نشریه علوم دانشگاه تربیت معلم   جلد ۲، شماره ۱ بهار ۱۳۸۱

اندازه مکان، اندازه مقیاس و مرتب سازی توزیعهای یک متغیره

عین اله پاشا: دانشگاه تربیت معلم تهران

عادل فاطمی : دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم تحقیقات

چکیده

در این مقاله مفهوم اندازه مکان و مقیاس و تعاریف مربوط به مرتبسازی جزئی برای مقایسه توزیعها ارائه و بررسی میشود، و نیز با استفاده از تحدب مرتبه k ، روابط مرتبسازی تصادفی و پراکندگی ارائه میشوند. و ثابت میشود که اندازههای شناختهای مانند میانگین و انحراف معیار به ترتیب اندازههای مکان و مقیاساند. همچنین تابعی از آنتروپی توزیعها را ارائه میکنیم که اندازه مقیاس است و البته این خود ارتباطی جالب میان آنتروپی و واریانس توزیعهای یک متغیره است.

مقدمه

درروابط مرتب سازی، عموماً مجموعهای از توابع مانند U را در نظر میگیریم به قسمی که به ازای uهای متعلق به U، $Eu(X)$ ویژگی مورد نظر توزیع را اندازه میگیرد. مرتب سازی بر اساس U اینگونه تعریف میشود:

$$X \leq_u Y \quad \text{iff} \quad Eu(X) \leq Eu(Y) \quad \forall\, u \in U \qquad (۳\text{-}۱)$$

U میتواند مجموعهای از توابع مطلوب باشد.

تعاریف و نمادها

ما توزیع تجمعی F را اکیداً صعودی میگوییم هرگاه روی مجموعه $S_F = \{x : ۰ < F(x) < ۱\}$ اکیداً صعودی باشد. در این بررسی ما تنها متغیرهای تصادفی مطلقا پیوسته و تابع توزیعهای اکیداً صعودی را بررسی میکنیم و منظور از یک مدل، مجموعهای از تابع توزیعهاست.

تعریف ۲-۱: به ازای عدد طبیعی n و مقادیر حقیقی $y_۱$، $y_۲$،...، y_n (با همین ترتیب) $S(y_۱, y_۲, \dots, y_n)$ را برابر تغییر علامت y_iها تعریف میکنیم، مثلا اگر $n = ۴$ آنگاه $S(-۲, ۱, ۱, -۳) = ۲$ اما $S(-۲, ۱, ۱, ۳) = ۱$ همچنین $S(-۲, ۱, -۳, ۱) = ۳$.

حال فرض کنیم f تابعی حقیقی باشد که روی زیر مجموعهای از R مانند I تعریف شده، آنگاه

$$S(f) = \sup S\,[f(x_۱), f(x_۲), \dots, f(x_n)]$$

sup روی مجموعه $\{(x_1, x_2,\dots x_n)|n\in N,\ x_1< x_2<\dots< x_n\ ,\ \ x_i \in I\ ,\ i =1,2\ ,\dots\ ,\ n\}$ عمل می‌کند.
درحقیقت تابع $S(f)$ تعداد دفعاتی را می‌شمارد که $f(x)$ محور xها را قطع می‌کند.

مثال۲-۱: اگر $f(x) = x^2 -1$ ، $-2 \le x \le 2$ آنگاه $S(f) = 2$ و حال آنکه برای $f(x) = \sin x$، $-\frac{3\pi}{2} \le x \le \frac{3\pi}{2}$ داریم $S(f) = 3$.

واضح است که اگر $f\ge 0$ و یا $f\le 0$ آنگاه $S(f)=0$. گوییم که توابع f و g همدیگر را k مرتبه قطع می‌کنند، اگر $S(f-g) = k,\ k = 0\ ,1\ ,2\ ,\dots$.

تعریف۲-۲: تابع f را محدب مرتبه ۰ گوییم هرگاه به ازای هر $x\in I$ داشته باشیم:

$$f(x)\le(\ge)0,$$

و محدب مرتبه ۱ گوییم هرگاه به ازای هر $x_1, x_2\in I$ و $x_1< x_2$ داشته باشیم:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ f(x_1) & f(x_2) \end{vmatrix} \ge(\le)\ 0$$

به عبارت دیگر تابع f محدب مرتبه ۱ است هرگاه صعودی و یا نزولی باشد. در حالت کلی تابع f محدب را مرتبه k گوییم هرگاه به ازای هر $x_1,x_2,\dots,x_{k+1} \in I$ ، $x_1< x_2 <\dots< x_{k+1}$ داشته باشیم:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_{k+1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_1^{k-1} & x_2^{k-1} & \dots & x_{k+1}^{k-1} \\ f(x_1) & f(x_2) & \dots & f(x_{k+1}) \end{vmatrix} \ge (\le)\ 0 \qquad (۱-۲)$$

اگر kامین مشتق f موجود باشد آنگاه f محدب مرتبه k است اگر و فقط اگر $f^{(k)}(x) \ge\ (\le)\ 0$.

