روشي جديد براي ساخت كدهايي با ماتريس پريتي- چك كم- چگالي

محمود رشيدپور — دانشجوی دوره دکترای مخابرات، گروه برق، دانشکده فنی، دانشگاه تهران
جواد حقيقت — دانشجوی دوره فوق ليسانس مخابرات، گروه برق، دانشکده فنی، دانشگاه تهران
حميد بهروزي — دانشجوی دوره فوق ليسانس مخابرات، گروه برق، دانشگاه صنعتي شريف
سيد حميدرضا جمالي — دانشيار گروه برق، دانشکده فنی، دانشگاه تهران

چكيده

كدهايي با ماتريس پريتي- چك كم- چگالي (LDPC: Low-Density Parity-Check) در ۱۹۶۲ توسط گالاگر (Gallager) كشف شدند. پس از گذشت حدود سه دهه عملكرد نزديك به حد شانون (Shannon) آنها در سال ۱۹۹۶ توسط مك-كي (MacKay) و نيل (Neal) مجدداً كشف شدند. در حال حاضر اين كدها جزء مباحث داغ تحقيقاتي ميباشند. عليرغم وجود دكدينگ تكراري و ساده براي اين كدها توسط الگوريتم تكراري جمع ضرب (SPA: Sum Product Algorithm)، ساخت و انكدينگ اين كدها مشكل عمدة آنها به شمار ميآيد. بهطور كلي روشهاي متنوعي براي ساخت اين كدها در نظر گرفته شده است. در اين مقاله مهمترين روشهاي ساخت معرفي و مقايسه خواهد شد بعلاوه اينكه روشي جديد نيز براي ساخت اين كدها ارائه خواهد شد كه باعث بهبود عملكرد خطا ميشود.

كلمات كليدي: كدهـاي LDPC، ماتريس پريتـي- چك تصادفـي، ماتريس پريتي- چك نيمه- تصادفي، عملكرد خطا، ساخت كد.

A New Construction Method for Low-Density Parity-Check Codes

M. Rashidpour, J. Haghighat and S. H. Jamali
Elec. Eng. Dept., Faculty of Eng., University of Tehran
H. Behroozi
Elec. Eng. Dept., Sharif University of Technology

Abstract

Low-Density Parity-Check (LDPC) codes were introduced by Gallager in 1962. After more than three decades the near Shannon limit performance of these codes rediscovered by MacKay and Neal in 1996. Currently, LDPC code is one of the hot topics for research. In spite of simple iterative decoding for these codes by Sum-Product Algorithms (SPA), encoding and constructing of these codes have major difficulty. There exist a variety of methods for constructing LDPC codes. In this paper, we present and compare the most important of these methods. In addition we introduce a new constructing method to enhance the error performance.

Key words: LDPC codes, Random parity-check matrix, Semi-random parity-check matrix, Error performance, Code construction.

۱- مقدمه

كدهاي LDPC در ابتدا توسط گالاگر معرفي شدند [۱ و ۲]. سپس مك-كي و نيل عملكرد نزديك به حد شانون اين كدها را مجدداً كشف نمودند [۳، ۴ و ۵]. معرفي ضمني اين كدها نيز در بررسي كدهايي بر روي گرافهاي تنر (Tanner) [۶] و يا كدهاي بر مبناي گرافهاي expander [۷] مشاهده مي‌شود.

اخيراً اين كدها بسيار مورد توجه واقع شده‌اند زيرا داراي عملكرد عالي خصوصاً روي كانالهاي متقارن باينري (BSC: Binary Symmetric Channel) و گوسي (AWGN: Additive White Gaussian Noise) مي‌باشند. در واقع اين كدها رقيب سرسختي براي توربوكدها هستند. برخي از مزاياي اين كدها نسبت بـه توربوكدهـا به قرار زيـر است: ايـن كدهـا بـه دليل خواص فاصلـه‌اي خوب داراي خطـاي آشـكار نشده نمـي‌باشنـد [۸، ۹ و ۱۰]. روشهای موازی سریع با پیچیدگی کم برای دکدینگ این کدها موجود می‌باشد [۸، ۱۰ و ۱۱]. آنها نيازي به اينترليورهاي (Interleavers) طولاني براي رسيدن به عملكرد خطاي خوب ندارند (در واقع اين كدها داراي اينترليور دروني مي‌باشند)؛ كف خطاي (Error Floor) آنها در نرخ خطاي پايين‌تري رخ مي‌دهد؛ عملكرد خطاي بلوكي بهتري دارند؛ كدهاي نرخ بالا را به راحتي و بدون غربال كردن مي‌توان ساخت؛ به كمك دكدينگ تكراري جمع- ضرب، در هر مرحله از دكدينگ همة بيتهاي دكد شده موجود مي‌باشند و لذا به كمك آنها مي‌توان سيندرم را جهت آشكارسازي خطا و خاتمه تكرارها بكار برد و دكدينگ آنها بر مبناي ترليس نمي‌باشد [۱۲]. دكدرهايي با پيچيدگي بسيار كم و بسيار نزديك به عملكرد دكدور جمع- ضرب را مي‌توان براي آنها طراحي كرد [۱۱]، به عبارت ديگر كدهاي LDPC عملكرد مجانبي بهتري نسبت به توربوكدها داشته و لذا مي‌توان مصالحه‌اي بين پيچيدگي دكدرها و عملكرد آنها ايجاد كرد [۱۳].

