

## روش بهبود یافته بر اساس تراکم‌پذیری مصنوعی برای حل جریان‌های لزج همراه با انتقال حرارت

سید اسماعیل رضوی      استادیار دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تبریز  
مهدی اژدرزاده      کارشناس ارشد دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تبریز

### چکیده

هدف این کار توسعه یک روش حل برای معادلات ناویه استوکس تراکم‌ناپذیر، برای هر دوی میدان‌های سرعت و دما است. روش حل بر روی اصل تراکم‌پذیری مصنوعی استوار می‌باشد. گسسته‌سازی معادلات به روش حجم محدود صورت می‌پذیرد. شارهای غیر لزج به کمک یک روش تجزیه بردار شار مرتبه بالا، شبیه به روش Roe محاسبه می‌شوند. برای پیمایش در زمان الگوریتم رانگ-کوتا مرتبه ۵، به دلیل محدوده پایداری وسیع آن، مورد استفاده قرار می‌گیرد. فرمول‌بندی به کار رفته می‌تواند برای هر دو جریان دائمی و غیر دائمی به کار رود. مساله با سه روش متفاوت محاسبه شار حل می‌شود. روش اول روش میانگین‌گیری و دو مورد دیگر روش‌های مرتبه اول و دوم توسعه داده شده توسط مولفین هستند. ارزیابی روش پیشنهادی به وسیله حل میدان‌های سرعت و دما روی استوانه مدور و سطح ریب‌دار، و مقایسه نتایج با داده‌های موجود در ادبیات فن صورت می‌پذیرد، که تطابق خوبی بین آنها قابل مشاهده است. آهنگ همگرایی روش توسعه یافته بیانگر بهبود محسوسی است.

کلمات کلیدی: تراکم‌پذیری مصنوعی، روشی متکی بر نظریه مشخصه‌ها، روش حجم محدود، آهنگ همگرایی.

## A Modified Artificial Compressible Based Method for Solving Viscous Flows with Heat Transfer

S. E. Razavi and M. Azhdarzadeh  
Faculty of Mechanical Engineering, University of Tabriz

### Abstract

The purpose of the current work is to develop a solution method for incompressible Navier-Stokes equations, for both velocity and temperature fields, based on artificial compressibility concept. The equations are discretized in Finite-Volume formulation, convective fluxes are calculated using a high-order characteristic-based Roe-like flux splitting method. For time-marching, 5th-order Runge-Kuta algorithm, because of its wide range of stability, is used. The formulation can be used for both steady and unsteady flows. The results for three different flux treatments are presented. The first one is a kind of averaging method and the second and third ones are first and second order methods developed by the authors. The method validation is performed by solving velocity and temperature fields over circular cylinder and ribbed surface, and comparing the results by data in literature which a reasonable agreement would exist. The convergence rate of the method shows a sensible reduction in iteration steps.

**Key words:** Artificial compressibility, Characteristic based method, Finite-volume method, Convergence rate.

## ۱- مقدمه

در دهه گذشته پیشرفت‌های فراوانی در زمینه توسعه روش‌های محاسباتی برای حل میدان‌های سرعت و دما صورت پذیرفته است. دقت و کارایی این روش‌ها تحت تاثیر پارامترهای مختلفی از جمله نحوه محاسبه شارها، شرایط مرزی و شبکه‌بندی قرار دارند. بسیاری از روش‌های موجود، برای حل جریان‌های تراکم‌پذیر توسعه یافته‌اند. با این وجود بسیاری از جریان‌های موجود در صنعت خودرو، خنک‌کاری قطعات الکترونیکی و ... اساساً تراکم‌ناپذیر هستند و باید به صورت مناسبی مورد تحلیل قرار گیرند. با پیشرفت‌های اخیر در زمینه روش‌های تراکم‌پذیر، این روش‌ها برای جریان‌های تراکم‌ناپذیر تنها با میل دادن عدد ماخ به سمت صفر مورد استفاده قرار گرفته‌اند. متأسفانه، با کاهش عدد ماخ دقت و همگرایی این روش‌ها افت شدیدی را نشان می‌دهد. ولپ [۱۵]، کارایی ضعیف این روش‌ها را خصوصاً برای اعداد ماخ کمتر از ۰/۱ گزارش کرده است.