نمادگذاری: فرض F_1 و F_2 دو تابع توزیع باشند، در این صورت:

$$R(x) = R(x; F_1, F_2) = F_2^{-1}(F_1(x))\ , \qquad x \in S_{F1}$$

$$\Delta (x) = R(x) - x = F_2^{-1}(F_1(x)) - x\ , \qquad x \in S_{F1}$$

$$\Delta^*(x) = R^{-1} (x) - x = F_1^{-1}(F_2(x)) - x\ , \qquad x \in S_{F2}$$

$$r(x) = r(x; F_1,F_2) = f_1(x) / f_2(F_2^{-1}(F_1(x)))\ , \qquad x \in S_{F1}$$

که $f_1(x) =\frac{dF_1(x)}{dx}$ و $f_2(x) =\frac{dF_2(x)}{dx}$ به ترتیب چگالی توزیعهای F_1 و F_2 هستند. تابع R ، تابع جالبی است که مطالعات زیادی بر اساس آن صورت گرفته است. اگر X دارای توزیع F_1 باشد، آنگاه $R(x)$ دارای توزیع F_2 خواهد بود. اگر F_2 توزیعی نمایی با $\lambda = 1$ باشد، آنگاه R تابع خطر است، $R_{(x)} = -\log(1 - F_1(x)) = -\log \overline{F}_1(x)$

و همچنین r تابع میزان از کارافتادگی F_1 است، یعنی $r(x) = R'(x) = \frac{f_1(x)}{F_1(x)}$ شیوه دیگری از نمایش r(x) به صورت زیر است :

$$r(x) = \frac{f_1(x)}{1 - F_1(x)} \times \frac{1-F_2(R(x))}{f_2(R(x))} = \frac{\frac{f_1(x)}{F_1(x)}}{\frac{f_2(R(x))}{F_2(R(x))}}$$

این نشان می‌دهد که درحالت کلی r خارج قسمت توابع میزان از کارافتادگی F_1 و F_2 است. همچنین این نیزقابل توجه است که $r(F_1^{-1}(U)) = \frac{f_1(F_1^{-1}(U))}{f_2(F_2^{-1}(U))}$ که U دارای توزیع یکنواخت پیوسته روی بازه $[0,1]$ است.

دراین حالت آنتروپی توزیع F_1 را نیز می‌توان چنین نوشت:

$$H(F_1) = -\int_{-\infty}^{+\infty} \log f_1(x) dF_1(x) = -\int_0^1 \log f_1(F_1^{-1}(u)du \qquad (۲-۲)$$

$$u = F_1(x)$$

تابع $\Delta(x)$ تابع انتقال نیز نامیده می‌شود زیرا وقتی X به اندازه $\Delta(x)$ انتقال داده می‌شود دارای توزیعی مشابه توزیع $Y = \Delta(X) + X$ خواهد بود، که همان F_2 است.

حال تعریف زیررا که تعریف مهمی است ارائه می‌دهیم.

تعریف۲-۳ : فرض کنیم X متغیری تصادفی با تابع توزیع F_1 و Y متغیری تصادفی با تابع توزیع F_2 باشد، گوییم $F_1 \leq_k F_2$ یا به طور معادل $X \leq_k Y$ اگر تابع Δ محدب از مرتبه k باشد، $k=0,1,2,\ldots$.

اندازه مکان

تعریف۳-۱ : توابع توزیع F_1 و F_2 را از نظرمکان مقایسه پذیرگوییم هرگاه Δ یا Δ^* محدب مرتبه ۰ (یعنی نامنفی) باشند و می‌نویسیم $F_1 c^o F_2$، مدل $\mathbb{F}$ را مکانی می‌نامیم هرگاه داشته باشیم:

$$\forall F_1, F_2 \in \mathbb{F} \Rightarrow F_1 c^o F_2$$

و گوییم F_2 سمت راست F_1 است اگر Δ محدب مرتبه ۰ باشد، یعنی $F_1 \leq F_2$.

