روش جدید برای بررسی و تشخیص خودالحاق بودن مسائل مقدار مرزی شامل معادلات دیفرانسیل عادی

محمد جهانشاهی*، مجتبی سجادمنش:
دانشگاه تربیت معلم آذربایجان، گروه ریاضی

چکیده

مسائل مقدار مرزی از مباحث مهم در زمینه‌های مهندسی و فیزیک ریاضی هستند. در این بین مسائل خودالحاق به‌دلیل دارا بودن برخی ویژگی‌های مطلوب برای حلشان، از جمله این‌که مقادیر ویژهٔ مسئلهٔ الحاقی همیشه حقیقی هستند و توابع ویژه یک دستگاه متعامد تام می‌سازند، اهمیت ویژه‌ای دارند. در مباحث کلاسیک معمولاً از روش نایمارک [۳] برای تشخیص خودالحاق بودن مسئلهٔ اصلی استفاده می‌شود . اما در این روش چون روابط اضافه شده به شرایط مرزی مسئله شامل مقادیر مرزی تابع مجهول با ضرایب اختیاری هستند، اختیاری بودن ضرایب فوق سبب می‌شود که مسئلهٔ الحاقی به‌دست آمده یگانه نباشد. در این مقاله، روشی جدید برای بررسی و ایجاد یک مسئلهٔ خودالحاق شامل معادلهٔ دیفرانسیل معمولی معرفی می‌گردد. براساس این روش، ابتدا شرایط ضروری وجود جواب مسئله با به‌کارگیری جواب اساسی معادله الحاقی به‌دست می‌آید، سپس یک دستگاه جبری متشکل از شرایط ضروری به‌دست آمده و شرایط مرزی مسئلهٔ اصلی تشکیل می‌شود. در نهایت با به‌کارگیری اتحاد لاگرانژ و مقادیر مرزی تابع مجهول، شرایط کافی برای خودالحاق بودن مسئلهٔ اصلی ارائه می‌گردد. مزیت این روش نسبت به روش کلاسیک نایمارک در این است که به‌جای روابط اضافه شده به شرایط مرزی مسئله، شرط‌های ضروری به‌دست آمده روی جواب معادله الحاقی جای‌گزین می‌شود که این روابط به‌صورت ترکیب خطی از مقادیر مرزی تابع مجهول با ضرایب معین (نه اختیاری) است سبب می‌شود مسئله الحاقی به‌دست آمده یگانه باشد.

مقدمه

مدل ریاضی از پدیده‌های فیزیکی و مسائل مهندسی به شکل مسائل مقدار مرزی است، لذا این مسائل توسط ریاضیدانان بسیاری بررسی شده است [۱]، [۲]. در تحقیقات اخیر مسائل خودالحاق به‌وسیلهٔ نایمارک [۳]، بررسی شده است که روشی را برای بررسی و تشخیص این مسائل معرفی کرده است. در این روش، به تعداد شرایط مرزی مسئله، شرایط اضافی با ثابت‌های اختیاری به شرایط مرزی اضافه می‌شود که یک دستگاه جبری تشکیل بدهد. این موضوع باعث می‌شود که مسئلهٔ الحاقی برای مسئلهٔ اصلی داده شده، به‌دلیل وجود ثابت‌های اختیاری موجود در شرایط اضافه شده، منحصربه‌فرد نباشد. در این مقاله، ما روشی را ارائه می‌کنیم که ثابت‌های

واژه‌های کلیدی: مسئله خودالحاق، جواب اساسی (تعمیم یافته)، شرایط ضروری، اتحاد لاگرانژ
دریافت ۹۰/۳/۲۱ پذیرش۹۰/۱۱/۱۲
نویسنده مسئول jahanshahi@azaruniv.edu

اختیاری در روابط اضافه شده به‌صورت کاملاً معین در شرایط ضروری به‌دست اید و در نتیجه، مسئله الحاقی متناظر منحصربه‌فرد باشد. با به‌کارگیری این شرایط به همراه شرایط مرزی مسئله در یک دستگاه جبری، مقادیر مرزی تابع مجهول مشابه [۶] محاسبه می‌شوند. در مرحلهٔ نهایی، با به‌کارگیری اتحاد لاگرانژ، شرایط کافی برای خودالحاق بودن مسئله ارائه می‌گردد.