برای غلبه بر مشکلات مربوط به استفاده از روش‌های تراکم‌پذیر در عددهای ماخ پایین، پیشرفت‌های بسیار خوبی صورت گرفته است. از جمله آنها اعمال روش Pre-conditioning برای گسترش قابلیت کاربرد این روش‌ها، برای استفاده در اعداد ماخ پایین است. نمونه‌های متعددی از این روش و تئوری مربوط به آن را می‌توان در کارهای ترکل [۱۳] و ون لیر [۱۴] یافت. تکنیک Pre-conditioning به هر دوی جریان‌های دائمی و غیر دائمی با موفقیت اعمال شده است. برای جریان‌های وابسته به زمان یک روش تکرار دیگر، برای حفظ دقت زمانی، مورد نیاز است.

روش دیگر توسعه تکنیک‌های تراکم‌پذیر برای استفاده در عددهای ماخ پایین استفاده از روش تراکم‌پذیری مصنوعی (ACM) است. این روش برای اولین بار توسط کورین [۲] معرفی شد. ACM به صورت موفقیت‌آمیزی توسط محققین متعددی به کار برده شده است.

تای و همکاران [۱۲]، ACM را برای حل معادلات مربوط به میدان سرعت در فرم حجم محدود به کار برده‌اند. راجرز و کوواک [۱۱]، ACM را در فرم تفاضل محدود و به صورت ضمنی برای حل معادلات ناویه استوکس تراکم‌ناپذیر به کار برده‌اند. برخی محققین نیز ACM را همراه با روش‌های تفاضلی بالادست (Upwind differencing) به جریان‌های دائم و غیر دائم اعمال

کرده‌اند. روش‌هایی که مورد استفاده قرار گرفته‌اند شامل تجزیه بردار شار [۱۰]، MUSCL [۱]، TVD [۴] و WENO [۱۶] هستند. کاو و ینگ [۶]، یک روش، با گسسته‌سازی تفاضل محدود، را براساس ACM برای حل میدان سرعت در shear driven cavity مورد استفاده قرار داده‌اند. آن گونه که مادنس [۷] و مک کلیمانس [۸] ادعا کرده‌اند روش پیمایش در زمان که در کار اخیر استفاده شده است قابلیت مدل کردن هر دوی جریان‌های دائم و غیر دائم را دارد، اما در این کار تمرکز بر روی جریان‌های دائمی است.

هدف از کار اخیر گسترش یک روش حل برای معادلات ناویه- استوکس تراکم‌ناپذیر برای هر دوی میدان‌های سرعت و دما براساس تراکم‌پذیری مصنوعی و گسسته‌سازی حجم محدود است. در این مقاله یک الگوریتم مرتبه بالا برای محاسبه شار توسعه داده شده است. به عبارت دیگر برای محاسبه شارهای غیر لزج یک روش مرتبه بالا شبیه روش Roe توسعه داده می‌شود. برای پیمایش در زمان الگوریتم رونگ-کوتا مرتبه ۵، به دلیل محدوده وسیع‌تر پایداری آن، به کار گرفته شده است. ارزیابی روش توسعه داده شده از طریق حل میدان سرعت و دما برای جریان عبور کننده از روی استوانه مدور و سطح ریبدار، و مقایسه آن با نتایج تجربی صورت می‌گیرد. تا جایی که مؤلفین آگاهند، پژوهشی در ادبیات فن وجود ندارد که روش عدد بکار رفته در کار اخیر را برای حل میدان‌های سرعت و دما برای جریان‌های تراکم‌ناپذیر به کار برده باشد.

## ۲-۱- معادلات حاکم

معادلات ناویه- استوکس برحسب متغیرهای اولیه و فرمول‌بندی حجم محدود همراه با تراکم‌پذیری مصنوعی را می‌توان به شکل زیر بیان نمود،

$$\iint_{\Omega} \frac{\partial U}{\partial t} dA + \oint_{\partial\Omega} (Fdy - Gdx) = \frac{1}{Re} \oint_{\partial\Omega} (Rdy - Sdx) \quad (1)$$

که در آن

$$|A| = R|\Lambda|L \quad (5)$$

$\Lambda$  یک ماتریس قطری است که اعضای آن مقادیر ویژه ماتریس ژاکوبین شار هستند.

