یا دو روز بین آن‌ها فاصله باشد. می‌خواهیم تا حد امکان چنین تخصص‌هایی نداشته باشیم. قبلاً قیدی توضیح داده شد که سبب می‌شود از هر درس در هر روز حداکثر یک جلسه تشکیل شود.

ابتدا با استفاده از قیدهای زیر متغیر E_{idm} را مقداردهی می‌کنیم:

$$U_i \times E_{idm} \leq \sum_{j,r} (Y_{idjr} + Y_{id+mjr}) \leq U_i - 1 + E_{idm} \quad \forall i,d,m \,\Big|\, U_i > 1, \sum \alpha_{idjr} \neq 0, \sum \alpha_{id+mjr} \neq 0$$

فرض کنید دو جلسه درس i در روزهـای d و d+m برگزار شـود آنگـاه $\sum_{j,r}(Y_{idjr}+Y_{id+mjr})$ برابـر بـا U_i خواهد بود و سمت راست عبارت فوق ایجاب می‌کند که E_{idm} برابر با یک باشد. در غیر این صورت، مجمـوع فوق کم‌تر از U_i خواهد بود و لذا سمت چـپ عبـارت فوق باعث می‌شود که E_{idm} برابر با صفر باشد. بـا قـرار دادن عبـارت $\sum_{i,d,m=1,3} E_{idm}$ در تـابع هـدف و مینـیمم کردن آن، روزها به نحوی که خواسته شـده بـود بـه درس‌ها تخصیص داده می‌شوند. توجه کنید که مینـیمم عبارت فوق صفر است. اگر این عبـارت صـفر شـود، یعنـی دو جلـسه درس i در روزهـای d و d+1 یـا در روزهای d و d+3 ارائه نمی‌شود و بـدین‌ترتیـب نتیجـه مطلوب به‌دست می‌آید. توجه کنید کـه ایـن قیـدها را برای درس‌هایی تشکیل می‌دهیم کـه اولاً دو جلـسه‌ای باشند و ثانیاً استادهایی باشند که بتوانند این درس‌ها را در روزهای d و d+m ارائه دهند.

همان‌طـور کـه گفتـه شـد در مـدل اول، انـدیس کلاس‌ها را در متغیر Y وارد نکرده‌ایم و کلاس‌هـا را در مدل دوم به درس‌ها تخصیص می‌دهـیم. فـرض کنیـد مدل اول به جواب بهینه خود رسیده است. متغیـر Y در جواب بهینه به گونه‌ای مقدار گرفته که تمـام قیـدهای گفته شده را برآورده می‌کند. با استفاده از ایـن مقـادیر می‌توان فهمید که درس i در چه روزی، در چه ساعتی و با کدام استاد باید ارائه شود؛ اما هنوز معلـوم نیـست که در کدام کلاس باید تشکیل شود. لذا در مـدل اول باید قیدی قرار دهیم که تضمین کند در جـواب بهینـه، درس‌ها قابل کلاس‌دهی هستند. برای این منظـور بایـد چند نکته را در نظر بگیریم:

- تعداد درس‌هایی که در یک روز و در یک سـاعت برگزار می‌شوند حداکثر به تعداد کلاس‌های موجود باشد.
- تعداد دانشجویان درس‌هایی که در یـک روز و در یک ساعت برگزار می‌شوند با ظرفیت کـلاس‌هـای موجود مطابق باشد. مثلاً اگر دو کلاس بـا ظرفیـت ۵۰ نفر موجود است آنگاه در یک روز همزمان نباید بیش‌تر از دو درس ۵۰ نفری برگزار شود