رابطه c^o متقارن و بازگشتی است اما انتقالی نیست. واضح است که $F_1 c^o F_2$ اگر و تنها اگر F_1 و F_2 هرگز همدیگررا قطع نکنند، مدل $\mathbb{F} = \{F(\circ + a) : a \in R\}$ یک مدل مکانی است، اما همه مدلهای مکانی اینگونه نیستند.

تابع انتقالیΔ محدب مرتبه ۰،$(\Delta(x) \geq 0)$ است اگر و تنها اگربه ازای هر x، $F_1(x) \geq F_2(x)$. بنابراین مرتب‌سازی $\leq_0$ همان مرتب‌سازی تصادفی است. رابطه $\leq_0$ یک مرتب‌سازی جزئی درمدل $\mathbb{F}$ است، یعنی بازگشتی، انتقالی و نامتقارن است. اگر $\mathbb{F}$ یک مدل مکانی باشد چون که هر دو عضو $\mathbb{F}$ در $\leq_0$ مقایسه پذیرند $(\mathbb{F}, \leq_0)$ یک مجموعه مرتب است.

برای یافتن مرتب سازهای دیگری که برای بررسی مکان مناسب به نظرمی‌رسند باید مرتب‌سازی‌هایی از

نوع (۱-۱) را مطالعه کنیم. برای این منظور مجموعه توابع زیر را در نظر بگیرید:

$$C_۱ = \{u : \text{تابعی صعودی و پیوسته } u\}$$

$$C_۲ = \{\max(\circ, t) : t \in R\}$$

$$C_۳ = \{\min(\circ, t) : t \in R\}$$

قضیه ۳-۱:

$$F_۱ \leq_\circ F_۲ \Leftrightarrow F_۱ \leq_{c_۱} F_۲ \quad \begin{cases} \nearrow F_۱ \leq_{c_۲} F_۲ \\ \searrow F_۱ \leq_{c_۳} F_۲ \end{cases}$$

برهان: فرض کنیم که $F_۱ \leq_\circ F_۲$ و $u \in C_۱$ در این صورت

$$F_1 \leq_0 F_2 \Rightarrow \Delta(x) = F_2^{-1}(F_1(x)) - x \geq 0 \Rightarrow F_2^{-1}(F_1(x)) \geq x$$

$$\Rightarrow F_2^{-1}(t) \geq F_1^{-1}(t),$$

$$\Rightarrow u(F_2^{-1}(t)) \geq u(F_1^{-1}(t)),$$

$$\Rightarrow \int_0^1 u(F_2^{-1}(t))dt \geq \int_0^1 u(F_1^{-1}(t)dt$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} u(z)dF_2(z) \geq \int_{-\infty}^{\infty} u(z)dF_1(z)$$

$$\Rightarrow Eu(Y) \geq Eu(X) \Rightarrow F_1 \leq c_1 F_۲$$

مرتب سازی‌های $\leq c_۲$ و $\leq c_۳$ نیز حالتهای خاصی از مرتب‌سازی $\leq c_۱$اند. برای جهت دیگر به «ستویان ۱۹۷۲» مراجعه شود.

در بخش بعد خواهیم دید که مرتب‌سازی‌های $\leq c_۲$ و $\leq c_۳$ تنها مکان را اندازه نمی‌گیرد، بلکه مقیاس را نیز می‌سنجد.

تعریف۳-۲ : تابع $\psi: \mathcal{F} \to R$ یک اندازه مکان در $\mathcal{F}$ است هرگاه :

الف) برای هر $a,b \in R$ و $F \in \mathcal{F}$ داشته باشیم:

$$\psi(a \times F + b) = a\psi(F) + b$$

(اگر X دارای توزیع F باشد، آنگاه توزیع $aX + b$ را با $a \times F + b$ نشان می‌دهیم.)

ب) اگر $F_۱, F_۲ \in \mathcal{F}$ و $F_۱ \leq F_۲$ آنگاه $\psi(F_۱) \leq \psi(F_۲)$.