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= N \\ \lambda_2 &= N + c \\ \lambda_3 &= N - c \end{aligned} \quad (6)$$

$$U = \begin{bmatrix} p \\ u \\ v \\ \theta \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} \beta u \\ u^2 + p \\ uv \\ u\theta \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} \beta v \\ uv \\ v^2 + p \\ v\theta \end{bmatrix}, \quad (7)$$

$$R = \frac{1}{\text{Re}} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ \frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial \theta}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad S = \frac{1}{\text{Re}} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta}{\partial y} \\ \frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial \theta}{\partial y} \end{bmatrix}$$

رابطه (۱) به کمک مقادیر مبنای زیر بی بعد شده است:

که در آن

$$N = n_x u + n_y v \quad (7)$$

$$c = \sqrt{N^2 + \beta} \quad (8)$$

$R$  و  $L$  به ترتیب بردارهای ویژه راست و چپ ماتریس  $A$  هستند. این ماتریس‌ها برای متغیرهای اولیه، در حضور تراکم‌پذیری مصنوعی بصورت زیر استخراج می‌شوند،

$$R = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\beta c}{N+c} & -\frac{\beta c}{N-c} \\ -\frac{n_y}{n_x} & n_x c - n_y \phi & -(n_x c + n_y \phi) \\ 1 & n_x \phi + n_y c & n_x \phi - n_y c \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$L = \begin{bmatrix} -\frac{\phi n_x}{c^2} & -\frac{(vN + n_y \beta) n_x}{c^2} & \frac{(uN + n_x \beta) n_x}{c^2} \\ \frac{1}{2c^2} & \frac{1}{2} \frac{(N+c) n_x}{c^2} & \frac{1}{2} \frac{(N+c) n_y}{c^2} \\ \frac{1}{2c^2} & -\frac{1}{2} \frac{(-N+c) n_x}{c^2} & -\frac{1}{2} \frac{(-N+c) n_y}{c^2} \end{bmatrix} \quad (10)$$

که در آن  $\phi$  سرعت برشی می‌باشد،

$$\phi = n_x v - n_y u \quad (11)$$

روابط استخراج شده منجر به ماتریس  $A$  ای به صورت زیر می‌شود:

$$\begin{aligned} x &= \frac{\hat{x}}{h}, & y &= \frac{\hat{y}}{h}, & t &= \frac{\hat{t}}{h/U_\infty}, \\ p &= \frac{\hat{p} - p_\infty}{\rho U_\infty^2}, & u &= \frac{\hat{u}}{U_\infty}, & v &= \frac{\hat{v}}{U_\infty} \\ \theta &= \frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty}, & \text{Re} &= \frac{U_\infty h}{\nu}, & \text{Pr} &= \frac{\alpha}{\nu} \end{aligned} \quad (3)$$

## ۲-۲- محاسبه شارهای غیر لزج

در حال حاضر برای محاسبه شارها روش‌های مختلفی متداول است. یکی از رایج‌ترین این روش‌ها روش میانگین‌گیری جیمسون است. در کار اخیر یک روش characteristic-based شبیه روش Roe برای محاسبه شارهای غیرلزج در مرز سلول‌ها توسعه داده شده است. با استفاده از ACM معادلات حاکم خاصیت هذلولوی پیدا می‌کنند، این عمل استفاده از مدل‌های انتشار موج برای محاسبه شارها راه امکان‌پذیر می‌سازد. روش Roe اساساً برای محاسبه شار در معادلات اولر ارائه شد [۹]، ولی در کار حاضر یک روش مشابه روش Roe به معادلات ناویه-استوکسی که به طور مصنوعی تراکم‌پذیر شده‌اند، اعمال می‌شود. در این روش شار در مرز سلول‌ها به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\text{Flux} = \frac{1}{2}(NF_R + NF_L) - \frac{1}{2}|A|(U_R - U_L) \quad (4)$$

$NF$  شار عمود بر مرز سلول‌ها و  $U_R$  و  $U_L$  به ترتیب مقادیر متغیرها در سمت راست و چپ مرز سلول‌ها هستند. در این روش داریم،

$$U_{L,i+1/2} = U_i, \quad U_{R,i+1/2} = U_{i+1} \quad (15)$$

مرتبه دوم

$$U_{L,i+1/2} = \frac{3}{2}U_i - \frac{1}{2}U_{i-1} \quad (16)$$

$$U_{R,i+1/2} = \frac{3}{2}U_{i+1} - \frac{1}{2}U_{i+2}$$

در کار اخیر فرض بر این است که میدان سرعت دارای خواص فیزیکی ثابتی چون لزجت و چگالی است، در این صورت میدان سرعت مستقل از میدان دما خواهد بود. با این فرض شارهای مربوط به میدان سرعت به صورت مجزا و بر اساس رابطه (۴) محاسبه می‌شوند. شارهای میدان دما نیز به کمک یک روش درون‌یابی متناسب با دقت مورد نیاز محاسبه می‌شوند. به عبارت دیگر شارهای مربوط به میدان سرعت و دما به دو روش متفاوت محاسبه می‌شوند.