برای سـاخت ایـن قیـدها از دو پـارامتر CLS_t و N_t استفاده می‌کنیم. CLS_t نشان‌دهنده ظرفیت‌هـای مختلـف کلاس‌ها و N_t بیانگر تعداد کلاس‌های موجود با ظرفیت بیش‌تر از CLS_t است. اندیس t نیـز از صـفر تـا تعـداد «کلاس‌های با ظرفیت مختلف» تغییـر مـی‌کنـد. روش مقداردهی این پارامترها را با یک مثال توضیح می‌دهیم. فرض کنید دو کلاس ۲۰ نفره و سـه کـلاس ۵۰ نفـره موجود است. یک کلاس مجازی با ظرفیت صفر را بـه مجموعه کلاس‌ها اضافه می‌کنیم.

t	۰	۱	۲
CLS_t	۰	۲۰	۵۰
N_t	۵	۳	۰

در مثال فوق پارامتر N بیان می‌کند که ۵ کلاس بـا ظرفیت بیش‌تر از صفر و ۳ کلاس با ظرفیت بیش‌تـر از ۲۰ موجود است و هیچ کلاسی با ظرفیت بیش‌تر از ۵۰ موجود نیست. با استفاده از این پارامترها دو قید فوق را به این شکل بیان می‌کنیم.

$$\sum_{r,i \mid POP_i > CLS_t} Y_{idjr} \le N_t \qquad \forall t,d,j$$

این قید بیان می‌کند که تعداد درس‌هایی کـه دارای متقاضی بیش‌تر از CLS_t هستند باید حـداکثر بـه تعـداد کلاس‌هایی باشد که ظرفیت آن‌ها بیش‌تر از CLS_t است و بدین‌ترتیب مطمئن می‌شویم که جـواب بهینـه قابـل کلاس‌بندی است.

در مدل اول، علاوه بر قیدهای فوق، سـه قیـد نـرم دیگر را هم در نظر گرفته‌ایم که به علت طولانی شـدن بحث از توضیح این قیدها صرف نظر کـرده، مختـصراً آن‌ها را بیان می‌کنیم:

- از گروه درسی l در یک روز دو درس برگزار شود. این قید به این دلیل در نظر گرفته شده که دانـشجو در روزی که به دانشگاه می‌آید تـا حـد امکـان دو درس – نه بیش‌تر نه کم‌تر – داشته باشد.

- اگر از یک گروه درسی در یک روز دو درس برگزار می‌شود تا حد امکان بین آن‌ها فاصله نباشد.
- ساعت‌های خالی در برنامه هر کلاس مینیمم شود.

این سه قید در مجموع باعث می‌شوند که از وقت دانشجو و از امکانات موجود استفاده بهینه به عمل آید.

تابع هدف مدل اول، بدون عبارات مربوط به سه قید فوق به شکل زیر است:

$$Min\ \ Z1=\sum_{i,j} B_{ij}+\sum_{i,d,m} E_{idm}$$

همان‌طور که گفته شد کلاس‌ها را با استفاده از مدل دوم به درس‌ها تخصیص می‌دهیم. در ادامه مدل دوم را شرح می‌دهیم. متغیر اصلی که در مدل دوم به‌کار رفته H_{idk} است و به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$H_{idk}=\begin{cases}1 & \text{درس i در روز d در کلاس k برگزار می‌شود}\\ 0 & \text{در غیر این صورت}\end{cases}$$

اولین قیدی که در این مدل باید در نظر بگیریم این است که یک درس در روزی که برگزار می‌شود، در یک کلاس تشکیل شود. این قید را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$\sum_{k \mid \beta_{ik}=1} H_{idk}=1 \qquad \forall i,d \,\Big|\, \sum_{j,r} Y^{*}_{idjr}\neq 0$$

قید فوق بیان می‌کند که درسی که در جواب بهینه مدل اول در روز d ارائه می‌شود فقط در یک کلاس برگزار شود. توجه کنید که در این قید Y^* جواب بهینه مدل اول است.