علي‌رغم ديگر روشهاي كدينگ كه مشكل عمدة آنها در مرحلة دكدينگ آنهاست، مشكل اصلي كدهاي LDPC در مرحلة كدينگ رخ مي‌دهد كه يك فرايند پيچيده است. روشهاي متنوعي براي غلبه بر اين مشكل نيز مطرح شده‌اند، از قبيل: كدينگ مؤثر كدهاي LDPC [۱۳] كه كدهايي با ماتريس پريتي- چك كم- چگال را در نظر مي‌گيرد. ايجاد كدهاي LDPC با ماتريس نيمه- تصادفي [۱۴]، تركيب ماتريسهاي تصادفي و گردشي [۱۵ و ۱۶]، روش جبري بر مبناي هندسه‌هاي محدود [۱۲ و ۱۷] و كدهاي LDPC بر مبناي كدهاي آرايه‌اي براي استفاده در خطوط (ADSL: Asymmetric Digital Subscriber Line) [۱۸].

براي بهبود عملكرد اين كدهاي جديد دو تعميم اساسي مورد توجـه قـرار گرفتـه است. ابتدا تعميـم ايـن كـدها روي GF (q) [۱۹ و ۲۰] و ديـگري مفهـوم كـدهاي نامنظم LDPC [۱۱، ۲۱ و ۲۲].

كدهاي LDPC خوب عموماً بر مبناي يك جستجوي طولاني كامپيوتري توليد مي‌شوند كه كار ساده‌اي نمي‌باشد. از آنجائيكه يافتن يك ماتريس پريتي- چك مناسب براي توليد كدهاي خوب LDPC بسيار مهم مي‌باشد، الگوريتم‌هايي جهت شرو ع اين عمل ارائه شده‌اند [۱، ۲ و ۵]. در [۹] سه ساختار تصادفي بررسي شده است و عملكرد سه ساختار پواسن (Poisson)، سوپر- پواسن (Super-Poisson) و زير- پواسن (Sub-Poisson) مد نظر قرار گرفته و مشاهده شده است كه ساختار سوپر-پواسن حدود 0.05dB نسبت به پواسن بهبود دارد. اگر چه اين بهبود قابل توجه نيست اما مهم است كه بدانيم اين بهبود هيچگونه پيچيدگي در كدينگ و دكدينگ اضافه نمي‌كند.

در اين مقاله ما به مقايسة ساختارهاي تصادفي كدهای LDPC مي‌پردازيم و سعي مي‌كنيم بهترين مصالحه بين پيچيدگي كدينگ و عملكرد خطا را در سيستمهای عملي ارائه كنيم. اين مقايسه شامل سه گروه از مهمترين ساختارهاي تصادفي مي‌باشد: گالاگر [۲] و مك-كي [۵ و ۲۵] بعنوان ساختارهاي استاندارد بعلاوة ساختار نيمه-تصادفي [۱۴]. خواهيم ديد كه ساختار گالاگر بهترين فرم براي مقاصد ما مي‌باشد ولي داراي محدوديت عملي است. براي غلبه بر اين محدوديت ساختار جديدي را معرفي مي‌كنيم كه نسبت به ساختار مك-كي از پيچيدگي كمتري برخورد مي‌باشد ولي براي مقاصد عملي بهتر بوده و عملكردي بهتري نسبت به ساختارهاي ديگر دارد. قابل توجه است كه بدانيم قويترين كدهاي طراحي شده تاكنون كدهاي نامنظم LDPC مي‌باشند [۲۴] كه از حد شانون حدود 0.0045dB فاصله دارند اما اين عملكرد براي طول ده ميليون مي‌باشد كه به وضوح با تكنولوژي فعلي عملي نمي‌باشد. در واقع يكي از مهمترين مباحث تحقيقي مطلوب در زمينة كدهاي LDPC بررسي آنها براي طولهاي كوتاه مي‌باشد. لذا در اين مقاله نيز تمركز اصلي ما روي كدهايي با طول كم خواهد بود.

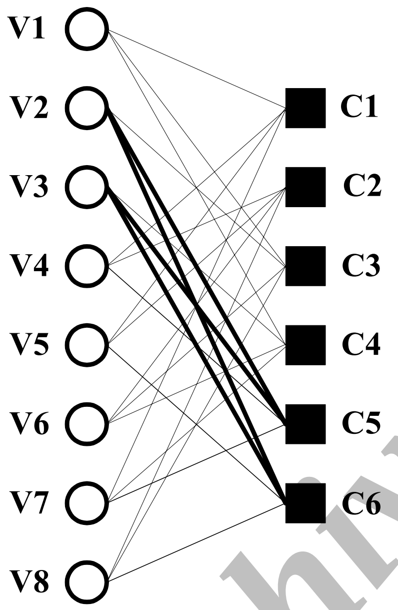
سازماندهي اين مقاله مطابق زير مي‌باشد. در بخش دوم مروري بر مفهوم اولية كدهاي LDPC خواهيم داشت. روش دكدينگ كدهاي LDPC در بخش سوم بررسي مي‌شود. بخش چهارم به ساختارهاي تصادفي كدها اختصاص يافته است. در بخش پنجم عملكرد اين ساختارهاي تصادفي بررسي مي‌شود. در بخش ششم ساختار جديد ما ارائه خواهد شد. بحث و كارهاي بيشتر در بخش هفتم بررسي مي‌شود. در انتها مقاله با بررسي نتايج خاتمه خواهد يافت.