### ۲-۳- محاسبه شارهای لزج

گسسته‌سازی برای شارهای لزج سراسر است و یک روش میانگین‌گیری مرتبه دوم به کار می‌رود. طرف راست رابطه (۱) در فرم گسسته شده را به صورت زیر می‌توان نوشت،

$$\approx \sum_{i=1}^m (R_i \Delta y_i - S_i \Delta x_i) \text{ RHS of Eq. 1.} \quad (17)$$

برای محاسبه مقادیر  $R_i$  و  $S_i$ ، سلولهای ثانویه به کار گرفته می‌شوند، این سلولهای ثانویه روی هر یک از مرزها ساخته می‌شوند و مقادیر  $R_i$  و  $S_i$  روی این سلولها انتگرال‌گیری می‌شوند.

### ۲-۴- گسسته‌سازی زمانی

برای پیمایش در زمان الگوریتم رانگ کوتاه مرتبه ۵، به کار برده می‌شود. استفاده از این الگوریتم اجازه می‌دهد که روش پیشنهاد شده در عدهای CFL بالاتر اجرا شود. جوابها به صورتی که در رابطه (۱۸) ارائه می‌شود، در زمان پیش روی می‌کنند. روش جیمسون بنا به زوج بودن مرتبه روش، خاصیت غالب پراکندگی دارد. بنابراین معمولاً در نزدیک گرادیانهای

$$|A| = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix} \quad (12)$$

که در آن

$$\begin{aligned} a_{1,1} &= \frac{\beta}{c} \\ a_{1,2} &= \frac{\beta N}{c} n_x \\ a_{1,3} &= \frac{\beta N}{c} n_y \\ a_{2,1} &= -\frac{n_y \phi c - n_x N c - n_y \phi |N|}{c^2} \\ a_{2,2} &= \frac{n_x^2 c N^2 + n_x^2 c^3 - 2n_x n_y \phi N c + n_x n_y \phi |N| N + n_y^2 |N| c^2}{c^2} \\ a_{2,3} &= \frac{n_y (n_x c N^2 + n_x c^3 - 2n_y \phi N c + n_y \phi |N| N) - n_x |N| c^2}{c^2} \\ a_{3,1} &= \frac{n_x c \phi + n_y c N - n_x |N| \phi}{c^2} \\ a_{3,2} &= \frac{n_x (n_y c N^2 + n_y c^3 + 2n_x c \phi N - n_x \phi |N| N) - n_y c^2 |N|}{c^2} \\ a_{3,3} &= \frac{n_y^2 N^2 c + n_y^2 c^3 + 2n_x n_y c \phi N - n_x n_y \phi |N| N + n_x^2 c^2 |N|}{c^2} \end{aligned} \quad (13)$$

تمامی مولفه‌های این ماتریس براساس مقدار میانگین متغیرها در دو سمت مرز سلول محاسبه شده‌اند. به عبارت دیگر می‌توان نوشت:

$$U = \frac{U_R + U_L}{2} \quad (14)$$

مرتبه دقت این روش بستگی به نحوه انتخاب مقادیر  $U_R$  و  $U_L$  دارد. اختصاص دادن مقادیر مرکز سلولها بعنوان  $U_R$  و  $U_L$  منجر به دقت مرتبه یک می‌شود، (رابطه (۱۵))، ولی استفاده از یک روش درون‌یابی منجر به دقت مرتبه دوم می‌شود، (رابطه (۱۶))،  
مرتبه اول

$$C_{i,j} = \sqrt{\beta} + \sqrt{u_{i,j}^2 + v_{i,j}^2}$$

$$C_{\max} = \text{Max}(C_{i,j}) \quad (21)$$

$$\Delta L_{\min(i,j)} = \sqrt{(\Delta x_{i,j})^2 + (\Delta y_{i,j})^2}$$

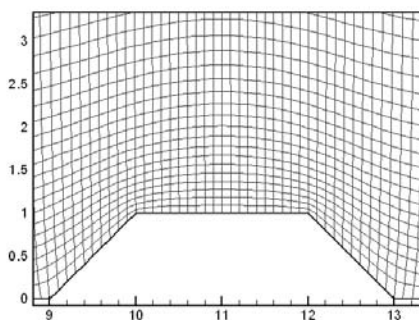
$$\Delta L_{\min} = \text{Min}(\Delta L_{i,j})$$