قید دیگری که باید برقرار باشد این است که در هر کلاس، در یک روز در یک ساعت، حداکثر یک درس تشکیل شود. این قید از تداخل مکانی بین دروس جلوگیری می‌کند و به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$\sum_{i \,\big|\, \sum_{r} Y^{*}_{idjr}\neq 0,\ \beta_{ik}=1} H_{idk}\leq 1 \qquad \forall d,j,k$$

آخرین قید این مدل این است که هر دو جلسه درس‌های سه یا چهار واحدی تا حد امکان در یک کلاس برگزار شوند. برای ساخت این قید متغیر C_{ik} را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$C_{ik}=\begin{cases}1 & \text{درس i در کلاس k برگزار می‌شود}\\ 0 & \text{در غیر این صورت}\end{cases}$$

این متغیر را با استفاده از دو قید زیر مقداردهی می‌کنیم:

$$C_{ik}\leq \sum_{d \,\big|\, \sum_{j,r} Y^{*}_{idjr}\neq 0} H_{idk}\leq U_i\times C_{ik} \qquad \forall i,k \,\big|\, \beta_{ik}=1, U_i>1$$

اگر در هیچ روزی درس i در کلاس k برگزار نشود آنگاه $\sum H_{idk}$ برابر با صفر است و سمت چپ عبارت فوق ایجاب می‌کند که C_{ik} نیز برابر با صفر باشد. اگر حداقل یک جلسه از درس دو جلسه‌ای i در کلاس k برگزار شود سمت راست عبارت فوق باعث می‌شود که C_{ik} برابر با یک باشد و بدین‌ترتیب C_{ik} به ازای هر i و k مقداردهی می‌شود. مینیمم کردن عبارت $\sum C_{ik}$ باعث می‌شود که هر دو جلسه درس‌های سه یا چهار واحدی در یک کلاس برگزار شوند و لذا تابع هدف مدل دوم را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$Min\ \ Z_2=\sum_{i,k \mid \beta_{ik}=1, U_i>1} C_{ik}$$

بدین ترتیب با اجرای دو مدل فوق یک جدول زمان‌بندی با شرایط گفته شده به‌دست می‌آید. در بخش بعد، برنامه کامپیوتری تهیه شده برای اجرای این دو مدل را ارائه می‌کنیم.

۵. یک برنامه کامپیوتری برای اجرای مدل‌های فوق

در بخش قبل، مسأله زمان‌بندی را به مسأله برنامه‌ریزی صحیح تبدیل کردیم. برای حل این برنامه لازم است ابتدا پارامترهای به‌کار رفته در مدل‌ها را مقداردهی کنیم. این کار را با ساخت یک برنامه کامپیوتری انجام داده‌ایم و آن‌را برای درس‌های ترم دوم سال تحصیلی

۸۳-۸۲ دانشکده ریاضی دانشگاه علم و صنعت اجرا کرده‌ایم. این برنامه شامل چند قسمت است که در ادامه نشان داده شده است.

اطلاعات مربوط به درس‌ها را در فرم ۱ وارد می‌کنیم و درس‌هایی را که در ترم جاری باید ارائه شوند انتخاب می‌کنیم.

فرم ۲ در مورد اطلاعات مربوط به اساتید است. در این فرم، علاوه بر مشخصات هر استاد، درس‌ها و زمان پیشنهادی هر استاد برای تدریس را وارد می‌کنیم. در این برنامه، سه روش برای وارد کردن اطلاعات مربوط به درس‌ها و زمان پیشنهادی هر استاد در نظر گرفته شده است. در روش اول، مدل‌ها تشخیص می‌دهند که استاد در کدام یک از ساعت‌های پیشنهادی خود چه درسی تدریس کند. در روش دوم استاد می‌تواند مشخص کند که در یک ساعت معین، چه درسی تدریس کند. در روش سوم، استاد می‌تواند مشخص کند که چند گروه از درس معینی را می‌خواهد تدریس کند.

فرم ۳ مربوط به گروه‌بندی درس‌ها است. همان‌طور که قبلاً گفته شد، درس‌هایی را که نباید با هم تداخل داشته باشند در یک گروه قرار می‌دهیم.