۲- كدهاي پريتي - چك كم - چگالي (LDPC: Low-Density Parity-Check)

كد LDPC يك كد بلوك خطي مي‌باشد كه توسط يك ماتريس پريتي- چك كم- چگالي مشخص مي‌شود. كد LDPC را مي‌توان توسط يك گراف دو بخشي (BG: Bipartite Graph) نمايش داد. فرض كنيم كه ماتريس H يك كد LDPC داراي M سطر و N ستون باشـد، در اينصورت گراف دو بخشي متناظر شامل N گره بيت مـي‌باشد كه آنها را گره‌هـاي متغييـر (Variable Node) و يا گره‌هاي (سمت) چپ مي‌نامند. M گره چك (Check Node) كه آنها را گره‌هاي (سمت) راست مي‌ناميم و تعداد ويژه‌اي از شاخه‌ها. هر گره متغير نمايشگر يك بيت از كلمه كد مي‌باشد در حاليكه هر گره چك متناظر يك بيت پريتي مي‌باشد. از نظر گرافيکی، يك گره متغير را با يك دايره و يك گره چك را با يك مربع نمايش مي‌دهيم. بين يك گره متغير و يك گره چك يك شاخه موجود است اگر و فقط اگر يك دراية "1" متناظر در ماتريس H باشد.

درجة يك گره تعداد شاخه‌هايي است كه به آن متصل مي‌باشد و كدهاي LDPC منظم كدهايي هستند كه درجة گره‌هايي از يك نوع باهم برابر باشند. یک کد (dv,dc)- منظم LDPC دارای يك گراف دو بخشي است كه همة گره‌هاي متغير داراي درجة dv و همة گره‌هاي چك داراي درجة dc مي‌باشند. بهطور متناظري در ماتريس پريتي- چك H وزن همة ستونها dv و وزن همة سطرها dc مي‌باشد. براي كدهاي نامنظم LDPC گره‌هاي متغير و/يا گره‌هاي چك مي‌توانند داراي درجه‌هاي مختلف باشند. ماتريس پريتي- چك يك كد (۴و۳)- منظم LDPC در زير ارائـه شده و گراف دو بخشي متناظر آن در شكل (۱) نشان داده شده است.

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



شکل ۱- گراف دو بخشی یک کد (۴ و ۳)- منظم LDPC. هر Vi نظیر یک گره متغیر و هر Ci نظیر یک گره چک میباشد. گرث مرتبه ۴ با خطوط ضخیم مشخص شده است.

در انتهاي اين بخش به معرفي مفهوم بسيار مهمي بنام گرث (Girth) مي‌پردازيم. گرث عبارت است طول كوتاهترين حلقه در يك گراف دو بخشي. شكل (۱) يك حلقه از كد (۴ و ۳) بالا را نشان مي‌دهد. توجه شود كه حلقه‌اي با طول چهار معادل با دو همپوشاني از دو ستون ماتريس H مي‌باشد، همانطور كه بایکهاي ضخيم در ماتريس بالا نشان داده شده است. لازم است كه حلقه‌هايي با طول كوتاه و خصوصاً كوتاهترين آنها با طول چهار را حذف كنيم زيرا وجود آنها اثر بدي در عملكرد دكدينگ خواهد داشت [۵]. براي بررسي روش استاندارد حذف اين حلقه‌ها و مباحث بيشتر [۲۵] را ببينيد.

۳- دکدینگ تکراری (BP: Belief Propagation) براي کدهاي LDPC

الگوريتم دکدينگ مرسوم براي کدهاي LDPC الگوريتم BP پيرل (Pearl) مي‌باشد [۲۶]، که بعنوان يك دکدينگ تکراري براي اين کدها توسط مك-کي [۵] براي اولين بار ارائه شد. الگوريتم دکدينگ آماري اوليه توسط گالاگر [۱ و ۲] فرم لگاريتمي الگوريتم فوق مي‌باشد که بنام روش LOG-BP شناخته مي‌شود [۸ و ۲۷]. قابل توجه است که الگوريتم BP نيز حالت خاصي از الگوريتم عمومي عبور- پيام (Message-Passing) مي‌باشد که به آن الگوريتم جمع- ضرب مي‌گويند که روي يك گراف- فاكتور (Factor Graph) اعمال مي‌شود [۲۸].

قبل از توصيف خلاصه‌اي از الگوريتم دکدينگ به معرفي چند تعريف خواهيم پرداخت. فرض کنيم H ماتريس پريتي- چك باشد. مجموعة بيت‌هاي n که در گره m مشترك هستند را با N(m)={n: H_{mn}=1} نشان مي‌دهيم. بهطور مشابهي مجموعة چك‌هاي m که در بيت n مشترك هستند را با M(n)={m: H_{mn}=1} نشان مي‌دهيم. مجموعه N(m) سوای بيت n را با N(m)\n و مجموعة M(n) سواي چک m را با M(n)\m نشان مي‌دهيم. الگوريتم دکدينگ تکراري بر مبناي BP داراي دو بخش پياپي مي‌باشد که در آنها کميت‌هاي q^z_{mn} و r^z_{mn} متناظر با عناصر غير صفر ماتريس H بهطور تکراري به روز مي‌شوند و z صفر يا يك مي‌باشد. منظور از کميت q^z_{mn} احتمال آن است که بيت n برابر z باشد مشروط به داشتن اطلاعات از چك‌هاي مرتبط بهجز خود m يعنی مجموعه (M(n)\m) و منظور از کميت r^z_{mn} احتمال آن است که چك m ارضا شود وقتي بيت n برابر z است و بقية بيت‌ها توزيع مجزايي مطابق احتمالهاي {q_{mk} :k ∈ N(m)\n} دارند. $P(v_n=z)$ احتمال اوليه در شروع فرايند دکدينگ مي‌باشد. اين احتمال کاملاً مرتبط با کانال و سيگناليناگ مورد استفاده مي‌باشد. از آنجائيکه در اين مقاله کانال AWGN و سيگنالينگ استاندارد BPSK را بهکار مي‌بريم اين احتمال مطابق زير محاسبه مي‌شود.

$$P(v_n = z) = \frac{1}{1+e^{2(2z-1)y_n/\sigma^2}} \qquad (۱)$$

که در اينجا y_n برابر n امين مؤلفه بردار نرم (Soft) دريافتی میباشد و $y_n = (1-2v_n) + w_n$ که v_n بيتهای کلمه کد و w_n نويز گوسی میباشد: $w_n = AWGN \sim (0,\sigma^2)$.
الگوريتم تکراری دکدينگ مطابق زير خلاصه میشود.