### ۵-۲- شرایط مرزی

شرایط مرزی سازگار باعث از بین رفتن اغتشاشات، بدون انعکاس در داخل قلمرو محاسباتی می‌شود. در مرز جامد شرط مرزی شار جرمی صفر با اختصاص دادن شار مربوطه مساوی صفر اعمال می‌شود. فشار در مرز جامد با حل معادله مومنتم در راستای عمود بر دیواره حاصل می‌شود. دما در روی دیواره ثابت فرض شده است. در مرز ورودی فشار با برون‌یابی از قلمرو داخلی محاسبه می‌شود و برای سرعت و دما نیز مقادیر جریان آزاد اختصاص داده می‌شود. میدان‌های سرعت و دما هر دو در حال توسعه فرض شده‌اند. در مرز خروجی فشار ثابت شده و بقیه متغیرها از قلمرو داخلی درون‌یابی می‌شوند.

### ۳- تولید شبکه

برای تولید شبکه روی سطح ریب‌دار روش هذلولوی و برای تولید شبکه حول استوانه مدور روش جبری به کار برده شده است. همانطور که در شکل‌های (۱) و (۲) نشان داده شده است، شبکه در نزدیکی نقاط با گردبان‌های بزرگ ریزتر می‌شود تا کارایی شبکه افزایش یابد.



شکل ۱- قسمتی از شبکه تولید شده برای ریب‌لت نیم شش گوش

بزرگ متغیرها رفتار نوسانی از خود نشان می‌دهد. اینجا مقداری استهلاک عددی مرتبه چهار به رابطه (۱۸) افزوده می‌شود تا از این رفتار نامطلوب جلوگیری شود. برای کمتر کردن حجم محاسبات و افزایش کارایی روش جیمسون جمله‌های استهلاک مصنوعی که در گام اول الگوریتم رانگ-کوتا محاسبه شده‌اند را به گام‌های بعدی تعمیم می‌دهیم. روش توسعه داده شده در کار حاضر بنا به خاصیت ذاتی خود اسکیم فاقد نوسان بوده و بنابراین نیازمند افزودن استهلاک عددی مصنوعی نیست. الگوریتم رانگ کوتای مرتبه ۵ به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{dU}{dt} + R(U) = 0$$

$$U^{(0)} = U^{(n)}$$

$$U^{(1)} = U^{(0)} - \alpha_1 \Delta t R(U^{(0)})$$

$$U^{(2)} = U^{(0)} - \alpha_2 \Delta t R(U^{(1)})$$

$$U^{(3)} = U^{(0)} - \alpha_3 \Delta t R(U^{(2)})$$

$$U^{(4)} = U^{(0)} - \alpha_4 \Delta t R(U^{(3)})$$

$$U^{(5)} = U^{(0)} - \alpha_5 \Delta t R(U^{(4)})$$

$$U^{(n+1)} = U^{(5)} \quad (18)$$

ضرایب  $\alpha_i$  برای رانگ کوتا مرتبه ۵ به قرار زیر هستند،

$$\alpha_1 = 1/4, \quad \alpha_2 = 1/6, \quad \alpha_3 = 3/8 \quad (19)$$

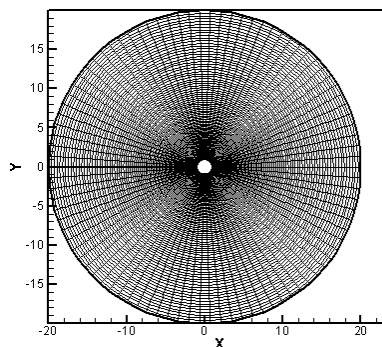
$$\alpha_4 = 1/2, \quad \alpha_5 = 1$$

رانگ کوتای مرتبه ۵ دارای محدوده پایداری ۴ برای معادله خطی موج است. شرط پایداری محدودیتی بر روی اندازه گام‌های زمانی اعمال می‌کند [۲]، به گونه‌ای که برای داشتن حل پایدار، گام‌های زمانی باید شرط زیر را ارضا کنند،