مثال۳-۱ : $\mathcal{F}$ را یک مدل از توزیعهای با گشتاور اول متناهی درنظرمی‌گیریم. یعنی اگر $X, F \in \mathcal{F}$ دارای توزیع F باشد آنگاه $E(X) < \infty$. در این صورت $\mu(F) = E(X)$ برای این خانواده یک اندازه مکان است زیرا اولا برای هر a , b حقیقی و هر F متعلق به $\mathcal{F}$ داریم:

$$\mu(a \times F + b) = E(aX + b) = aE(X) + b = a\mu(F) + b$$

ثانیا اگر $F_۲ \in F$ ، $F_۱$ و $F_۱ \leq_{\circ} F_۲$ آنگاه به ازای هر x متعلق به S_{F_1} داریم:

$$F_۱ \leq_{\circ} F_۲ \Rightarrow \Delta(x) = F_۲^{-۱}(F_۱(x)) - x \geq 0 \Rightarrow F_۲^{-۱}(F_۱(x)) \geq x$$
$$\Rightarrow F_۲^{-۱}(t) \geq F_۱^{-۱}(t),$$
$$\Rightarrow \int_{\circ}^{۱} F_۲^{-۱}(t)dt \geq \int_{\circ}^{۱} F_۱^{-۱}(t)dt$$
$$\Rightarrow E(Y) \geq E(X) \Rightarrow \mu(F_۲) \geq \mu(F_۱)$$

اندازه مقیاس

هدف از این بخش پاسخ به این سوال است که کی و چگونه می‌توان دو توزیع را از نظر مقیاس مقایسه کرد. این سوال می‌تواند جوابهای بیشماری داشته باشد که یکی از این جوابها را در اینجا شرح می‌دهیم.

تعریف۴-۱: تابع توزیعهای $F_۲$ و $F_۱$ را درمقیاس مقایسه پذیرگوییم هرگاه Δ یا Δ^* محدب از مرتبه ۱ باشند و می‌نویسیم $F_۱ \, c_۱ \, F_۲$. مدل F یک مدل مکانی- مقیاسی است هر گاه به ازای $F_۲ \in F$ و $F_۱$ بتوان نتیجه گرفت که $F_۱ \, c_۱ \, F_۲$. گوییم مقیاس $F_۱$ ازمقیاس $F_۲$ بزرگترنیست (یا $F_۱$ از $F_۲$ گسترده‌تر نیست). هرگاه Δ محدب مرتبه ۱ (صعودی) باشد، در این صورت می‌نویسیم: $F_۱ \leq_۱ F_۲$.

به وضوح رابطه $c^۱$ یک رابطه بازگشتی و متقارن است اما انتقالی نیست. مدل $F = \{F(a \circ + b): a,b \in R\}$ یک مدل مکانی مقیاسی است، اما همه خانواده‌های مکانی مقیاسی لزوما از این نوع نیستند. مرتب سازی $\leq_۱$ همان مرتب‌سازی پراکندگی($\leq_{disp}$) معرفی شده توسط «بیکل و لهمن[۱] (۱۹۷۶)» می‌باشد. آنها چنین بیان کردند که در توزیعهای $F_۲$ و $F_۱$ که $F_۱$ بیش از $F_۲$ گسترده شده است، برای هر u,vی که $\circ < u < v < ۱$ داریم:

$$F_۲^{-۱}(v) - F_۲^{-۱}(u) \geq F_۱^{-۱}(v) - F_۱^{-۱}(u) \qquad (۱\text{-}۴)$$

(این رابطه به راحتی از محدب مرتبه ۱ بودن $\Delta(x)$ نتیجه می‌شود) یعنی فاصله بین هر دو چندک از توزیع $F_۲$ از فاصله بین چندک‌های متناظر آنها از توزیع $F_۱$ بیشتر باشد. همانطور که گفتیم نامساوی (۴-۱) صادق است اگر و تنها اگر $\Delta(x)$ صعودی باشد. بنابراین مرتب سازی $\leq_۱$ و $\leq_{disp}$ یکی هستند.

حال بعضی از خواص $\leq_۱$ را بررسی می کنیم.

تعریف۴-۲ : گوییم $F_۱ \approx F_۲$ هر گاه $F_۱ \leq_۱$ و $F_۲ \leq_۱$.

