مدلسازی عددی جریان در کانال روباز به روش ردیابي سطح آزاد

محسن گودرزی — استادیار گروه مکانیک، دانشکدة مهندسی، دانشگاه بوعلی سینا
احمدرضا عظیمیان — دانشیار دانشکدة مکانیک، دانشگاه صنعتی اصفهان

چکیده

در این مقاله یک مدل عددی برای جریان درون کانالهای روباز ارائه شده است. الگوریتم عددی به صورتي طراحي شده که مي‌تواند سطح آزاد را ردیابي کرده و از ناپایداریهای ناشي از تولید امواج سطحي جلوگیری کند. به کمک این مدل اثرات تنشهای برشي بر تغییرات سطح آزاد، به خصوص در محلهایی که این تنشها بزرگ هستند، در سه کانال مختلف بررسي شده است. همچنین اثر افزایش عدد فرود بر نتایج عددی مطالعه شده است. نتایج عددی به دست آمده نشان مي‌دهند که با افزایش عدد فرود در مقطع خروجي کانال دقت روش عددی کاهش مي‌یابد. در یک مورد که با افزایش عدد فرود روش عددی به معیار همگرایي معین شده نرسید، جزئیات روش عددی بررسي شده است.

کلمات کلیدی: جریان با سطح آزاد، عدد فرود، فشار غیرهیدروستاتیک.

Numerical modeling for flow in open channel with surface tracking method

M. Goodarzi — Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering, Bu Ali Sina University, Hamadan, Iran
A.R. Azimian — Department of Mechanical Engineering, Isfahan University of Technology, Isfahan, Iran

Abstract

In this paper a numerical model has been introduced to solve the flow in open channels. The algorithm of this numerical model was developed in such a manner that prevents the instabilities, which are produced by the surface waves. With this model, the effects of shear stresses on the variations of the free surface elevation, especially in the regions of stronger shear stresses, were studied for three different open channels. Also the effect of Froud number increasing was studied. The numerical results showed that by increasing the Froud number the accuracy of the model was reduced. The details of numerical procedure were studied in a case, which convergence was failed.

Key words: Free surface flow, Froud number, Non-hydrostatic pressure.

۱- مقدمه

بسیاری از جریانهای موجود در طبیعت و صنعت دارای سطح آزاد هستند. به عنوان مثال از جریان درون کانالهـای انتقـال آب، رودخانه‌ها، دریاها و اقیانوسها مي‌توان نام بـرد، بنـابراین مطالعـة آنها از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. عدد فرود مهمترین پارامتر در جریانهای با سطح آزاد، به خصوص در کانالهـای روبـاز اسـت. عدد فرود که نسبت نیروی اینرسي به نیروی جاذبه است، همانند عدد رینولدز در مجـرای بـسته خـصوصیات و فیزیـک جریـان را تحت تأثیر قـرار مـي‌دهـد. ساده‌تـرین روش بررسـي جریـان در کانالها، تحلیل یک‌بعدی و بدون اصطکاک جریان است کـه بـرای کانالهای مستقیمی که طول کمی داشته و در آنها پدیده‌هـایی از قبیل جریان ثانویه و جدایی جریان اتفاق نمی‌افتد مـی‌توانـد بـه کـار گرفتـه شود [۱]. در صـورتیکـه طـول کانــال کـم نباشــد، نمی‌توان از اثر نیروهای اصطکاکی صرفنظر کـرد. در ایـن کانالهـا باز هم در غیاب جریانهای ثانویـه بـا یـک‌بعـدی در نظـر گـرفتن میدان سرعت به کمک روش انتگرالی و معادلـة منینـگ [۱] اثـر نیروهای اصطکاکی در محاسبات اعمال می‌شوند.

علیرغم کـارایي روشـهای تحلیلـي و نیمـه تحلیلـی فـوق، در بسیاری از موارد اثرات هندسة کانال، نیروهای لزجت، اینرسـي و جریانهای ثانویه به اندازه‌ای بزرگ هستند که این روشها جزئیات جریان را نمي‌توانند پیش‌بیني کنند. به عنوان مثال در یک کانال خمیده تغییرات سطح آزاد و جریانهـای ثانویـه‌ای کـه در مقطـع جریان به وجود مي‌آیند، توسط روشهای تحلیلي قابل پیش‌بینـي نیستند. برای بررسي این جزئیات از مدلهای آزمایـشي مـي‌تـوان استفاده کرد. اما اسـتفاده از مـدلهای آزمایـشگاهي، چـه از نظـر هزینه و چه از نظر محدودیتهای دستگاهي (به خصوص در کشور ما)، مقرون به صرفه نیست. لذا محققـان سـعي کـرده‌انـد کـه از مــدلهای عــددی بــرای مطالعــة ایــن جریانهــا اســتفاده کننــد. مشکلترین مرحله در شبیه‌سازی عددی جریانهای بـا سـطح آزاد، ردیابي سطح آزاد در مراحل میاني حل است. زیرا پدیده‌هایي که در جریان اتفاق مي‌افتند شکل سطح آزاد را مشخص مي‌کننـد و بنابراین بدون حل میدان جریان محـل سـطح آزاد را نمـي‌تـوان مشخص کرد. از دیدگاه روشهای عـددی شـرط مـرزی در سـطح آزاد را در الگوریتم عددی باید اعمـال کـرد. بـرای اعمـال شـرط مرزی که حرکت سطح آزاد را در حـل معـادلات وارد کنـد از دو روش کلي استفاده مي‌شود.

در روش اول سطح آزاد درون یک شبکة ثابت به نحوی ردیابي مي‌شود که سطح آزاد همیشه درون شبکه باشد. روشهای MAC [۲] و VOF [۳] معمولترین روشها در این قسمت هستند. مشخصة تمام این روشها این است که شبکة حل بزرگتر از فضای اشغال شده توسط سیال موردنظر بوده و بنابراین در هر مرحله از حل معادلات، بخشي از زمان و حافظه کامپیوتر به سلولهای محاسباتي که شامل سیال نیستند اختصاص داده مي‌شود. علاوه بر این یک معادلة انتقالي برای یک کمیت کاذب، که معرف محل سطح آزاد است، باید به همراه معادلات اصلي در کل شبکه حل شـود. اصـولاً این روشـها بـرای مسائـلي از قبیـل تزریق مذاب به درون یک قالب و یا مسائلي که در آنها مرز مشترکي بین دو سیال مختلف وجود دارد، مناسب هستند.

در روش دوم شبکة حل منحصر به سیال بوده و سطح آزاد بـه عنوان یکی از مرزهای میدان حل، پیوسته باید مشخص شود. بنابراین شبکه حل نیز در هر مرحله از محاسبات باید بازسازی شود. جزئیات این روش در ادامه تشریح مي‌شوند. این روش برای جریانهای دائم درون کانالها بسیار مناسب است.