$$\Delta t_{\max} = \frac{CFL \times \Delta L_{\min}}{C_{\max}} \quad (20)$$

که برای آن داریم،

برده شده است. روش تراکم‌پذیری مصنوعی در هر سه این روش‌ها به صورت موفقیت‌آمیزی مورد استفاده قرار گرفته است. در شکل (۴) عدد نوسلت موضعی برای اعداد رینولدز مختلف آورده شده است. همانگونه که دیده می‌شود در ابتدای صفحه که جریان در حال توسعه است عدد نوسلت دارای مقدار قابل ملاحظه‌ای است، تا این که جریان به نقطه رکود پایین ریبلت می‌رسد که در این نقطه عدد نوسلت کاهش می‌یابد. در روی گوشه تیز ریبلت به علت اثر اختلاط قوی جریان، عدد نوسلت دوباره افزایش پیدا می‌کند. ماکزیمم موضعی دیگر در دومین گوشه تیز ریبلت مشاهده می‌شود. در پشت ریبلت دوباره به علت رکود جریان، عدد نوسلت کاهش پیدا می‌کند.

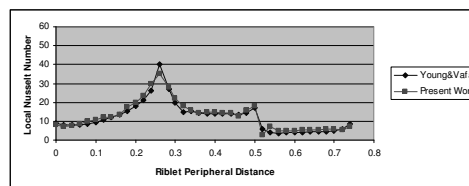


شکل ۲- شبکه تولید شده برای استوانه مدور

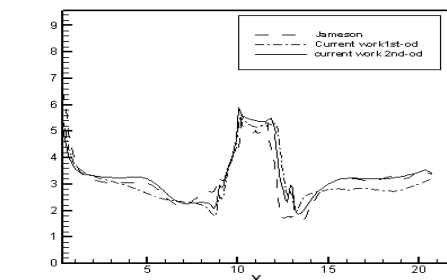
برای بررسی استقلال جواب‌ها از شبکه، روش توسعه داده شده برای نسبت‌های ریزی مختلفی از شبکه اجرا شدند. استقلال جواب‌ها از شبکه، در شبکه کلاستر شده‌ای با نسبت  $120 \times 40$  برای سطح ریبدار و شبکه‌ای با نسبت ریزی  $80 \times 80$  برای استوانه مدور حاصل شد.

#### ۴- نتایج عددی

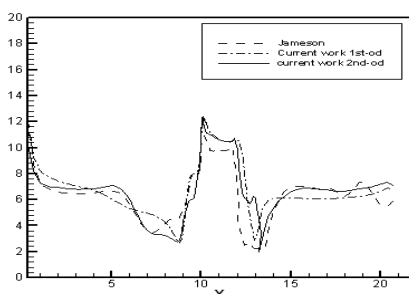
ارزیابی روش پیشنهادی با حل جریان عبور کننده از روی تک ریبلت مستطیلی روی دیواره پایینی کانال با شار گرمایی ثابت صورت می‌پذیرد. در شکل (۳) روش توسعه داده شده در کار اخیر با نتایج یونگ و وفایی [۱۷] برای تک ریبلت مستطیلی با شار ثابت مقایسه شده است. این شکل بیانگر عدد نوسلت موضعی پیرامون ریبلت مستطیلی است.



شکل ۳- مقایسه نتایج کار اخیر با نتایج یونگ و وفایی [۱۷]

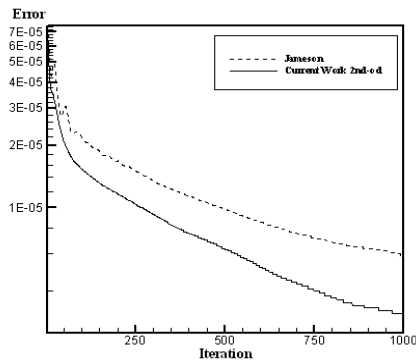


شکل ۴-الف- عدد نوسلت موضعی برای سه روش مختلف در  $CFL=0.6, Pr=0.71, Re=30$



شکل ۴-ب- عدد نوسلت موضعی برای سه روش مختلف در  $CFL=0.6, Pr=0.71, Re=100$

همانگونه که مشاهده می‌شود همخوانی مطلوبی بین نتایج برقرار است. برای بررسی بیشتر روش، دو روش مرتبه اول و دوم توسعه داده شده بر اساس نظریه مشخصه‌ها به همراه روش جیمسون برای حل جریان روی سطح ریبدار، شکل (۱)، به کار