۱- مقدار دهی اوليه:

$$q^z_{mn} = P^z_n = P(v_n = z) \qquad (۲)$$

۲- مرحله تکراری

الف- مرحله افقی (اجرا در m ثابت)

$$r^z_{mn} = \frac{1+(-1)^z \prod_{N(m)\backslash n}\left(q^0_{mn} - q^1_{mn}\right)}{2} \qquad (۳)$$

ب- مرحله عمودی (اجرا در n ثابت)

$$q^z_{mn} = \alpha_{mn} P^z_n \prod_{M(n)\backslash m} r^z_{mn} \qquad (۴)$$

که در اينجا α_{mn} با يک محاسبه رفت و برگشتی چنان محاسبه میشود که: $q^0_{mn} + q^1_{mn} = 1$.
احتمال شبه- پسين (PPP: Pseudo-Posteriori Probability) يعنی q^z_n را میتوان مطابق زير حساب کرد:

$$q^z_n = \alpha_n P^z_n \prod_{M(n)} r^z_{mn} \qquad (۵)$$

و α_n چنان حساب می شود که: $q^0_n + q^1_n = 1$.

ج- مرحله دکدينگ

$$\hat{V} = [\hat{v}_n] \;, \qquad \hat{v}_n = \underset{z}{ArgMax}\, P^z_n \prod_{M(n)} r^z_{mn} \qquad (۶)$$

و يا اگر PPP محاسبه شده باشد:

$$\hat{v}_n = \begin{cases} 1 & q_n^1 > 0.5 \\ 0 & q_n^1 \le 0.5 \end{cases} \quad (۷)$$

د- مرحله بررسی صحت دکدینگ (محاسبه سیندرم)

$$S = H\hat{V}^T \quad (۸)$$

هـ- مرحله تصمیم گیری

اگر S=0 باشد، الگوریتم دکدینگ متوقف شده و $\hat{V}$ بعنوان کلمه کد معتبر انتخاب می‌شود. اگر پس از شمار ماکزیممی از تکرارها (مثلاً ۵۰۰) الگوریتم دکدینگ موفق به یافتن کلمه کد معتبر نشود، می‌گوییم دکدینگ با شکست مواجه شده است.

۴- ساختارهاي تصادفي براي ماتريس LDPC

در اين بخش مروري كوتاه بر سه ساختار تصادفي در توليد ماتريس LDPC خواهيم داشت كه شامل ساختارهاي گالاگر، مك-كي و نيمه- تصادفي مي‌باشند.

الف- گالاگر

بهطور اوليه گالاگر [۱ و ۲] كدهاي LDPC را با سه پارامتر (N,dv,dc) معرفي كرد، بهطوريكه (dc>dv>2) باشد. وي ماتريس پريتي- چك H را چنان ساخت كه هر ستون (سطر) داراي وزن همينگ برابر با dv (dc) باشند. در ساختار وي N (طول كد) بر dc قابل قسمت است (L=N/dc) و لذا (M=L.dv) . او ماتريس H را به dv زير- ماتريس تقسيم كرد $(h_{L.N}^i)$. هر سطر $(h_{L.N}^1)$ شامل dc "يك" متوالي مي‌باشد و در هر ستون فقط يك عدد "1" موجود مي‌باشد. ديگر زير- ماتريسها $(h_{L.N}^{i>1})$ يك جايگشت تصادفي از ستونهاي زير- ماتريس اول مي‌باشند.

ب- مك-كي

مك-كي چندين گروه از ماتريس‌هاي كم- چگالي را معرفي كرده است [۵]. در اينجا بهترين و مهمترين فرم از اين ساختارهاي تصادفي را ذكر مي‌كنيم. ماتريس H با وزن dv براي هر ستون ايجاد مي‌شود و وزن سطرها تا آنجا كه ممكن باشد برابر با dc در نظر گرفته مى‌شود. به تعبير ديگر حداكثر تفاوت بين وزن سطرها يك خواهد بود.

ساخت چنين ماتريسي با پر كردن تصادفي هر ستون با dv "يك" شروع ميشود. و اگر وزن سطري كمتر از دو باشد يك عدد "يك" تصادفي در سطر اضافه مي‌شود تا وزن به دو برسد. سپس وزن سطرها را با جابجايي "يك‌ها" در ستون‌ها تا آنجائيكه ممكن باشد يكنواخت ميكنيم. براي جلوگيري از وقوع گرث مرتبه چهار حداكثر همپوشاني دو ستون به يك محدود مي‌شود.