برای استفاده از روش دوم یک الگوریتم عددی باید به صورتي طراحي شود که در روند حـل بتوانـد شـبکه را بازسـازی کنـد و پیوستـه مرز شبـکه را بـر سطح آزاد محاسـباتي منطبـق کنـد. به علت ماهیت الگوریتمهای عددی معمـولاً امـواجي روی سـطح آزاد محاسباتي به وجود مي‌آیند که مـي‌تواننـد باعـث ناپایـداری شوند. لذا در این الگوریتمها که معمولاً از روشهای حل کلاسـیک بهره مي‌گیرند، حفظ پایداری مشکل است. در این مقاله الگوریتم موردنظر به گونه‌ای طراحي شده که در شرایط فوق از ناپایـداری حل جلـوگیری کنـد. در ادامـه بـه تـشریح ایـن مـدل عـددی و الگوریتم آن مي‌پردازیم و سپس مدل عددی تهیه شـده را بـرای دو کانال مختلف به کار مي‌بریم.

۲- معادلات حاکم

معادلات حاکم بر یک جریان دائم سه بعدی تراکمناپذیر مغشوش در دستگاه مختصات کارتزین (x,y,z) شامل معادلات پیوستگي، اندازة حرکت و یک مدل اغتشاشي است. در دستگاه مختصات انتخابي صفحه xy در صفحه افق بوده و محور z در

امتداد قائم و در خلاف جهت شتاب ثقل قرار دارد. بنابراین معادلات پیوستگي و اندازهٔ حرکت به صورت زیر نوشته مي‌شوند:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0.0 \quad (۱)$$

$$\rho(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z})-\mu_{eq}(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2})=-\frac{\partial P}{\partial x} \quad (۲)$$

$$\rho(u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z})-\mu_{eq}(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2})=-\frac{\partial P}{\partial y} \quad (۳)$$

$$\rho(u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z})-\mu_{eq}(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2})=-\frac{\partial P}{\partial z}-\rho g \quad (۴)$$

از معادلات $k-\varepsilon$ استاندارد هم برای مدل اغتشاشي استفاده شده است.

$$\rho(u\frac{\partial k}{\partial x}+v\frac{\partial k}{\partial y}+w\frac{\partial k}{\partial z})-\frac{\mu_t}{\sigma_k}(\frac{\partial^2 k}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 k}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 k}{\partial z^2})=G-\rho\varepsilon \quad (۵)$$

$$\rho(u\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}+v\frac{\partial \varepsilon}{\partial y}+w\frac{\partial \varepsilon}{\partial z})-\frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon}(\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial z^2})=c_1\frac{\varepsilon}{k}G-\rho c_2\frac{\varepsilon^2}{k} \quad (۶)$$

در معادلات فوق u و v و w به ترتیب مؤلفه‌های سرعت در راستای x و y و z، p فشار استاتیک درون سیال، ρ چگالي سیال، g شتاب ثقل، و μ ویسکوزیتهٔ سیال هستند. همچنین در معادلات مدل اغتشاشي G جملهٔ تولید انرژی اغتشاشي است که به صورت تانسوری زیر معرفي مي‌شود:

$$G=\mu_t(u_{i,}^j+u_{,i}^j)u_{,j}^i, \quad i=1,2,3, \quad j=1,2,3 \quad (۷)$$

که در آن u_i^jها مشتقات مؤلفه‌های سرعت نسبت به جهات مختصات هستند. در ضمن μ_t از رابطهٔ زیر به دست مي‌آید:

$$\mu_t=\rho c_\mu\frac{k^2}{\varepsilon} \quad (۸)$$

c_1 و c_2 و c_μ و σ_k و σ_ε ضرایب مدل k-ε استاندارد هستند که مقادیر آنها در جدول (۱) آورده شده است.

جدول ۱- ضرایب مدل اغتشاشي k-ε استاندارد [۴]

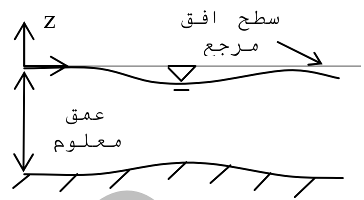
c_μ	c_1	c_2	σ_k	σ_ε
۰/۰۹	۱/۴۴	۱/۹۲	۱/۰	۱/۳

در میـدان جریان با سطح آزاد سـهم زیادی از فشار پیزومتري (فشار در معادلات ناویر استوکس) متعلق به فشار هیدرواستاتیک است. در صورتیکه سیال ساکن باشد فشار پیزومتري و فشار هیدرواستاتیک با هم برابرند. لذا در سیال جاری سهم دیگري از فشار در اثر نیروهای اینرسي به وجود مي‌آید که آن را از فشار هیدرواستاتیک مي‌توان مجزا کرد. اختلاف فشارهای پیزومتـري و هیدروستاتیک را فشار غیرهیدروستاتیک(1) [۵] مي‌نامند. طبق شکل (۱)، سطح افق مرجع را مماس بر نقطه‌ای از سطح آزاد در نظر مي‌گیریم که محل آن از ابتدا مشخص و معلوم است و نقاط درون میـدان جریـان را نسـبت به این سطح مرجع می‌سـنجیم. به این ترتیب با توجه به اینکه فشار پیزومتري در سطح آزاد فشار اتمسفر است، فشار غیرهیدرواستاتیک (ψ) را در هر نقطه از میدان جریان از رابطه زیر مي‌توان بدست آورد:

$$\psi=P+\rho gz-P_{atm} \quad (۹)$$

1- non-hydrostatic pressure

که در آن جمله اول سمت راست فشار پیزومتري، جملات دوم و سوم به ترتیب فشارهای هیدرواستاتیک و اتمسفرهستند، که با توجه به شکل (۱) از فشار پیزومتري کم شده‌اند.



شکل ۱- انتخاب محل سطح مرجع در نقطه‌ای از سطح آزاد با عمق معلوم

حال گرادیانهای فشار را در معادلات اندازهٔ حرکت با گرادیانهای فشار غیرهیدروستاتیک مي‌توان جایگزین کرد و معادلات اندازهٔ حرکت را به صورت زیر نوشت:

$$\rho(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z})-\mu_{eq}(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2})=-\frac{\partial \psi}{\partial x} \qquad (۱۰)$$

$$\rho(u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z})-\mu_{eq}(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2})=-\frac{\partial \psi}{\partial y} \qquad (۱۱)$$

$$\rho(u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z})-\mu_{eq}(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2})=-\frac{\partial \psi}{\partial z} \qquad (۱۲)$$

برای حل معادلات نهایی استخراج شده به شرایط مرزی نیاز است. روش اعمال شرط مرزی در سطح آزاد باعث می‌شود که الگوریتم حل این جریانها با جریانهای درون مجراهای بسته اندکی متفاوت باشد، که در ادامه با معرفی شرایط مرزی تشریح خواهد شد.

۳- شرایط مرزی

اکثر شرایط مرزی در کانالهای روباز شبیه به شرایط مربوطه در مجراهای بسته هستند. تنها شرط مرزی در سطح آزاد بین این دو دسته از جریانها متفاوت است. در ادامه شرایط مرزی به صورت خلاصه معرفي مي‌شوند و تنها شرط مرزی سطح آزاد با جزئیات بررسی مي‌شود.