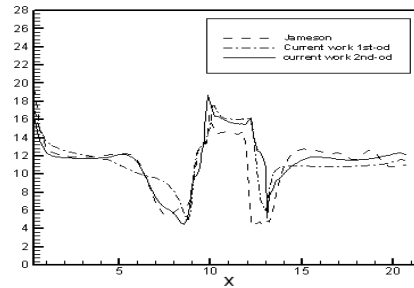
شکل ۶. مقایسه آهنگ همگرایی روش میانگین گیری جیمسون و روش توسعه داده شده در کار حاضر،  $CFL=0.6, Re=200$

#### ۵- نتیجه گیری

یک روش مرتبه بالا Characteristic-based شبیه روش Roe برای حل همزمان میدان‌های سرعت و دما توسعه داده شد. روش توسعه داده شده در حل میدان‌های سرعت و دما در هندسه‌ها و اعداد رینولدز مختلف کاملاً موفق بود. این امر تا حدودی به دلیل استفاده از یک روش بالادست مرتبه دوم در محاسبه شارها و همچنین استفاده از الگوریتم رانگ-کوتای مرتبه ۵ است. در این نحوه محاسبه شارها رفتار فیزیکی جریان به گونه هوشمندانه‌ای به جنبه ریاضی مساله ربط داده می‌شود. این گونه نحوه محاسبه شار انتشار امواج صوتی را در داخل قلمرو محاسباتی مد نظر قرار می‌دهد. این امر به کمک باز آرایایی روابط مربوط به شارها و مقادیر ویژه مربوط به آنها صورت می‌پذیرد. با اعمال روش ACM معادلات حاکمه ماهیت هذلولوی به خود گرفتند که این امر اجازه استفاده از مدل‌های انتشار موج و نظریه مشخصه‌ها را به ما داد. روش توسعه داده شده، همان گونه که توضیح داده شد دارای آهنگ همگرایی بهتر بوده و همچنین فاقد نوسانات عددی است که هر دو از مهمترین مشخصه‌های یک روش عددی به شمار می‌آیند.

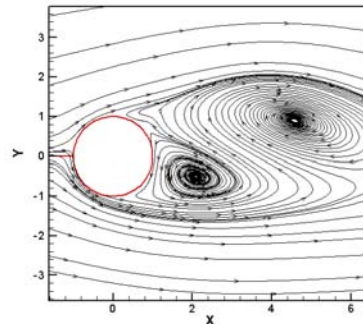
#### نمادها

A	ماتریس ژاکوبین شار
CFL	عدد کورانت
F,G	بردارهای شار
NF	شار عمودی



شکل ۴-پ- عدد نوسلت موضعی برای سه روش مختلف در  $CFL=0.6, Pr=0.71, Re=200$

برای نشان دادن توانایی روش در مدل کردن میدان‌های سرعت، خطوط جریان حول استوانه، در  $Re = 200$ ، برای روش مرتبه دوم در شکل (۵) آمده است. قابل ذکر اینکه در این حالت معادلات به جای ارتفاع ریبلت  $h$  با شعاع استوانه  $R$  بی بعد شده اند. حالت ناپایای جریان و ورتیسیتی‌های ایجاد شده در پشت استوانه کاملاً آشکار است.



شکل ۵- خطوط جریان حول استوانه مدور،  $CFL=0.6, Pr=0.71, Re=200$

یکی از خصوصیات مهم یک روش عددی آهنگ همگرایی آن روش است. آهنگ همگرایی روش توسعه داده شده و روش میانگین گیری جیمسون در شکل (۶) آورده شده است. روش توسعه داده شده در کار اخیر آشکارا دارای پروسه همگرایی بهتری است.