قضیه۴-۱ : رابطه $\leq_۱$ انتقالی است و داریم:

$$F_1 \approx_1 F_۲ \Rightarrow \exists a : F(\circ) = F_۲(\cdot + a)$$

برهان : تابع توزیعهای $F_۳$ ، $F_۲$ و $F_۱$ را در نظر بگیرید به طوری که $F_۱ \leq_۱ F_۲$ و $F_۳ \leq_۱ F_۲$. در این

---

[۱] -Bickel & Lehmann (1976)

صورت توابع

$$\Delta_1(x) = R_1(x) - x = F_2^{-1}(F_1(x)) - x \qquad \Delta_2(x) = R_2(x) - x = F_3^{-1}(F_2(x)) - x ,$$

توابعی صعودی هستند. یعنی به ازای هر $x_1, x_2 \in S_{F_1}$ و $y_1, y_2 \in S_{F_1}$ به طوری که $x_1 < x_2$ و $y_1 < y_2$ داریم:

$$\Delta_1(x_1) \le \Delta_1(x_2) \Rightarrow R_1(x_1) - x_1 \le R_1(x_2) - x_2 \Rightarrow R_1(x_2) - R_1(x_1) \ge x_2 - x_1$$

$$\Delta_2(y_1) \le \Delta_2(y_2) \Rightarrow R_2(y_1) - y_1 \le R_2(y_2) - y_2 \Rightarrow R_2(y_2) - R_2(y_1) \ge y_2 - y_1$$

حال $R_3(x)$ را چنین تشکیل می‌دهیم:

$$R_3(x) = R_2(R_1(x)) = F_3^{-1}(F_2(F_2^{-1}(F_1(x))) = F_3^{-1}(F_1(x))$$

در این صورت به ازای هر $x_1, x_2 \in S_{F_1}$ که $x_1 < x_2$ ، با توجه به دو نامساوی قبلی که به دست آمد داریم:

$$R_3(x_2) - R_3(x_1) = R_2(R_1(x_2)) - R_2(R_1(x_1)) \ge R_1(x_2) - R_1(x_1) \ge x_2 - x_1$$

بنابراین $\Delta_3(x) = R_3(x) - x$ تابعی صعودی است یعنی $F_1 \le F_3$. بعلاوه $\Delta(x) = (F_2^{-1}(F_1(x))$ صعودی است اگر و تنها اگر

$$\Delta^*(x) = F_1^{-1}(F_2(x)) - x = -\Delta(F_1^{-1}(F_2(x))$$

نزولی باشد. بنابراین:

$$F_1 \approx_1 F_2 \Leftrightarrow F_1 \le_1 F_2 \;\&\; F_2 \le_1 F_1$$

$$\Leftrightarrow \Delta(x) \text{ صعودی } \;\&\; \Delta(x) \text{ نزولی } \Leftrightarrow \exists a \in R : \Delta(x) \equiv a$$

$$\Leftrightarrow F_2^{-1}(F_1(x)) - x = a \Leftrightarrow F_2^{-1}(F_1(x)) = a + x$$

$$\Leftrightarrow F_1(x) = F_2(a + x).$$

به آسانی می‌توان دید که $F_1 \, c^1 F_2$ اگر و تنها اگر به ازای هر $a \in R$، $S(\Delta(\circ) - a) \le 1$ یعنی تابع Δ هیچ خطی موازی محور xها را در بیش از یک نقطه قطع نمی‌کند. و این بر قرار است از و تنها اگر $F_1(\circ)$ و $F_2(\cdot + a)$ همدیگر را حداکثر در یک نقطه قطع کنند.

حال ما دو نوع دیگر از مرتب‌سازی مقیاس $\le_1^*$ ، $\le_1^{**}$ را تعریف می‌کنیم که از $\le_1$ ضعیف‌تر بوده و برای استفاده ساده‌ترند.

زمانی که $F_1 \, c^1 F_2$ هر سه نوع مرتب سازی $\le_1$، $\le_1^*$ ، $\le_1^{**}$ منطبق هستند، یعنی هم زمان رخ می‌دهند همچنین مرتب سازی $\le^*$ نسبت به مرتب‌سازی واریانس توزیعها قوی‌تر است، یعنی:

$$X \le_1^* Y \Rightarrow \sigma^2_X \le \sigma^2_Y$$

تعریف۴-۳ : برای توزیعهای F_1 و F_2 می‌گوییم که $F_1 \le_1^{**} F_2$ هرگاه اعدادی حقیقی مانند a,b باشند که