در صورتیکه جریان فوق‌بحرانی باشد، به هنگام اعمال شرایط مرزی باید عمق جریان در ورودی و خروجی مشخص باشد. اما اگر جریان زیربحرانی باشد باید عمق جریان در خروجی معین و از حل عددی عمق جریان در ورودی محاسبه شود، و یا اینکه عمق جریان در ورودی معین باشد و از حل عددی عمق جریان در خروجی محاسبه شود. جریانها در دو مثال به کار رفته در این مقاله زیربحرانی هستند و بنابراین عمق جریان در کانال اول فقط در ورودی و در کانال دوم فقط در خروجی معین شده‌اند. بنابراین برای مثالهای به کار رفته شرایط مرزی در ورودی و خروجی به صورت زیر معرفی می‌شوند:

خروجي جریان: در خروجي میدان جریان فرض مي‌شود که تغییر کمیتها (از جمله ارتفاع آب) در راستای جریان ناچیز بوده و خطوط جریان به صورت مستقیم و موازی یکدیگر هستند. لذا به طور معمول در این مرز از شرط گرادیان صفر در راستای جریان برای کلیهٔ کمیتهای وابسته استفاده مي‌شود. باید توجه داشت که با افزایش عدد فرود تغییرات ارتفاع آب نیز افزایش یافته و خطوط جریان به صورت کاملاً مستقیم و موازی نخواهند بود. بنابراین در این وضعیت استفاده از شرط مرزی فوق خطایي را در محاسبات ایجاد مي‌کند که ممکن است دقت جوابها را کاهش دهد.

ورودی جریان: در ورودی جریان از مقادیر مشخصي برای کمیتهای وابسته استفاده مي‌شود. ساده‌ترین روش استفاده از توزیع یکنواخت هر کمیت است. بنابراین اگر ارتفاع جریان در ورودی مشخص باشد، با فرض موازی بودن خطوط جریان در ورودی توزیع فشار در این مرز هیدرواستاتیک بوده و فشار غیرهیدروستاتیک در این مرز صفر خواهد بود. شرایط ورودی و خروجي برای جریانهای دوشاخه‌ای مخلوط شونده به اندکی تصحیح نیاز دارد که در قسمت مربوطه به آن اشاره خواهد شد.

سطوح صلب: این سطوح شامل دیوارهای جانبي و کف کانال مي‌شوند. در این سطوح از قانون دیوار [۴] استفاده مي‌شود.

سطح آزاد: شرط مرزی در سطح آزاد کمي پيچيده است. براي اعمال اين شرط مرزی ابتدا اندکي اين مرز را بررسي مي‌کنيم. از نظر هندسي در یک جریان دائم، سطح آزاد رويه‌ای است که معادله آن به صورت زير است:

$$z_{fs} = z_{fs}(x, y) \qquad (۱۳)$$

مشتق کامل رابطه (۱۳) در میدان جريان و روی سطح آزاد همان مؤلفة w سرعت در سطح آزاد است که از رابطة زير به دست مي‌آيد:

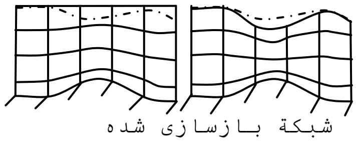
$$w_{fs} = \frac{Dz_{fs}}{Dt} = u_{fs}\frac{\partial z_{fs}}{\partial x} + v_{fs}\frac{\partial z_{fs}}{\partial y} \qquad (۱۴)$$

رابطة (۱۴) را که بيان مي‌کند دبي جرمي عبوری از سطح آزاد صفر است، شرط سينماتيکي در سطح آزاد مي‌نامند.

سطح آزاد حد فاصل بين دو محيط است، پس نيروهای وارد به دو طرف آن بايد با هم در تعادل باشند. اين نيروها شامل کشش سطحي، نيروی برشي ناشي از باد و فشارهای اتمسفر و سيال مي‌باشند. در غياب تنشهای ناشي از باد و در حالتي که کشش سطحي سيال کم باشد، برابری فشار پيزومتري سيال با فشار اتمسفر شرط ديناميکي در سطح آزاد خواهد بود. علاوه بر اين صفر بودن تنش برشي در سطح آزاد به صفر شدن گراديان مؤلفه‌های سرعت در راستای عمود بر سطح آزاد منجر مي‌شود.

۴- الگوريتم حل و رديابي سطح آزاد

برای حل عددی میدان جريان در يک محدودة فيزيکي، ابتدا بايد اين ناحيه شبکه‌بندی شود. در جريانهای با سطح آزاد قبل از حل کامل ميدان جريان، شکل دقيق سطح آزاد که يکي از مرزهای محدودة فيزيکي را مشخص مي‌کند، معلوم نيست. بنابراين در روند حل عددی بايد پيوسته محل اين سطح محاسبه شده و شبکه‌بندی جديد منطبق بر اين مرز انجام شود. در شبکه‌های سازمان يافته[۲] تعداد نقاط شبکه تغيير نمي‌کند، بلکه محل نقاط برحسب جابجائيهای سطح آزاد تغيير مي‌کنند. به اين ترتيب که نقاط شبکه‌ای در راستای عمق آب به همان نسبت اوليه در عمق جديد توزيع می‌شوند. شکل (۲) به صورت شماتيک روند بازسازی شبکه را در حل عددی نشان می‌دهد.



شکل ۲- شبکة اوليه و شبکة بازسازی شده (منحنی خطچين سطح آزاد حقيقی را نشان می‌دهد)

دو شرط ديناميکي و سينماتيکي بايد در سطح آزاد ارضا شوند. در هر مرحله حل يکي از شرايط فوق به عنوان شرط مرزی در شبکة موجود به کار مي‌رود و از شرط ديگر برای بازسازی شبکه استفاده مي‌شود. بعضی از محققان شرط ديناميکي را برای حل معادلات به کار برده و از شرط سينماتيکي برای تصحيح شبکه استفاده کرده‌اند. چون در اين مقاله از اين روش استفاده نشده است، به تشريح جزئيات آن پرداخته نمي‌شود. جزييات اين روش در مراجع [۵، ۶ و۷] موجود است.

بـه روش ديـگر شـرط سـينماتيکي را در حل معادلات مي‌تـوان به کار برد و از شرط ديناميکي برای بازسازی شبکه استفاده کرد. در اين روش دبي جرمي در سطح آزاد که يک مرز شبکه موجـود در مراحل حل عددی است، صفر در نظـر گرفتـه شـده و چـون معـادلات اندازه حرکت بـر حسب فشار غيرهيـدرواسـتاتيـک (معادلات ۱۰ الی ۱۲) هستند، پس از حل ميدان جريان در ايـن شبکه فشارهای غيرهيدروستاتيک در تمام نقاط ميدان از جملـه روی مرز متناظر به سطح آزاد محاسـبه مـی‌شـوند. چـون فـشار استاتيک در سطح آزاد برابر با فشار اتمسفر است ($P = P_{atm}$)، طبق رابطة (۹) محل جديد سطح آزاد نـسبت بـه سـطح مرجـع افقی شکل (۱) از رابطه زير به دست مي‌آيد:

$$z_{fs} = \frac{\psi_{fs}}{\rho g} \qquad (۱۵)$$

در اين مقاله از روش دوم استفاده شده است. برای اين کـار يـک برنـامـه کامپيوتری ســه بعــدی منطبـق بــر مـرز بـا شـبکة