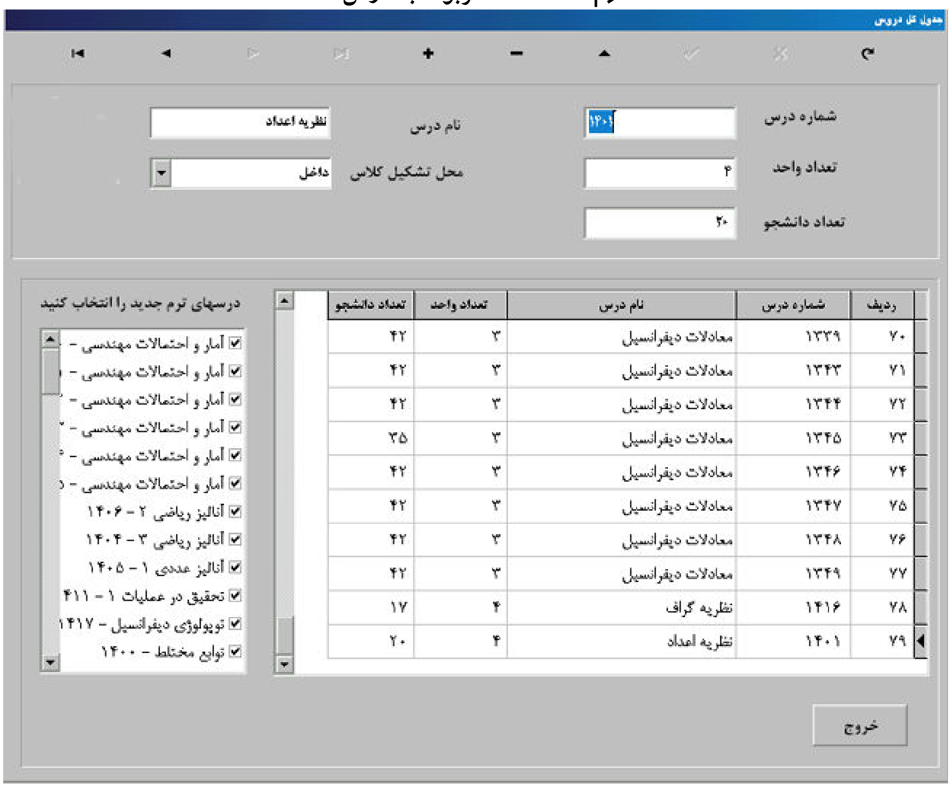
بعد از تکمیل شدن سه فرم فوق، برنامه با استفاده از اطلاعات وارد شده، پارامترهای مورد نیاز مدل‌ها را مقداردهی و فایلی به شکل زیر تولید می‌کند:

این فایل، تمام پارامترهای به‌کار رفته در مدل را شامل می‌شود. مدل‌ها را با استفاده از نرم‌افزار *GAMS* اجرا می‌کنیم. جواب بهینه در فایلی ذخیره می‌شود و برنامه فوق این فایل را بازخوانی کرده، نتیجه را به شکل زیر نمایش می‌دهد.