$$\Delta(x) \ge b \; ; \quad x > a,$$

$$\Delta(x) \le b\;; \quad x< a,$$

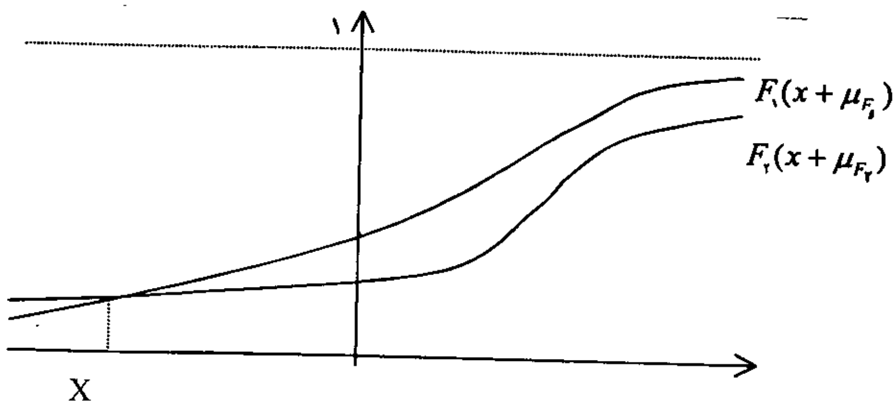
اگر F_1 و F_2 دارای گشتاورهای اول متناهی μ_{F_2} و μ_{F_1} باشند. خواهیم گفت $F_2 \le_1^* F_1$ هرگاه عددی حقیقی مانند a باشد که

$$\Delta(x) \ge \mu_{F_1}-\mu_{F_2}\;; \quad x > a,$$

$$\Delta(x) \le \mu_{F_1}-\mu_{F_2}\;; \quad x < a$$

(حالت $\le_1^*$ حالتی است از $\le_1^{**}$ که a با $\mu_{F_1}-\mu_{F_2}$ جایگزین شده است.) مرتب سازی $\le_1^{**}$ می‌تواند اینگونه نیزبه کار رود:

$F_1 \le_1^{**} F_2$ یا $F_2 \le_1^{**} F_1$ هرگاه $b\in R$ ی وجود داشته باشد، به طوری که $S(F_1(\circ) - F_2(\circ + b)) = 1$.
یعنی برای بعضی از bها تابع توزیعهای $F_1(\circ)$ و $F_2(\circ + b)$ همدیگر را دقیقاً دریک نقطه قطع می‌کنند. به‌علاوه $F_1 \le_1^* F_2 \,,\, F_1 \le_1^{**} F_2$ هرگاه $F_1(\circ + \mu_{F_1})$ و $F_2(\circ + \mu_{F_2})$ همدیگر را دقیقاً در یک نقطه قطع کنند. به وضوح درشکل (۴-۱) می‌توان دید که $F_1 \le_1^* F_2$ برقرار است، اما $F_1 \le F_2$ برقرار نیست، زیرا اگر $F_2(\circ + \mu_{F_2})$ را اندکی رو به چپ انتقال دهیم $F_1(\circ + \mu_{F_1})$ را در دو نقطه قطع خواهد کرد وحال آنکه در مرتب سازی $\le_1$ گفتیم که F_2 و F_1 را اگر به هر اندازه انتقال دهیم همدیگر را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کنند.



شکل ۴-۱: حالتی که $F_1 \le_1^* F_2$ اما $F_1 \le F_2$ برقرار نیست

قضیه ۴-۲ : روابط زیر برقرارند:

الف) $F_1 \le F_2 \;(\Leftrightarrow F_1 \le_{disp} F_2) \Rightarrow F_1 \le_1^* F_2 \Rightarrow F_1 \le_1^{**} F_2$

ب) اگر F_2 و F_1 از نظر مقیاس قویا مقایسه پذیر باشند، آنگاه

$$F_1 \le F_2 \;(\Leftrightarrow F_1 \le_{disp} F_2) \Leftrightarrow F_1 \le_1^* F_2 \Leftrightarrow F_1 \le_1^{**} F_2$$

برهان : (الف) چون $F_1 \le_1 F_2$ بنابراین $\Delta(x)$ تابعی صعودی است، پس به ازای هر x_0 دلخواه داریم :

$$X > (<)x_0 \Rightarrow \Delta(x) \ge (\le)\, \Delta(x_0)$$

بالاخص برای $x_0 = \Delta^* \mu_{F_1}-\mu_{F_2}$ و

$$x > (<)\Delta^* (\mu_{F1}-\mu_{F2}) \Rightarrow \Delta(x) \ge (\le) \Delta(\Delta^* (\mu_{F1}-\mu_{F2})) = \mu_{F1}-\mu_{F2}$$