2- structured grid

تلفیقی[۳] نوشته شده، که در آن از الگوریتم SIMPLE [۸] برای حل معادلات حاکم استفاده شده است. در این الگوریتم برای جلوگیری از نوسانات فشار در شبکهٔ تلفیقی روش رای-چو [۹] به خدمت گرفته شده است. برای گسسته کردن جملات جابجایی و پخش به ترتیب از روشهای هیبرید مرتبهٔ دوم [۱۰] و تفاضل مرکزی استفاده شده است. در جریانهای تراکم‌ناپذیر که از روش تصحیح فشار برای حل معادلات استفاده می‌کنند، امواج فشاری در میدان حل تولید می‌شوند. اگر پس از هر مرحله از حل معادلات اقدام به بازسازی شبکه کنیم، امواج فشاری ناشی از خطاهای بزرگ ابتدای روند حل عددی به صورت امواجی با دامنهٔ بزرگ در سطح آزاد ظاهر می‌شوند. این امواج می‌توانند موجب ناپایداری شوند. برای رفع این مشکل حل عددی را بدون بازسازی شبکه تا رسیدن به جواب همگرایی که تمام شرایط مرزی را در شبکهٔ موجود به غیر از شرط مرزی دینامیکی در مرز متناظر به سطح آزاد، ارضاء کند ادامه می‌دهیم. به این ترتیب امواج مذکور از میدان حل خارج شده و نمی‌توانند موجب ناپایداری شوند. پس از به دست آوردن این جواب با اعمال شرط مرزی دینامیکی (رابطه (۱۵)) در مرز متناظر به سطح آزاد محل جدید سطح آزاد مشخص و شبکهٔ جدیدی ساخته می‌شود. الگوریتم فوق و برنامهٔ کامپیوتری تهیه شده براساس آن به صورت زیر معرفی می‌شود:

۱- ساختن شبکهٔ حل اولیه

۲- حل معادلات اندازهٔ حرکت در شبکهٔ موجود با اعمال شرط مرزی سینماتیکی در مرز متناظر به سطح آزاد

۳- حل معادلهٔ تصحیح فشار غیرهیدرواستاتیک در شبکهٔ موجود

۴- تصحیح سرعتها و فشار غیرهیدرواستاتیک در شبکهٔ موجود

۵- تکرار مراحل ۲ الی ۴ تا رسیدن به جواب همگرا در شبکهٔ موجود

۶- تعیین محل جدید مرز متناظر به سطح آزاد از طریق شرط دینامیکی در این مرز

۷- ساختن شبکهٔ جدید

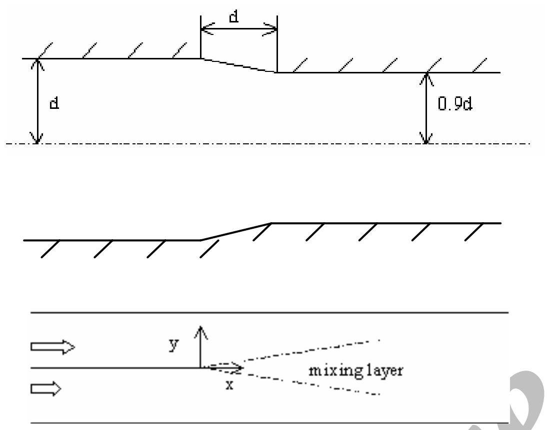
۸- تکرار مراحل ۲ الی ۷ تا زمانی که مرز متناظر به سطح آزاد تغییر نکند.

لازم به توضیح است که بازسازی شبکهٔ حل بدون توقف و به صورت اتوماتیک توسط برنامهٔ کامپیوتری انجام می‌شود.

3- collocated grid

۵- نتایج عددی

شکل (۳) کانالهای موردنظر در این تحقیق را نشان می‌دهد. بستر این دو کانال افقی است و سطح مقطع هر دو کانال مستطیلی هستند. سطح دیوارهای جانبی و کف کانالها صاف در نظر گرفته شده‌اند. در مسیر کانال اول کاهش سطح مقطعی به مقدار ۱۰ درصد وجود دارد. دو قسمت این کانال در فاصله‌ای برابر نصف پهنای کانال در بالادست، توسط منحنی $\sin^2$ به هم متصل می‌شوند. پهنای کانال در بالادست و عمق آب در ورودی این کانال به ترتیب ۲۰ و ۱۰ سانتیمتر انتخاب شده‌اند.



شکل ۳- هندسهٔ دو کانال مدل شده

از یک شبکهٔ سه‌بعدی منطبق بر مرز با تعداد گرهٔ ۱۳*۱۳*۱۰۰ استفاده شده است. این شبکه فقط نیمهٔ متقارن کانال را در بر می‌گیرد. معیار همگرایی برای مراحل میانی درون شبکه براساس حداکثر نرمال شده خطای معادلهٔ تصحیح فشار در الگوریتم حل به مقدار $4*10^{-5}$ انتخاب شده است. معیار همگرایی بازسازی شبکه نیز همین مقدار برای نسبت تغییر ارتفاع هر نقطه از سطح آزاد به ارتفاع همان نقطه انتخاب شده است.

نتایج عددی به دست آمده در قالب تغییرات سطح آزاد ارائه شده‌اند. متأسفانه نتایج تجربی در مورد این دو کانال وجود ندارد تا بتوان نتایج عددی را با آنها مقایسه کرد. اما از آنجا که تحلیل یک‌بعدی (بدون اصطکاک) [۱] برای کانال اول با تقریب خوبی تغییرات سطح آزاد جریان را در خط مرکزی کانال پیش‌بینی می‌کند، در مورد این کانال نتایج عددی با حل تحلیلی مقایسه شده‌اند. از آنجا که حل تحلیلی یک‌بعدی برای کانالهای روباز در بسیاری از کتابهای مکانیک سیالات از جمله مرجع [۱] وجود

دارد، جهت رعایت اختصار از تشریح آن در این متن اجتناب می‌شود. شکل (۴) نتایج به دست آمده و حل تحلیلي یک بعدی را برای عدد فرود ۰/۱ نشان مي‌دهد. شکل سمت چپ سطح آزاد جریان را در صفحهٔ تقارن کانال نشان مي‌دهد. این شکل نشان می‌دهد که وجود اصطکاک در جریان باعث شده که نتایج عددی اختلاف جزیي با نتایج تحلیلي داشته باشند. به خصوص در قسمت پایین‌دست تغییرات سطح آزاد در مقایسه با جواب تحلیلي که عمق جریان را ثابت پیش‌بیني مي‌کند، دارای شیب غیرصفر است. در شکل سمت راست تغییرات سطح آزاد حول محل تغییر مقطع برای سه صفحهٔ تقارن، میاني، و روی دیوارهٔ کانال ترسیم شده‌اند. این شکل نشان مي‌دهد که سطح آزاد جریان در نزدیکي نقطهٔ ابتدایي کاهش مقطع کانال و در مجاورت دیوارهٔ آن افزایش یافته و در نزدیکي نقطهٔ انتهایي این ناحیه کاهش بیشتری نسبت به پایین‌دست دارد. از نظر فیزیکي برخورد جریان مجاور دیواره با سطح ابتدایی دیواره محل تغییر مقطع باعث کاهش نسبی سرعت و افزایش نسبی فشار شده که به صورت افزایش ارتفاع آب دیده می‌شود. در قسمت انتهای محل تغییر مقطع نیز به علت جهت‌دار شدن جریان مجاور دیواره به موازات آن، پس از گذر از این منطقه یک ناحیه جدایش کوچک در مجاور دیوارهٔ ابتدایی کانال پایین‌دست به وجود آمده که کاهش نسبی فشار در این محل باعث کاهش نسبی ارتفاع آب شده است. در فاصلهٔ دورتر از این دو نقطه خطوط جریان موازی هم بوده و ارتفاع آب در عرض کانال ثابت است.