ج ـ نيمه- تصادفي

در دو روش فوق، مجبوريم كه فرم سيستماتيك ماتريس H را بهمنظور تهيه ماتريس مولد براي مرحلة كدينگ بسازيم. براي غلبه بر مشكلات اين فرايند مفهوم ماتريس LDPC نيمه- تصادفي در [۱۴] مطرح شده است. در روش نيمه-تصادفي براي توليد كد (N,K) با ماتريس پريتي- چك $H_{MN} = [h_{i,j}]$ و (M=N-K)، فرض مى‌شود كه (L=M/dv) و (dx=K.dv/M) باشد، بنابراين ماتريس H را مى‌توان به فرم زير نوشت:

$$H_{MN} = \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{L.K}^1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & \vdots \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \underbrace{0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1 \quad 1}_{M} & & & & & a_{L.K}^{dv} \end{array} \right] \quad (۹)$$

در ماتريس فوق هر يک از $(a_{L.K}^i)$ ها يک ساختار تصادفی با وزن ستون يک و وزن سطری برابر با dx می‌باشند. اگر بردار كلمه كد $V = (p_1, ..., p_M, u_1, ..., u_k)$ باشد، از معادله $HV^T = 0$، معادلات انكدينگ (encoding) زير حاصل مى‌شود.

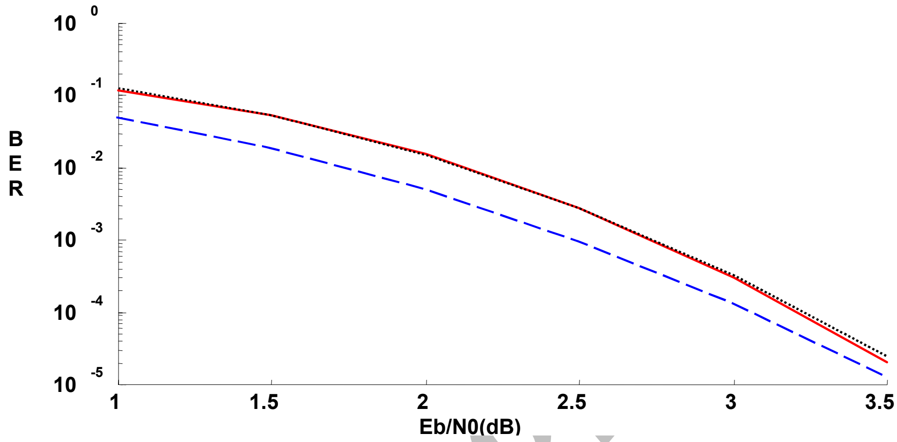
$$p_1 = \sum_{j=1}^{K} u_j h_{1,M+j} \quad (۱۰)$$

$$p_m = p_{m-1} + \sum_{j=1}^{K} u_j h_{m,M+j}, \; 2 \le m \le M \quad (۱۱)$$

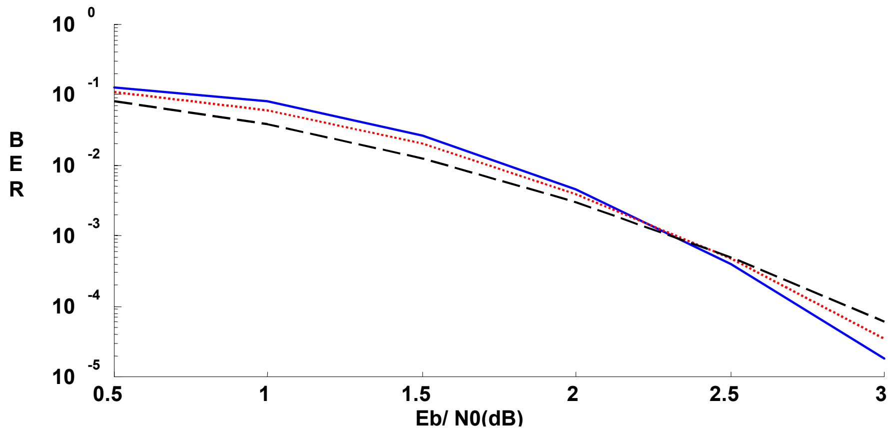
۵- نتايج شبيه‌سازي

شكلهاي (۲) تا (۴) نتايج شبيه‌سازي را براي كدهاي نرخ پائين، متوسط و بالا نشان مي‌دهند. خطوط Solid براي ساختار گالاگر، Dot براي ساختار مك-كي و Dash براي ساختار نيمه تصادفي استفاده شده است. ساختار گالاگر با پارامترهاي (N,dv,dc) و دو ساختار ديگر با (N,M,dv) مشخص شده‌اند. در هر شكل، همة ساختارهاي مقايسه شده داراي نرخ يكسان (R)

هستند. براي ساختار گالاگر و مك-كي dv يكسان انتخاب شده است و همانطور كه در [۵] اشاره شده كوچكترين dv را براي مقاصد عملي انتخاب كرده‌ايم. براي ساختار نيمه- تصادفي مطابق بيان مؤلفان [۱۴] dv نبايد خيلي بزرگ باشد و انتخاب dv بين ۳ تا ۵ بهترين نتايج شبيه‌سازي را دارد. با توجه به شكل‌هاي (۲) تا (۴) مشاهده مي‌شود كه ساختار نيمه- تصادفي مي‌تواند تا نرخهاي متوسط بهخوبي ساختارهاي گالاگر و مك-كي كار كند و حتي در نرخهاي پائين كمي بهتر از آنها عمل كند. اما در نرخهاي بالا نمي‌تواند به خوبي دو ساختار ديگر باشد. بعلاوه اينكه مشاهده مي‌شود ساختار گالاگر در همة نرخها مي‌تواند بخوبي مك-كي عمل كند.