پس کافی است a را برابر $\Delta^*(\mu_{F1}-\mu_{F2})$ بگیریم تا داشته باشیم $F_1 \le^*_1 F_2$. در رابطه بالا درمورد $\le^*_1$ اگر $a = \Delta^*(\mu_{F1}-\mu_{F2})$ و $b = \mu_{F1}-\mu_{F2}$ ثابت می شود که $F_1 \le_1^{**} F_2$

(ب) یک طرف این رابطه درقسمت قبل ثابت شد حال برای اثبات طرف دیگر فرض می‌کنیم $F_1 \le_1^{**} F_2$ و فرض کنیم که F_1 و F_2 ازنظر مقیاس قویاً مقایسه پذیرند. یعنی $F_1 \le_{c1} F_2$ از اینجا نتیجه می‌شود که Δ تابعی یکنواست و ازتعریف $F_1 \le_1^{**} F_2$ واضح است که Δ نمی‌تواند نزولی باشد بنابراین صعودی است، پس این رابطه درست است.

نتیجه ۴-۱: اگر $\mathcal{F}$ یک مدل از توزیعهای مکانی- مقیاس باشد، آنگاه $\le_1^{**}$ رابطه‌ای انتقالی است و هر دو توزیع از $\mathcal{F}$ نسبت به رابطه $\le_1^{**}$ مقایسه پذیرند.

حال دو نوع مرتب سازی دیگر از نوع (۱-۱) را که اهمیت زیادی دارند، معرفی می کنیم. مجموعه توابع زیر را در نظر بگیرید:

$$S_1 = \{ u : u \text{ صعودی و محدب} \},$$

$$S_2 = \{ u : u \text{ محدب} \}$$

به کمک قضیه ۳-۱ و به طور مشابه می‌توان نشان داد که

$$F_1 \le_{c1} F_2 \Leftrightarrow F_1 \le_o F_2 \Rightarrow F_1 \le_{s1} F_2 \qquad (۳-۴)$$

حال فرض کنیم $\mathcal{F}$ مجموعه انتخاب شده و $\le$ رابطه مرتب‌سازی مقیاس برای $\mathcal{F}$ باشد، اندازه مقیاس را چنین تعریف می‌کنیم.

تعریف۴-۴: تابع $\psi : \mathcal{F} \to R$ یک اندازه مقیاس است هرگاه

الف) برای هر $F \in \mathcal{F}$ و $a,b \in R$ داشته باشیم:

$$\psi(a\times F + b) = |a|\psi(F_1)$$

ب) اگر $F_1 , F_2 \in \mathcal{F}$ و $F_1 \le F_2$ آنگاه:

$$\psi(F_1) \le \psi(F_2)$$

قضیه زیربه این سوال پاسخ می‌دهد که چگونه می‌توان یک اندازه مقیاس برای زمانی که از $\le^*_1$ استفاده می‌کنیم یافت.

قضیه۴-۳: فرض کنیم F_1, F_2 توزیعهای X و Y با امید متناهی μ_{F_1} و μ_{F_2} باشد آنگاه

$$F_1 \le^*_1 F_2 \Rightarrow F_1(\circ+\mu_{F_1}) \le_{s1} F_2(\circ+\mu_{F_2})$$

$$\Rightarrow F_1(\circ+\mu_{F_1}) \le_{s2} F_2(\circ+\mu_{F_2})$$

برهان: فرض کنیم X دارای توزیع F_1 و Y دارای توزیع F_2 باشد به طوری که $F_1 \le^*_1 F_2$. پس x_0 ی هست که برای $x > (<)\, x_0$ داریم:

$$F_1(x+\mu_{F_1}) \le (\ge) F_2(x+\mu_{F_2})$$

با توجه به شکل ۳-۱ اگر $t \ge x_0$ آنگاه

$$E\max(X-\mu_{F_1},t) \le E\max(Y-\mu_{F_1},t)$$

و وقتی $t < x_0$ داریم:

$$E\max(X-\mu_{F_1},t) = t - E\max(X-\mu_{F_1},t) \le t - E\max(Y-\mu_{F_1},t) = E\max(Y-\mu_{F_1},t)$$

$$\Rightarrow F_1(\circ+\mu_{F_1}) \le_{c_1} F_2(\circ+\mu_{F_2})$$

حال از رابطه(۴-۳) نتیجه می‌شود $F_1(\circ+\mu_{F_1}) \le_{s_1} F_2(\circ+\mu_{F_2})$ نهایتا رابطه $F_1(\circ+\mu_{F_1}) \le_{s_1} F_2(\circ+\mu_{F_2})$ از «استویان[1]» (۱۹۷۲) نتیجه می شود.