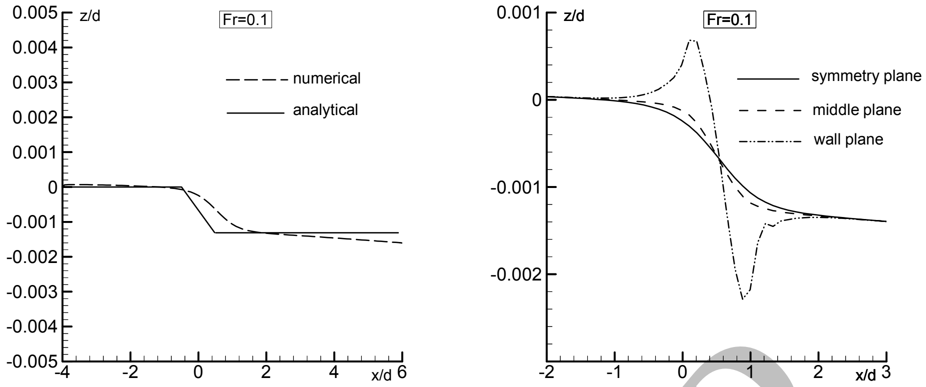
شکلهای (۵، ۶ و ۷) نیز مثل شکل (۴) هستند و روند تغییر ارتفاع در محل تغییر مقطع را مثل عدد فرود ۰/۱ نشان میدهند. اما افزایش عدد فرود در این شکلها نشان مي‌دهد که کاهش عمق جریان در گذر از کانال بیشتر مي‌شود. نتایج عددی نشان مي‌دهند که به علت حضور لایهٔ مرزی، عمق آب در فاصله‌ای دورتر به مقدار پیش‌بیني شده توسط حل تحلیلي مي‌رسد. به همین علت در شکلهای (۵، ۶ و ۷) عمق آب در پایین‌دست کمي بیشتر از جواب تحلیلي است. شکل (۸) از نمایي بهتر تغییرات ارتفاع آب را در ناحیهٔ تغییر مقطع کانال نشان مي‌دهد. این شکل برای عدد فرود ۰/۴ ترسیم شده و کانتورها به ترتیب از مقادیر کوچک به بزرگ شماره‌گذاری شده‌اند.

تحلیل یک‌بعدی نمي‌تواند پیش‌بیني مناسبي از سطح آزاد در کانال دوم داشته باشد، زیرا در ناحیهٔ به هم پیوستن دو کانال ناپیوستگي در سطح آزاد به وجود مي‌آورد. این کانال به گونه‌ای انتخاب شده که علاوه بر تغییر مقطع کانال، مکانیزم دیگری هم میدان جریان، و به خصوص سطح آزاد را تحت تأثیر قرار بدهد. علاوه بر این سعي شده که حل عددی برای اعداد فرود بزرگتری نسبت به کانال قبل انجام شود. دو جریان موازی با دو دبي مختلف از بالادست میدان به سمت یک ناحیه مشترک جریان دارند. مخلوط شدن این دو جریان در محل به هم پیوستن آنها باعث ایجاد یک لایه اختلاط در پایین‌دست این محل مي‌شود. بنابراین در کانال جدید هم تغییر مقطع کانال و هم لایهٔ اختلاط در میدان جریان مؤثر هستند. پهنای هر یک از دو کانال ۲۵ سانتیمتر، طول شاخه‌ها ۲/۵ متر، و طول کانال مشترک پاییندست ۷ متر است.

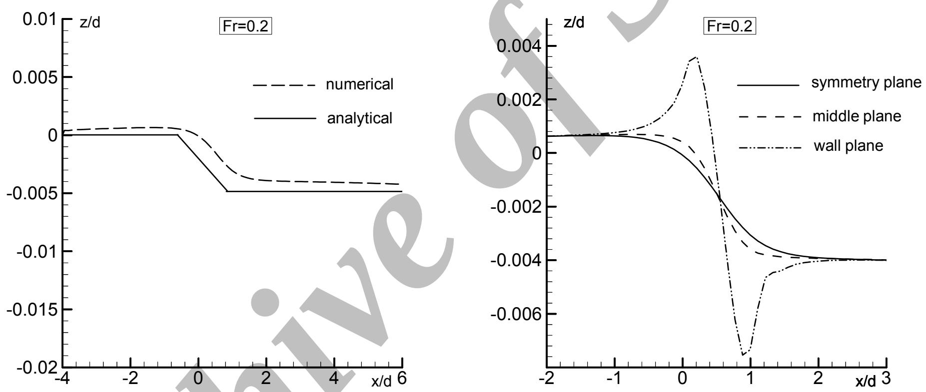
در این کانالها عمق جریان در پایین‌دست مشخص مي‌کند که جریانهای ورودی با چه عمقي باید وارد میدان جریان شوند. عمق آب در خروجي کانال پایین‌دست ۱۰ سانتیمتر انتخاب شده است. ارتفاع آب در ورودیهای دو شاخه بالادست از برونیابي مقادیر درون میدان به دست آمده‌اند. چون عمق آب در ورودیها در هر مرحله از حل عددی تغییر مي‌کرد باید اندازه سرعتها در ورودیها به گونه‌ای تصحیح می‌شدند که دبي حجمي آب ورودی به شاخه‌ها ثابت بمانند. در مطالعه حاضر نسبت دبي‌ها در دو شاخه مقدار ثابت ۰/۷۹۶ انتخاب شده است. مثل کانال قبل اثر عدد فرود روی میدان جریان بررسی شده است. برای این کار با ثابت نگه داشتن نسبت دبی‌ها و عمق آب در خروجی کانال عدد فرود را با افزایش دبی کل عبوری از کانال افزایش داده‌ایم. در جدول (۲) پارامترهای هیدرولیکي جریانهای مورد مطالعه مشخص شده‌اند. در این جدول عدد فرود ماکزیمم براساس سرعت یکنواخت متناظر به دبي بزرگتر در شاخهٔ بالادستي و عمق آب در خروجي کانال محاسبه شده است. با معیار همگرایي معرفي شده، اعداد فرود ۰/۱۵۲، ۰/۳۰۴، و ۰/۴۵۶ به همگرایي کامل رسیدند، اما جریان با فرود ۰/۶۰۸ به معیار همگرایي معرفي شده نرسید. به همین علت مورد آخر و جزئیات حل آن جداگانه بررسي شده‌اند.