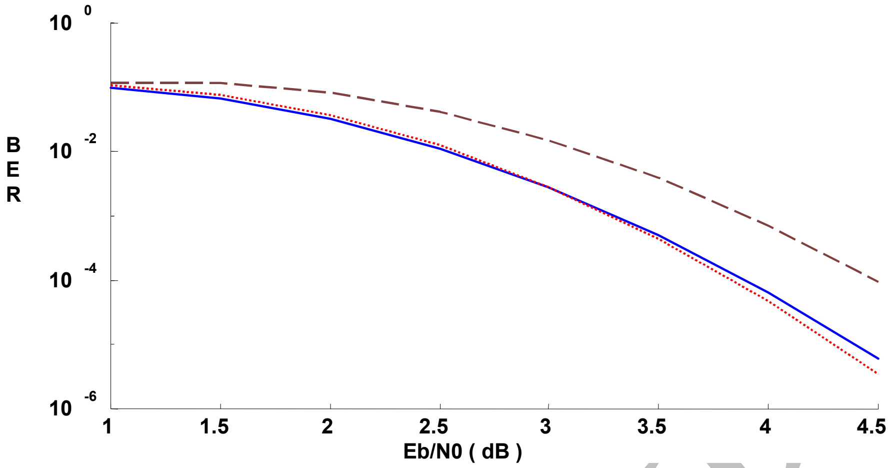
شكل ۲- مقايسه كدهايی بـا طول كوتاه و نرخ پايين. Solid: **گالاگر (۴، ۳ و ۴۰۰)**، Dot: **مک-كي (۳، ۳۰۰ و ۴۰۰)**، Dash: **نيمه- تصادفـی (۳، ۳۰۰ و ۴۰۰). نرخ كدها برابر ۰/۲۵ می‌باشد**



شكل ۳- مقايسـه كدهايـی بـا طـول كوتاه و نرخ متوسـط. Solid: **گالاگـر (۶، ۳ و ۵۰۴)**، Dot: **مک-کـي (۳، ۲۵۲ و ۵۰۴)**، Dash: **نيمه- تصادفی (۳، ۲۵۲ و ۵۰۴). نرخ كدها برابر ۰/۵ می‌باشد**

بهدليل پيچيدگي كمتر در ساخت و عملكرد خوب (بخصوص در نرخهاي بالا)، ساختار گالاگر بهترين مصالحه بين پيچيدگي و عملكرد تصحيح خطا را دارد و هرگاه بتوانيم يك dv كوچك بيابيم. در نرخهاي پائين و متوسط ساختار نيمه- تصادفي مي‌تواند مناسب باشد. در بخش بعد توضيحات بيشتري پيرامون اين بيانها خواهيم داد. در همة شكلها محور افقي Eb/N0 برحسب dB مي‌باشد كه:

$$\frac{E_b}{N_0} = \frac{1}{2R\sigma^2} \qquad (۱۲)$$



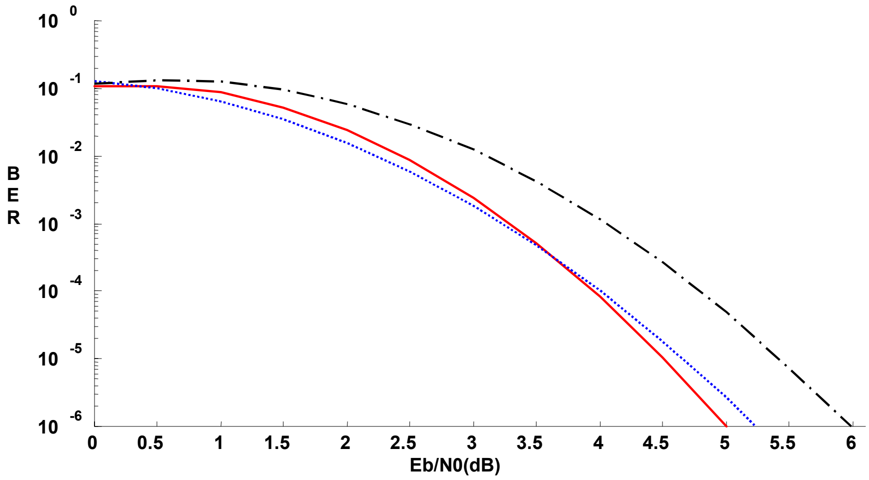
شكل ۴- مقايسه كدهايـی بـا طول كوتاه و نرخ بالا. Solid: گالاگر (۱۲، ۳ و ۳۶۰)، Dot: مک-كي (۳، ۹۰ و ۳۶۰)، Dash: نيمه- تصادفـی (۵، ۹۰ و ۳۶۰). نرخ كدها برابر ۰/۷۵ می‌باشد

۶- ساختار جديد

در بخش ۵ ساختارهاي گالاگر، مك-كي و نيمه- تصادفي بررسي شدند. شكل (۴) نشان مي‌دهد كه ساختار نيمه- تصادفي در نرخ بالا نمي‌تواند بهخوبي دو ساختار ديگر عمل كند. ساختار گالاگر با پيچيدگي كمتر بهخوبي ساختار مك-كي عمل مي‌كند. اما دو ساختار گالاگر و نيمه- تصادفي داراي محدوديتي هستند كه از نظر طراحي عملي بسيار مهم است. اين محدوديت قابل تقسيم بودن M بر dv مي‌باشد. در ساختار نيمه- تصادفي اين شرط بايد ارضاء شود و در كل نمي‌توان آن را تعديل كرد. اما براي ساختار گالاگر مي‌توان راه حلي ارائه كرد.