- Incompressible Flows, J. Comp. Phys. Vol. 128, pp. 32, 1996.
- [2] Chorin, A. J., A Numerical Method for Solving Incompressible Viscous Flow Problems, J. Comp. Phys., Vol. 2, pp. 12-26, Aug. 1967.
- [3] Drikakis, D., Rider, W., High-resolution Methods for Incompressible and Low Speed Flows, Springer, 2004.
- [4] Hartwich, P., Hsu, C., High Resolution Upwind Schemes for the Three Dimensional Incompressible Navier-Stokes Equations, AIAA 87-0547, 1987.
- [5] Jameson, A., Analysis and Design of Numerical Schemes for Gas Dynamics 1 Artificial Diffusion, Upwind Biasing, Limiters and Their Effect on Accuracy and Multigrid Convergence, Int. J. Comp. Flu. Dynamics, V4, pp. 171-218, 2005.
- [6] Kao, P. H., Yang, R. J., A Segregated-Implicit Scheme for Solving the Incompressible Navier Stokes Equations, J. Computers and Fluids, 2007. [7] Madsen, P. A., Schaffer, H. A., A Discussion of Artificial Compressibility, J. Costal Engineering, Vol. 53, pp. 93-98, 2006.
- [8] McClimans, T. A., Pietrzak, J. D., Huess, V., Nilsen, N., Johannessen, B. O., Laboratory and Numerical Simulation of the Skagerrak Circulation, Cont. Shelf Res. 20, 941-974, 2000.
- [9] Powell, K. G., VanLeer, B., Roe, P., Towards a Genuinely Multi-Dimensional Upwind Scheme, Von Karman Institute for fluid Dynamics, Lecture Series 1990-03, March 1990.
- [10] Rogers, S. E., Kwak, D., Upwind Differencing Scheme for the Time-accurate Incompressible Equations, AIAA J., Vol. 28, 1990, pp. 253-262, 1990.
- [11] Rogers, S. E., Kwak, D., Krisis, C., Steady and Unsteady Solutions of the Incompressible Navier-Stokes Equations, AIAA journal, Vol. 29, pp. 603- 610, 1991.
- [12] Tai, C. H., Zhao, Y., Liew, K. M., Parallel Computation of Unsteady Three-dimensional Incompressible Viscous Flow Using an Unstructured Multigrid Method, J. Computers and Structures, vol. 82, pp. 2425-2436, 2004.
- [13] Turkel, E., Preconditioned Methods for Solving The Incompressible and Low Speed Compressible Equations, J. Comp. Phys., Vol. 72, pp. 277-298, 1987.
- |  |                               |                    |
|--|-------------------------------|--------------------|
|  | ارتفاع ریلت                   | h                  |
|  | بردار ویژه سمت چپ             | L                  |
|  | سرعت عمود بر شبکه             | N                  |
|  | عدد نوسلت                     | Nu                 |
|  | مولفه‌های بردار نرمال بر شبکه | $n_x, n_y$         |
|  | فشار                          | $\hat{p}$          |
|  | فشار بی‌بعد                   | p                  |
|  | عدد پراتل                     | Pr                 |
|  | بردارهای شار ویسکوز           | R, S               |
|  | بردار ویژه راست               | R                  |
|  | عدد رینولدز                   | Re                 |
|  | زمان                          | t                  |
|  | زمان بی‌بعد                   | $\hat{t}$          |
|  | دما                           | T                  |
|  | مولفه‌های بردار سرعت          | u, v               |
|  | مولفه‌های بی‌بعد بردار سرعت   | $\hat{u}, \hat{v}$ |
|  | مختصات فیزیکی                 | x, y               |
|  | مختصات بی‌بعد فیزیکی          | $\hat{x}, \hat{y}$ |
|  | ضریب پخشندگی حرارتی           | $\alpha$           |
|  | ضریب ترکم‌پذیری مصنوعی        | $\beta$            |
|  | دمای بی‌بعد                   | $\theta$           |
|  | چگالی                         | $\rho$             |
|  | مقادیر ویژه                   | $\lambda$          |
|  | ماتریس مقادیر ویژه            | $\Lambda$          |
|  | سرعت برشی                     | $\varphi$          |
|  | ویسکوزیته سینماتیک            | $\nu$              |
|  | مساحت بی‌بعد سلول             | $\Omega$           |
- زیر نویس ها**
- |  |                   |          |
|--|-------------------|----------|
|  | مقادیر جریان آزاد | $\infty$ |
|  | دیواره            | w        |
|  | راست              | R        |
|  | چپ                | L        |
- مراجع**
- [1] Briley, W., Neerarambam, S., Implicit Lower-upper/Approximate-factorization Schemes for



- Stokes Equations, J. Comp. Phys., Vol. 146, pp. 464, 1998.
- [17] Vafai, K., Young, T. J., Convective Cooling of Heated Obstacle in a Channel, J. Heat and Mass Transfer, Vol. 41, pp. 3131-3148, 1998.
- [14] VanLeer, B., Lee, W., Roe, P., Characteristic Time-Stepping or Local Preconditioning of Euler Equations, AIAA 91-1552-CP, 1991.
- [15] Volpe, G., On the Use and Accuracy of Compressible Flow Codes at Low Mach Numbers, AIAA 91-1662, 1991.
- [16] Yang, J. Y., Yang, S. C., Chen, Y. N., Hsu, C. A., Implicit Weighted ENO Schemes for Three-dimensional Incompressible Navier