ParamsVal.Inc

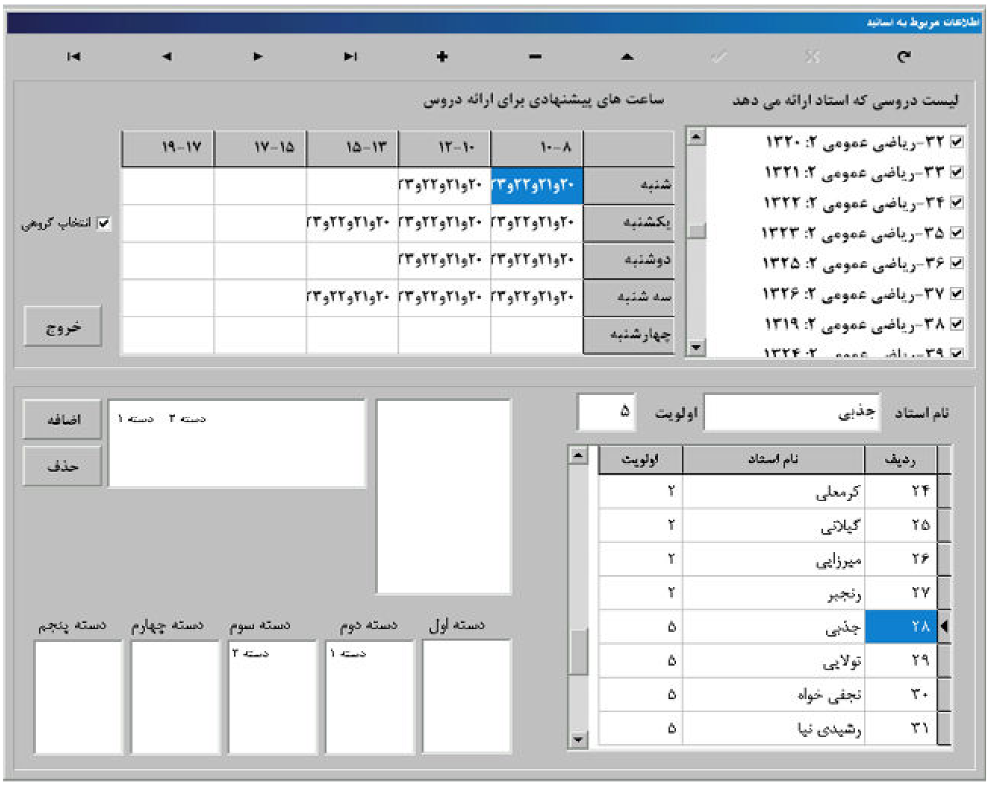
```
alpha('14', '1', '4', '1') = 1;
alpha('14', '1', '5', '1') = 1;
alpha('14', '3', '3', '1') = 1;
alpha('14', '3', '4', '1') = 1;
alpha('14', '3', '5', '1') = 1;
alpha('15', '1', '3', '1') = 1;
alpha('15', '1', '4', '1') = 1;
alpha('15', '1', '5', '1') = 1;
alpha('15', '3', '3', '1') = 1;
alpha('15', '3', '4', '1') = 1;
   :         :         :
   :         :         :
```