در ابتدا اثر مخرب اين محدوديت بر عملكرد ساختار گالاگر را بيان مي‌كنيم. فرض كنيم هدف طراحي كدي با طول پيام K=110 و نرخ R=11/18 باشد. در اينصورت N=180 و يك ماتريس پريتي- چك 180*70 نياز داريم. همانطور كه مي‌دانيم با افزايش dv عملكرد را از دست ميدهيم [۵]. از طرف ديگر اگر بخواهيم براي ماتريس فوق كد گالاگر طراحي كنيم كوچكترين dv مجاز 7 مي‌باشد (توجه شود كه بايد dc=N.dv/M يك عدد صحيح باشد). اين انتخاب تعداد كل يكها در ماتريس H را افزايش مي‌دهد و لذا تعداد حلقه‌ها نيز افزايش مي‌يابد. حذف همة اين حلقه‌ها ممكن نيست و لذا كاهش عملكرد اجتناب‌ناپذير است و شكل (۵) اين كاهش عملكرد را نشان مي‌دهد.

حال ساختار جديد خود را ارائه مي‌كنيم و نشان مي‌دهيم كه عملكرد آن بهتر است. در ساختار جديد، ساختار گالاگر بهعنوان اساس كار مي‌باشد و لذا ساختار جديد را گالاگر اصلاح شده مي‌ناميم. ساختار جديد را با C(N,dv,dc,dd) نمايش مي‌دهيم كه C(N,dv,dc) همان نمايش گالاگر مرسوم مي‌باشد. و منظور از dd مرتبة حذف مي‌باشد. ايدة اصلي در روش جديد حذف M×dd سطر از كد اصلي C(N,dv,dc) مي‌باشد و اين حذف سبب كاهش dv مؤثر كد خواهد شد. در اين حذف، بايد دو نكتة مهم را رعايت كنيم. اولاً: بايد حلقههاي مرتبه چهار را حذف كنيم، بهعبارت ديگر در حذف هر سطر بايد يكی از اين حلقهها از كد مادر حذف شود. اگر حلقة مرتبه چهارمي نباشد بايد حلقه‌هاي بزرگتر را در نظر بگيريم (توجه شود كه عمل حذف حلقه‌ها مي‌تواند با حذف حلقه‌هاي مرتبه ۶، ۸، ۱۰ و .... انجام شود ولي براي حفظ سادگي مي‌توان به همان حلقه‌هاي مرتبه ۴ اكتفا كرد). دوماً، حداكثر تعداد يكي كه مي‌توان از هر ستون حذف كرد يك می‌باشد. يعني بايد كد را تا آنجا كه ممكن است منظم نگه داريم و لذا dd<1. نتايج شبيه‌سازي نشان مي‌دهد كه انتخاب 0.1<dd<0.9 منجر بهعملكرد عالي مي‌باشد خصوصاً وقتي كه dd نزديك مرزها انتخاب شود يعني 0.1 و 0.9 كه باعث مي‌شود كد به حالت منظم نزديكتر باشد. شكل (۵) عملكرد ساختار گالاگر اصلاح شده را نشان مي‌دهد كه نسبت به ساختار گالاگر حدود 1dB بهبود داشته و نسبت به ساختار پيچيده مك-كي نيز بهطور جزئي بهتر عمل مي‌كند (حدود 0.2dB).



شکل ۵- مقایسه ساختار گالاگر (۱۸، ۷ و ۱۸۰) (Dash-Dot) و ساختار اصلاح شده (۰/۵، ۹، ۴ و ۱۸۰) (Solid). ساختار اصلاح شده حدود 1 dB بهبود دارد. (Dot) ساختار مک-کي (۳، ۷۰ و ۱۸۰) را نشان می‌دهد. توجه شود که dv مؤثر کد اصلاح شده کمتر از ۴ می‌باشد و نرخ همه کدها ۱۱/۱۸ (تقریباً ۰/۶۱۱۱) میباشد

۷- بحث و كار بيشتر

در بخش قبل اصلاح ساختار گالاگر بررسي شد. ديديم كه با دو معيار ساده اين ساختار اصلاح شده بهخوبي ساختار پيچيدة مك-كي كار مي‌كند. اصلاح بيشتر اين روش به طرق مختلفي امكان‌پذيراست. براي مثال مي‌توان حلقه‌هاي مرتبة ۴، ۶ و ۸ را همزمان در نظر گرفت و در حذف آنها درجة اهميت مناسبي در نظر گرفت و بدين ترتيب مي‌توان سطرهايي را حذف كرد كه اثر مخرب بيشتري دارند و لذا به عملكرد بهتري دست يافت. هر چند اين روش يا روشهاي مشابه ديگر ما را از هدف اصلي يعني سادگي دور خواهد ساخت. براي كار بيشتر، سعي ما در يافتن بهترين مصالحه بين سادگي و عملكرد مي‌باشد.

۸- نتيجه گيری

ما ابتدا ساختارهاي تصادفي براي طولهاي كوتاه كدهاي LDPC را بررسي كرديم و ديديم كه ساختارهاي مك-كي و گالاگر عملكرد مشابهي دارند. ساختار گالاگر ساده‌تر است اما ساختار مك-كي عمومي‌تر بوده و در سيستم‌هاي عملي بهتر جواب مي‌دهد. سپس، ساختار گالاگر را اصلاح كرديم و به يك ساختار ساده رسيديم كه سادگي ساختار گالاگر را دارد و از ساختار مك-كي بهتر عمل مي‌كند.

نمادها

H	ماتریس پریتی- چک
N	طول کلمه کد برحسب بیت
K	طول پیام برحسب بیت
M	تعداد بیتهای پریتی
dv	وزن همینگ ستونهای ماترس H / درجه گرههای متغیر
dc	وزن همینگ سطرهای ماترس H / درجه گرههای چک
R	نرخ کد
V	بردار کلمه کد
S	سیندرم
dd	میزان حذف سطرهای ماتریس H
σ	انحراف معیار نویز گوسی

مراجع

[1] R. G. Gallager, "Low density parity check codes," IRE Trans. Inform. Theory, vol. IT-8, no. 1,pp. 21-28, Jan.1962.