جدول ۲- مشخصات هیدرولیکي جریانهای مورد مطالعه

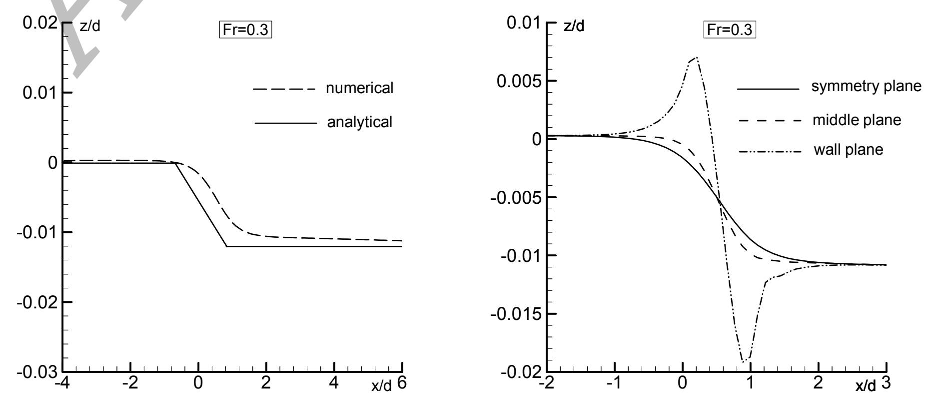
دبي حجمي کلي (لیتر بر ثانیه)	۶/۸۲۵	۱۳/۶۵	۲۰/۴۷۵	۲۷/۳
عدد فرود	۰/۱۵۲	۰/۳۰۴	۰/۴۵۶	۰/۶۰۸



شکل ۴- سطح آزاد برای عدد فرود ۰/۱، (چپ) مقایسة حلهای عددی و تحلیلي، (راست) سطح آزاد در سه مقطع طولي کانال



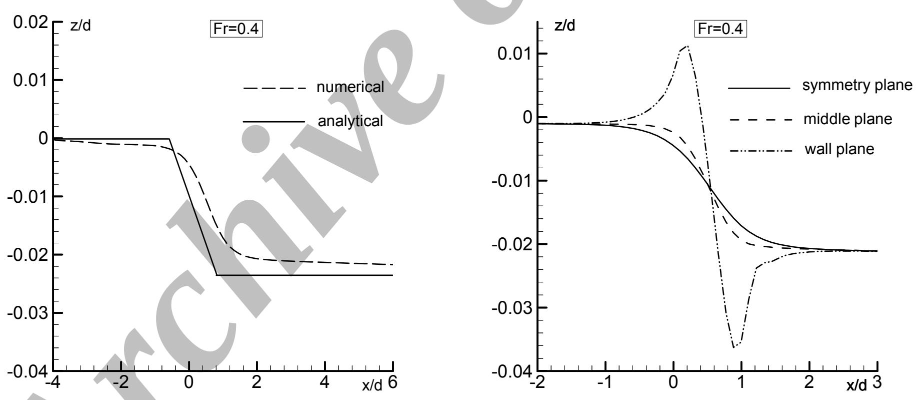
شکل ۵- سطح آزاد برای عدد فرود ۰/۲، (چپ) مقایسة حلهای عددی و تحلیلي، (راست) سطح آزاد در سه مقطع طولي کانال



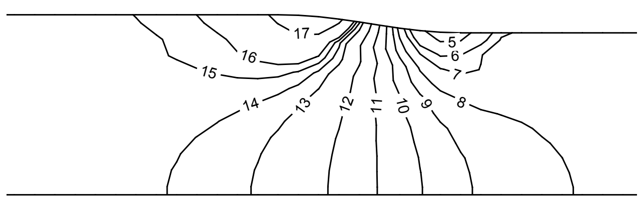
شکل ۶- سطح آزاد برای عدد فرود ۰/۳، (چپ) مقایسة حلهای عددی و تحلیلي، (راست) سطح آزاد در سه مقطع طولي کانا

در شکل (۹) تغییرات سـطح آزاد روی خطـوط شـبکه‌ای مجـاور دیوارة جدا کنندة دو کانال تا انتهای قسمت مشترک ترسیم شده است. افزایش عدد فرود باعث شده است که تغییـرات سـطح آزاد جریان بیشتر شده و اختلاف ارتفاع بین ورودی و خروجي بزرگتر شود. از طرف دیگـر در دو شـاخة بالادسـتي تغییـرات ارتفـاع در شاخة با دبي بیشتر شدیدتر از شاخة دیگر است، اما به علت فعال شدن مکانیزم اختلاط پس از نقطة بـه هـم پیوسـتن دو جریـان، تغییـرات سـطح آزاد در امتـداد دو طـرف دیـوارة میـاني تقریبـاً یکسان شده است. در ضمن از این نقطه به بعـد تغییـرات ارتفـاع نسبت بـه دو کانال بالادستي کمتر شده است. درسـت در محـل به هم پیوستن دو جریان به علـت شـتاب گـرفتن سـیال مجـاور دیوارة میاني که قبل از این نقطه سرعت کمي داشته است، یـک ناحیة شبیه به دنبالة پشت استوانه به وجود آمده که کاهش فشار در این منطقه باعث افت ارتفاع به صورت موضعي شده است. این منطقه نقطه شروع لایة اختلاط می‌باشد. در شکل (۱۰) از نمایي دیگر توزیع ارتفاع درست در مقطع بـه هـم پیوسـتن دو جریـان برای سه عدد فرود نشان داده شده است. این شکل نشان می‌دهد که با افزایش عدد فرود مقدار فرو رفتگي جریـان در مرکـز لایـة اختلاط بیشتر شده است. علت این امر شتاب گرفتن بیشتر سیال در اعداد فرود بزرگتـر و کـاهش فـشار شـدیدتر در ایـن منطقـه نسبت به اعداد فرود کمتر است. شکل (۱۱) تغییـرات ارتفـاع آب را برای عدد فرود ۰/۴۵۶ نشان میدهد. در این شکل نیز کانتورها به ترتیب از مقادیر کوچک به بزرگ شماره‌گذاری شدهاند.

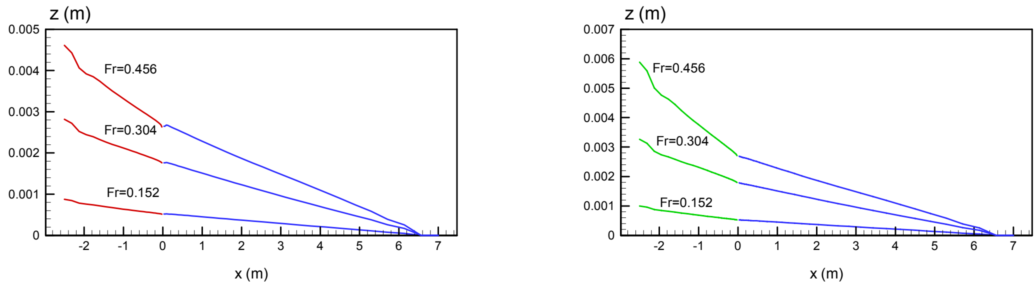
شکل (۱۲) جزئیات حل جریان را با عدد فرود ۰/۶۰۸ نشان مي‌دهد. در این شکل خطاهای فشار و ارتفاع که معیار همگرایي هستند برحسب تکرارهای حل ترسیم شده‌اند. پرشهایي که در نمودار خطای فشار دیده مي‌شوند معرف بازسازی شبکه هستند. همانطورکه از این شکل دیده مي‌شود، قسمت ابتدایي روند حل برای خطای فشار کمي طولاني است. در حقیقت در این مرحله حل عددي جریان درون مجرای بسته به عنوان حدس اولیه برای ادامة الگوریتم به دست آمده است.