فرم ۱: اطلاعات مربوط به درس‌ها

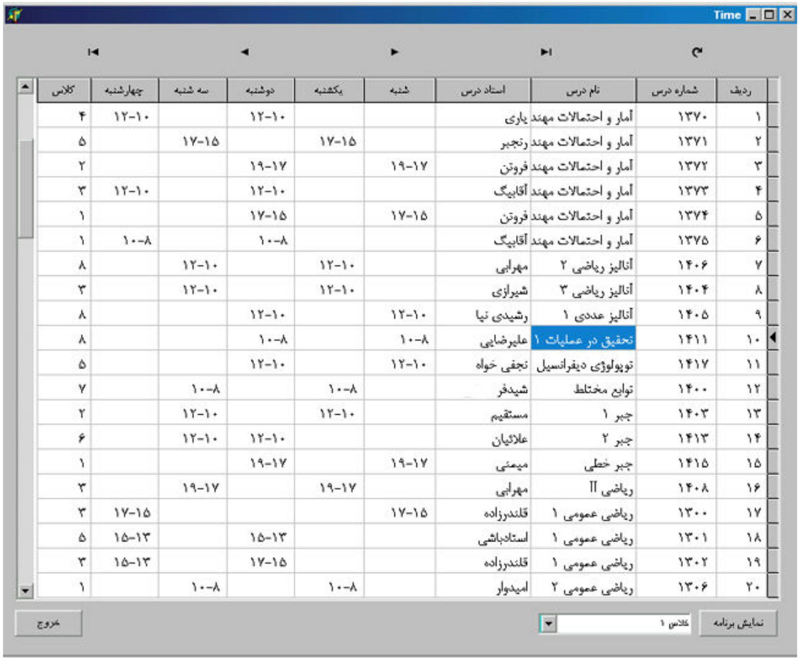


ردیف	شماره درس	نام درس	تعداد واحد	تعداد دانشجو
۷۰	۱۳۳۹	معادلات دیفرانسیل	۳	۴۲
۷۱	۱۳۴۳	معادلات دیفرانسیل	۳	۴۲
۷۲	۱۳۴۴	معادلات دیفرانسیل	۳	۴۲
۷۳	۱۳۴۵	معادلات دیفرانسیل	۳	۳۵
۷۴	۱۳۴۶	معادلات دیفرانسیل	۳	۴۲
۷۵	۱۳۴۷	معادلات دیفرانسیل	۳	۴۲
۷۶	۱۳۴۸	معادلات دیفرانسیل	۳	۴۲
۷۷	۱۳۴۹	معادلات دیفرانسیل	۳	۴۲
۷۸	۱۴۱۶	نظریه گراف	۴	۱۷
۷۹	۱۴۰۱	نظریه اعداد	۴	۲۰

فرم۲: اطلاعات مربوط به اساتید



فرم ۳: گروه‌بندی درس‌ها



ردیف	شماره درس	نام درس	استاد درس	شنبه	یکشنبه	دوشنبه	سه شنبه	چهارشنبه	کلاس
۱	۱۳۷۰	آمار و احتمالات مهند	یاری			۱۲-۱۰		۱۲-۱۰	۴
۲	۱۳۷۱	آمار و احتمالات مهند	رنجبر		۱۷-۱۵		۱۷-۱۵		۵
۳	۱۳۷۲	آمار و احتمالات مهند	فروتن	۱۹-۱۷		۱۹-۱۷			۲
۴	۱۳۷۳	آمار و احتمالات مهند	آقابیگ			۱۲-۱۰		۱۲-۱۰	۳
۵	۱۳۷۴	آمار و احتمالات مهند	فروتن	۱۷-۱۵		۱۷-۱۵			۱
۶	۱۳۷۵	آمار و احتمالات مهند	آقابیگ			۱۰-۸		۱۰-۸	۱
۷	۱۴۰۶	آنالیز ریاضی ۲	مهرابی		۱۲-۱۰		۱۲-۱۰		۸
۸	۱۴۰۴	آنالیز ریاضی ۳	شیرازی		۱۲-۱۰		۱۲-۱۰		۳
۹	۱۴۰۵	آنالیز عددی ۱	رشیدی نیا	۱۲-۱۰		۱۲-۱۰			۸
۱۰	۱۴۱۱	تحقیق در عملیات ۱	علیرضایی	۱۰-۸		۱۰-۸			۸
۱۱	۱۴۱۷	توپولوژی دیفرانسیل	نجفی خواه	۱۲-۱۰		۱۲-۱۰			۵
۱۲	۱۴۰۰	توابع مختلط	شیدفر		۱۰-۸		۱۰-۸		۷
۱۳	۱۴۰۳	جبر ۱	مستقیم		۱۲-۱۰		۱۲-۱۰		۲
۱۴	۱۴۱۳	جبر ۲	علائیان			۱۲-۱۰	۱۲-۱۰		۶
۱۵	۱۴۱۵	جبر خطی	میمنی	۱۹-۱۷		۱۹-۱۷			۱
۱۶	۱۴۰۸	ریاضی II	مهرابی		۱۹-۱۷		۱۹-۱۷		۳
۱۷	۱۳۰۰	ریاضی عمومی ۱	قلندرزاده	۱۷-۱۵				۱۷-۱۵	۳
۱۸	۱۳۰۱	ریاضی عمومی ۱	استادباشی			۱۵-۱۳		۱۵-۱۳	۵
۱۹	۱۳۰۲	ریاضی عمومی ۱	قلندرزاده			۱۷-۱۵		۱۵-۱۳	۳
۲۰	۱۳۰۶	ریاضی عمومی ۲	امیدوار		۱۰-۸		۱۰-۸		۱