نتیجه ۴-۲: انحراف معیار $\sigma_F = [\int (x-\mu_F)^2\, dF(x)]^{\frac{1}{2}}$ اندازه مقیاس برای $\le^*_1$ می‌باشد. به راحتی می‌توان دید که شرط اول صادق است. شرط دوم نیز از قضیه قبل نتیجه می‌شود. اگر $\mathbb{F}$ را مدل مورد نظر با رابطه $\le^*_1$ در نظر بگیریم آنگاه به ازای هر $F_1, F_2 \in \mathbb{F}$ داریم $F_1 \le^*_1 F_2$ یا $F_2 \le^*_1 F_1$. فرض کنیم $F_1 \le^*_1 F_2$ آنگاه:

$$F_1 \le^*_1 F_2 \Rightarrow F_1(\circ+\mu_{F1}) \le_{s1} F_2(\circ+\mu_{F2})$$

$$\Rightarrow \sigma^2_{F1} = E(X-\mu_{F2})^2 \le E(Y-\mu_{F2})^2 = \sigma^2_{F2} \qquad (4\text{-}4)$$

$$\Rightarrow \sigma_{F1} \le \sigma_{F2}$$

از رابطه (۴-۴) و قضیه ٤-۲ نتیجه می‌شود که انحراف معیار یک اندازه مقیاس برای مرتب‌سازی پراکندگی (یعنی $\le_1$) نیز می‌باشد.

بالاخره مطلب قابل اشاره دیگر این است که تابع $\sigma_1(F) = e^{H(F)}$ نیز یک اندازه مقیاس برای مدل $\mathcal{F}$ با مرتب‌سازی پراکندگی $\le_1$ می‌باشد. زیرا:

اولاً، اگر X دارای توزیع F باشد، آنگاه

$$\forall a,b \in R,\ F \in \mathbb{F} \quad \sigma_1(a \times F + b) = e^{H(aX+b)} = e^{[\log|a| + H(X)]} = e^{\log|a|}e^{H(X)} = |a|\sigma_1(F)$$

و ثانیا با فرض $F_1, F_2 \in \mathbb{F}$ و $F_1 \le_1 F_2$ داریم:

$$F_1 \le F_2 \Leftrightarrow \Delta(x)\ \text{صعودی} \Leftrightarrow r(x) \ge 1 \Leftrightarrow \frac{f_1(F_1^{-1}(u))}{f_2(F_1^{-1}(u))} \ge 1$$

$$f_1(F_1^{-1}(u)) \ge f_2(F_2^{-1}(u)) \Leftrightarrow \log F_1(F_1^{-1}(u)) \ge \log f_2(F_2^{-1}(u))$$

$$\Leftrightarrow -\int_0^1 \log f_1(F_1^{-1}(u))du \le -\int_0^1 \log f_2(F_2^{-1}(u))du$$

1-Stoyan

$$\Leftrightarrow -\int_{\infty}^{+\infty} \log f_1(x)dF_1(x) \leq -\int_{\infty}^{+\infty} \log f_2(x)dF_2(x)$$
$$\Leftrightarrow \quad H(F_1) \leq H(F_2) \Leftrightarrow \sigma_1(F_1) \leq \sigma_1(F_2)$$

تشکر و قدردانی

در پایان به جاست از آقای دکتر احسان‌اله صوفی استاد دانشگاه ویسکانسین میلواکی آمریکا به خاطر ارسال تعدادی از مقالات که بسیار مفید و با ارزش بودند سپاسگذاری کنیم.

مراجع

1. P.j. Bickel and E.L. Lehmann, Descriptive Statistics for Nonparametric Models. III. Dispersion, Ann. Statist, Spread, Manuscript, 4 (1976) 1139-1159; IV.
2. E. Ebrahimi, E. Maasoumi, E.S. Soofi, Ordering univareate distributions by entropy and variance. Journal of Econometrics 90 (1999) 317-336.
3. H.on Oja, Location, Scale, Skewness and Kurtosis of Univariate Distributions, Scand. J. Sataist, 8 (1981)154-168.
4. M. Shaked, J.G. Shantikumar, Stochastic Orders and Their Applications, Academic Press, New York(1994).
5. D. Stoyan, Uber Einige Eigenschafton Monoton Stochastischer Prozesse Math, Nachr, 52 (1972) 21-034.