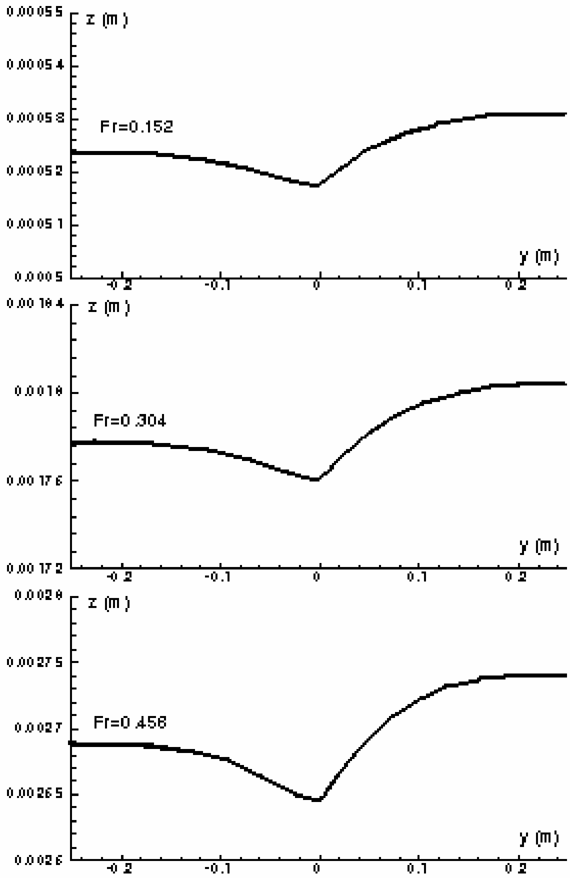
شکل ۷- سطح آزاد برای عدد فرود ۰/۴، (چپ) مقایسة حلهای عددی و تحلیلي، (راست) سطح آزاد در سه مقطع طولي کان



شکل ۸- کانتورهای ارتفاع آب برای عدد فرود ۰/۴

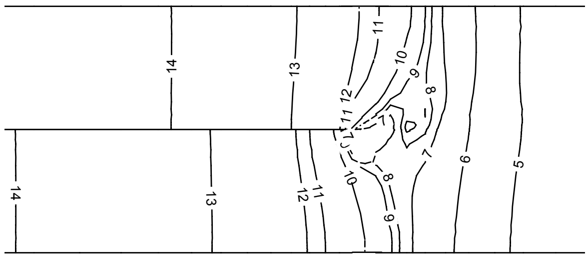


شکل ۹- ارتفاع آب در مجاورت ديوار مياني کانال دوشاخه برای اعداد فرود مختلف، (چپ)کانال با دبي کمتر، (راست)کانال با دبي بيشتر

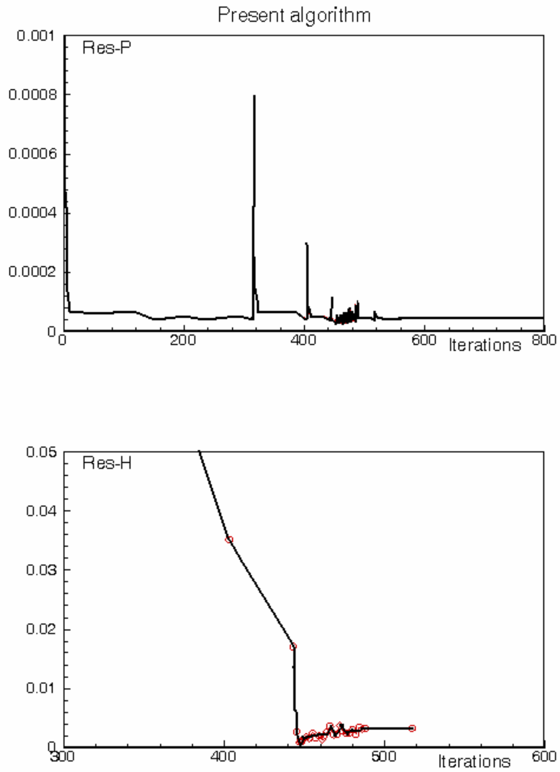


شکل ۱۰- سطح آزاد آب در محل به هم پيوستن دو کانال در اعداد فرود مختلف

در تکرارهای بعد ناحيه‌ای ديده مي‌شود که در آن تصحيح شبکه در فواصل بسيار کوتاهي صورت گرفته و به همين علت پرشهای ايجاد شده در خطای فشار در اين منطقه کوچک هستند. پس از اين ناحيه، به علت نرسيدن به حد همگرايي معرفي شده، تصحيح شبکه ادامه پيدا نکرده و جوابهای به دست آمده در حد آخرين تخمين باقي مانده‌اند. زيرا با افزايش عدد فرود در خروجي کانال، شيب سطح آزاد در اين محل بيشتر شده و شرط جريان توسعه يافته، که در آن خطوط جريان و از جمله سطح آزاد بايد موازی باشند، از دقت خوبي برخوردار نبوده است.