۶. بررسی نتیجه به‌دست‌آمده‌از اجرای دو مدل

در این بخش، جدول زمان‌بندی ایجاد شده به روش مدل‌سازی با برنامه‌ریزی انجام شده به روش دستی در ترم دوم سال تحصیلی ۸۳-۸۲ دانشکده ریاضی دانشگاه علم و صنعت را با هم مقایسه می‌کنیم.

در برنامه زمان‌بندی تهیه شده به روش دستی در ترم مذکور، درس‌ها در ۹ کلاس ارائه شد، در حالی‌که در برنامه تهیه شده به‌وسیله مدل فقط ۸ کلاس استفاده شده است. در برنامه دستی در ۱۳ مورد، درسی که به استاد اختصاص داده شده با درس‌های پیشنهادی وی اختلاف دارد، در حالی‌که در برنامه مدل چنین نقصی وجود ندارد. در برنامه دستی در ۲ مورد، زمان تدریس اختصاص داده شده به استاد با زمان پیشنهادی او اختلاف دارد، در حالی‌که برنامه مدل چنین اشکالی ندارد. با توصیف‌های فوق، برتری برنامه ساخته شده به‌وسیله مدل‌سازی ریاضی کاملاً مشهود است. با استفاده از این برنامه در دانشگاه‌ها و دبیرستان‌ها می‌توان از فضای آموزشی به طور بهینه استفاده کرد و همچنین از تخصص‌های اساتید در ارائه درس‌های مورد نظرشان به نحو مطلوب بهره برد و از همه مهم‌تر این‌که اساتید و دانشجویان می‌توانند از وقت خود به‌طور بهینه استفاده کنند.

قدردانی

در پایان از جناب آقای دکتر میرحسنی که راهنمایی‌های ایشان در قسمت مدل‌سازی راهگشای ما بود تشکر می‌کنیم.

منابع

1. Abdennadher, S. and Marte, M. (1999) "University timetabling using constraint handling rules. "Journal of Applied Artificial intelligence, "Special Issue on Constraint Handling Rules.

2. Rudova, H. and Matyska, L. (1999) "Timetabling with Annotations, "FIMU Report Series.

3. Kiaer, L., Yellen, J. (1992) "Weighted Graphs and university course timetabling, "Computer Operations Research, 19, 59-67.

4. Hertz, A. (1991) "Tabu search for large scale timetabling problems, "European journal of operational research, 54, 39-47.

5. Socha, K., Knowles, J., Sampels, M. (2002) "A Max-Min Ant System for the University Timetabling problem. In Dorigo, M., Di Caro, G., Sampels, M., eds.: Proceeding of ANTS 2002 – Third International Workshop on Ant Algorithms. Lecture Note in Computer Science, Springer Verlag, Berlin Germany.

6. Koulmas, C., Antony, S. R. and Jaen, R. (1994) "A Survey of Simulated Annealing Applications to Operations Research Problems, "Omega International Journal of Management Science Vol. 22, 41-56.

7. Colorni, A, Dorgio, M., Maniezzo, V. (1990) "Genetic Algorithms and Highly Constrained Problems: The Time-Table Case, in Goos, G., Hartmanis, J. (eds.): Parallel Problem Solving from Nature,Springer-Verlag, 55-59.

دوماهنامه علمی – پژوهشی دانشور رفتار / دانشگاه شاهد / تیر ۸۵ / سال سیزدهم / شماره ۱۷