[2] R. G. Gallager, "Low density parity check codes," IRE Trans. Inform. Theory, vol. IT-8, no. 1,pp. 21-28, Jan.1962.

[3] D. J. C. MacKay and R. M. Neal, "Near Shannon limit performance of low density parity check codes," Electronics. Letter vol. 32, no. 18, pp. 1645-1646, Aug. 1996.

geometries, a rediscovery," in Proc. 2000 IEEE Int. Symp. Information Theory, pp. 200.

[17] Y. Kou, S. Lin, and M. P. C. Fossorier, "Low density parity check codes based on finite geometries, a rediscovery," in Proc. 2000 IEEE Int. Symp. Information Theory, pp. 200.

[18] Study Group 15/4," G. gen: LDPC codes for G. dmt. bis and G. lite. bis," Temporary Document CF-060, Clearwater, Florida, 8-12 Jan. 2001.

[19] M. C. Davey and D. J. C. MacKay, "Low-density parity-check codes over GF(q)," IEEE Commun. Lett., vol. 2, no. 6 , pp. 165-167, June. 1998.

[20] M. C. Davey and D. J. C. MacKay, "Low-density parity-check codes over GF(q)," Information Theory Workshop, 1998, pp. 70-71.

[21] M. G. Luby, M. A. Shokrollahi, M. Mizenmacher, and D. A. Spielman, "Improved low-density parity-check codes using irregular graphs and belief propagation," IEEE in Proc. Int. Symp. Information Theory, 1998, pp. 117.

[22] M. G. Luby, M. Mizenmacher, M. A. Shokrollahi, and D. A. Spielman, "Improved low-density parity-check codes using irregular graphs," IEEE Trans. Inform. Theory, vol. 47, no. 2, pp. 585-598, Feb. 2001.

[23] D. J. C. Mackay, "Good error-correcting codes based on very sparse matrices," IEEE Trans. Inform. Theory, vol. 45, no. 2, pp. 399-431, Mar. 1999.

[24] S. Y. Chung, G. D. Forney Jr., T. J. Richardson, and R. L. Urbanke, "On the design of low-density parity-check codes within 0.0045 dB of the Shannon limit," IEEE Commun. Lett., vol. 5, no. 2, pp. 58-60, Feb. 2001.

[25] R. M. Neal, "Software for low density parity check codes," Available WWW: ftp://ftp.cs.utoronto.ca/pub/radford/LDPC-2001-05-04/, 2001.

[26] J. Pearl, Probabilistic Reasoning in Intelligent Systems: Networks of Plausible Inference, San Mateo, CA: Morgan Kaufmann, 1998.

[27] H. Song, R. M. Todd, and J. R. Cruz, "Low density parity check codes for magnetic recording channels," IEEE Trans. Magnetics,

[4] D. J. C. MacKay, "Good error correcting codes based on very sparse matrices," in Proc. Int. Symp.1997,pp. 113.

[5] D. J. C. MacKay, "Good error correcting codes based on very sparse matrices," IEEE Trans. Inform. Theory, vol. 45,pp. 399-431, Mar. 1999.

[6] R. M. Tanner, "A recursive approach to low complexity codes," IEEE Trans. Inform. Theory, vol. 27, no. 5, pp. 533-547, Sept. 1981.

[7] M. Sipser and D. A. Spielman, "Expander codes," IEEE Trans. Inform. Theory, vol. 42, pp. 1710-1722, Nov. 1996.

[8] T. Zhang, Z. Wang, and K. K. Parhi, "On finite precision implementation of low density parity check codes decoder," IEEE. Int. Symp. Circuits and Systems, ISCAS 2001, pp. 202-205.

[9] D. J. C. Mackay, S. T. Wilson, and M. C. Davey, "Comparison of constructions of irregular Gallager codes," IEEE Trans. Commun., vol. 47, pp. 1449-1454, Oct. 1999.

[10] M. Chiani, A. Conti, and A. Ventura, "Evaluation of low-density parity-check codes over block fading channels," IEEE Int. Conf. on Communications, ICC 2000, vol. 3,pp. 1183-1187.

[11] T. J. Richardson, M. A. Shokrollahi, and R. L. Urbanke, "Design of capacity-approaching irregular low-density parity-check codes," IEEE Trans. Inform. Theory, vol. 47, no.2, pp. 619-637, Feb. 2001.

[12] Y. Kou, S. Lin, and M. P. C. Fossorier, "Low density parity check codes: construction based on finite geometries," IEEE Global Telecommunication Conference, GLOBECOM '00, vol. 2,pp. 825-829.

[13] T. J. Richardson and R. L. Urbanke, "Efficient encoding of low-density parity-check codes," IEEE Trans. Inform. Theory, vol. 47, no. 2, pp.638-656, Feb. 2001.

[14] L. Ping, W. K. Leung, and N. Phamdo, "Low density parity check codes with semi-random parity check matrix," Electronics. Letter, vol. 35,no. 1,7, pp. 38-39, Jan. 1999.

[15] J. W. Bond, S. Hui, and H. Schmidt, "Constructing low-density parity-check codes with circulant matrices," Information Theory and Networking Workshop, 1999, pp. 52.

[16] Y. Kou, S. Lin, and M. P. C. Fossorier, "Low density parity check codes based on finite

vol. 36, no. 5, part 1, pp. 2183-2186, Sep. 2000.

[28] F. R. Kschischange, B. J. Frey, H. A. Loeliger, “Factor graphs and the sum product algorithm,” IEEE Trans. Inform. Theory, vol. 47, no. 2, pp. 498-519, Feb. 2001.