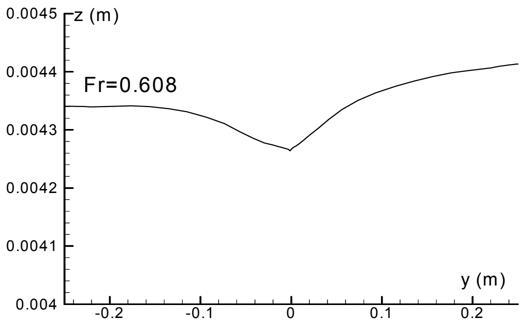


شکل ۱۱- کانتورهای ارتفاع آب برای عدد فرود ۰/۴۵۶

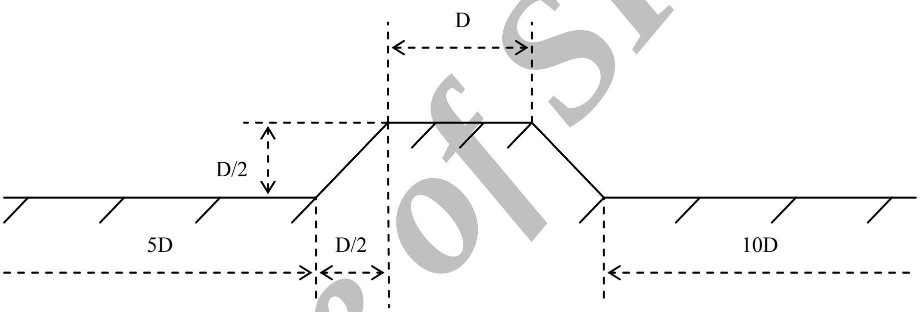


شکل ۱۲- روند حل عددی برای عدد فرود ۰/۶۰۸، (بالا) خطای فشار، (پایین) خطای ارتفاع

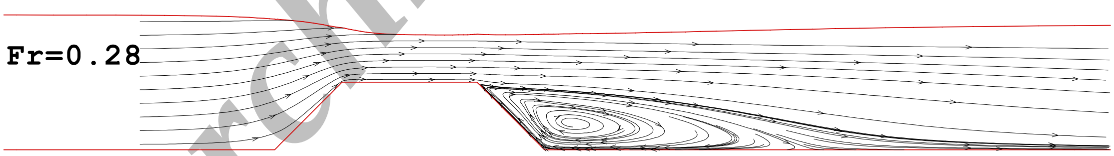
بنابراین خطایي در معادلة تصحیح فشار ایجاد شده که مانع از رسیدن جواب به حد همگرایي شده است. اگر این جواب تخمیني را که در شکل (۱۳) نشان داده شده است، با جوابهای شکل (۱۰) مقایسه کنیم و توجه داشته باشیم که در مرکز ناحیة اختلاط باید فرورفتگي در ارتفاع جریان وجود داشته باشد، نتیجه می‌گیریم که هر چند جواب به دست آمده از مرتبة دقت موارد قبل برخوردار نیست، اما تخمین مناسبي از جریان مي‌تواند باشد. در دو مثال قبل تغییر ارتفاع آب در مقایسه با عمق آن کوچک بود. برای بررسی بهتر عملکرد برنامة کامپیوتری کانال مستقیم دیگری را در نظر مي‌گیریم. در مسیر این کانال یک برآمدگی ذوزنقه‌ای طبق شکل (۱۴) وجود دارد. در این شکل ابعاد کانال نیز مشخص شده‌اند که در آن D نصف پهنای کانال است. در شکل (۱۵) نتایج حل عددی برای عدد فرود ۰/۲۸ در بالادست کانال، به صورت خطوط جریان و سطح آزاد پیش‌بینی شده واقع بر صفحة تقارن میانی کانال نشان داده شده است. همانطورکه در شکل دیده مي‌شود بر خلاف مثالهای قبل تغییرات ارتفاع آب کوچک نبوده و این تغییرات به صورت هموار و مشخص روی برآمدگی دیده مي‌شود.



شکل ۱۳- سطح آزاد آب در محل به هم پیوستن دو کانال در عدد فرود ۰/۶۰۸



شکل ۱۴- مشخصات هندسي کانال با برآمدگي در بستر آن



شکل ۱۵- خطوط جریان و سطح آزاد روی برآمدگی کانال

علاوه بـرایـن جریـان ثانـویـة ایجاد شده در پشت این برآمدگی به خوبی توسط روش عددی پیش‌بینی شده است. تحلیل یک بعدی نیز کاهش ارتفاع آب روی برآمدگی را پیش‌بینی می‌کند اما نمي‌تواند جریان ثانویة فوق‌الذکر را نشان دهد. به همین علت در این مثال مانند مثال قبل حل عددی و تحلیل یک بعدی با هم مقایسه نشده‌اند.

نتیجه گیری

تنشهای برشي ناشي از لزجت سیال و اثر دیوارهای صلب در جریانهای با سطح آزاد باعث مي‌شوند که در هندسه‌های پیچیده تحلیل یک‌بعدی کارآمد نباشد. در این مقاله با استفاده از یک مدل عددی اثرات این تنشها و همچنین اثر عدد فرود بر تغییرات ارتفاع آب در کانال بررسي شد. در مناطقی که تنشهای برشي بـزرگ بودنـد اختلاف زیادی بین نتایج جریان لزج و تحلیل یک‌بعدی دیده شد. در ضمن افزایش عدد فرود در خروجي کانال

دفت شرط مرزی جریان توسعه یافته را در روش عددی کاهش داد. مدل عددی به کار رفته در این مقاله در کشور سابقهٔ اجرایي نداشته (و یا کم سابقه بوده است) و مي‌تواند زمینه ساز توسعهٔ تحقیقات عددی در این گونه جریانها باشد.

نمادها

atm	زیرنویس برای اتمسفر
c_1, c_2, c_μ	ضرایب ثابت در مدل اغتشاشي
fs	زیرنویس برای سطح آزاد
g	شتاب ثقل
k	انرژی اغتشاشي
u,v,w	مؤلفههای سرعت
x,y,z	محورهای مختصات
G	جملهٔ تولید در مدل اغتشاشي
P	فشار استاتیک
ε	استهلاک انرژی اغتشاشي
ρ	چگالی سیال
μ, μ_t	ویسکوزیتهٔ سیال و ویسکوزیته اغتشاش
σ_k , σ_ε	ضرایب ثابت در مدل اغتشاشي
ψ	فشار غیر هیدروستاتیک

مراجع

[1] R. W. Fox, and A. T. McDonald, "Introduction to Fluid Mechanics", 3rd Edition, John Wiley & Sons, pp. 500-513, 1985.

[2] F. H. Harlow, and J. E. Welch, "Numerical Calculation of Time-dependent Viscous Incompressible Flow of Fluid with Free Surface", Physics of Fluid, 8 (12): pp.2182-2189, 1965.

[3] C. W. Hirt, and B. D. Nichols, "Volume of Fluid (VOF) Method for the Dynamics of Free Boundaries", Journal of Computational Physics, 39: pp. 201- 225, 1981.

[4] Launder, B. E., and Spalding, D. B. (1974), "The Numerical Computations of Turbulent Flows", Comp. Meth. in Appl. Mech. And Eng., 3, 269-289.

[5] J. Farmer, L. Martinelli, and A. Jameson, " Fast Multigrid Method for Solving Incompressible Hydrodynamic Problems with Free Surface ", AIAA J., 32(6): pp. 1175-1182, 1994.

[6] S. E. Norris, " A Parallel Navier-Stokes Solver for Natural Convection and Free Surface Flow", Ph.D. Thesis, University of Sydney, pp. 195-215, 2000.

[7] J. H. Ferziger, and M. Peric', " Computational Methods for Fluid Dynamics", Corrected 2nd printing, Springer, pp. 333-343, 1997.

[8] Patankar, S. (1980), "Numerical Heat Transfer and Fluid Flow", Hemisphere Publishing Corporation, McGraw Hill Book Co., New York.

[9] C. M. Rhie and W. L. Chow, "Numerical Study of the Turbulent Flow Past an Airfoil with Trailing Edge Separation", AIAA J., Vol. 21, pp. 1525-1532, 1983.

[10] Y. Li, and M. Rudman, Assessment of Higher-Order Upwind Schemes Incorporating FCT for Convection- Dominated Problems, Numerical Heat Transfer, Part B, 27: 1-12, 1995.