در خصوص روش به‌کار رفته در این مقاله ذکر چند نکته ضروری است:

الف. ایدهٔ اصلی استفاده از شرایط ضروری و آشکار کردن این شرایط متعلق به ریاضیدان روسی بیچادزه و ریاضیدان آذربایجانی نیهان علی‌اف است. بیچادزه [۵] از شرایط فوق به‌صورت غیرآشکار استفاده کرده، ولی علی‌اف با م. جهانشاهی و م. حسینی طی سال‌های ۱۹۹۵ تا ۲۰۱۰ در مقالات مختلف [۷]-[۱۱] از شرایط ضروری برای معادلات دیفرانسیل جزئی (PDE) به‌منظور خوش طرح بودن مسائل مقدار مرزی و امکان تبدیل آن‌ها به دستگاه معادلات انتگرالی فردهلم استفاده کرده است. در این مقاله ما از ایده‌های ایشان بهره می‌بریم و از شرایط ضروری فوق به‌منظور تعیین خودالحاق بودن مسئله مقدار مرزی داده شده و ارائه شرایط کافی برای خودالحاق بودن یک مسئلهٔ مقدار مرزی استفاده می‌کنیم.

ب. این روش می‌تواند به‌طور مشابه برای بررسی خودالحاق بودن و یا نبودن مسائل مقدار مرزی شامل معادلات دیفرانسیل جزئی با ضرایب ثابت و به‌خصوص برای عملگر بیضوی با ضرایب ثابت

$$P(D)_u = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} u_{x_i x_k} + \sum_{i=1}^{n} a_i u_{x_i} + au = f(x)$$

به‌کار رود که در آن P(D) عملگر خطی دیفرانسیل پاره‌ای (جزئی) با ضرایب ثابت حقیقی بوده و u جواب کلاسیک است. می‌دانیم که معادلات دیفرانسیل جزئی با ضرایب ثابت همواره دارای جواب اساسی به‌مفهوم توزیع است [۴] یعنی

$$P(D)U=\delta(x-\xi)$$

که در آن U جواب تعمیم یافته به مفهوم توزیع است و δ تابع دلتای دیراک است. بنا بر این برای طیف وسیعی از معادلات PDE با ضرایب ثابت می‌توان این روش را به‌منظور بررسی خودالحاق بودن یا نبودن آن‌ها به‌کار برد.

پ. این روش می‌تواند برای تمام مسائل مقدار مرزی- اولیه خطی که هم شرایط مرزی و هم شرایط اولیه در آن‌ها وجود دارد به‌کار برد. به‌عنوان مثال برای مسائل شامل PDE از قبیل معادله موج در حالت یک بعدی و دو بعدی و معادلهٔ حرارت در حالت یک بعدی و دوبعدی که مسئلهٔ اسپکترال آن‌ها (مسئلهٔ مقدار ویژه مربوط) بعد از به‌کارگیری روش فوریه (جداسازی متغیرها) و روش تبدیلات انتگرالی و روش فوریه- بیرکهف مانند این موارد به‌کار رود:

برای مسائل مقدار مرزی-اولیه مانند معادلهٔ هذلولوی موج

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = h(x,t)$$
$$u(x,0) = f(x),\ \ u_t(x,0) = g(x)$$
$$u(a,t) = p(t),\ \ u(b,t) = q(t)$$

و یا برای معادلهٔ سهموی حرارت

$$u_t = k u_{xx}$$
$$u(x,0) = f(x)$$
$$u(a,t) = p(t),\ \ u(b,t) = q(t)$$

و برای حالت‌های دوبعدی و n بعدی این معادله می‌توان به‌کار برد که بعد از به‌کارگیری روش فوریه و روش تبدیلات انتگرالی، مسئلهٔ اسپکترال (کمکی) آن‌ها یک مسئله مقدار ویژه خواهد بود که می‌توان برای خودالحاق بودن یا نبودن آن‌ها بحث کرد.

بیان ریاضی مسئله

مسئلهٔ مقدار مرزی با شرایط مرزی غیرموضعی را درنظر می گیریم:

$$\ell\, y \equiv y''(x) + a_1 y'(x) + a_2 y(x) = \varphi(x)\,; \quad x \in (0,1) \qquad (۱)$$

$$\ell_i y \equiv \alpha_{i1} y'(0) + \alpha_{i2} y(0) + \beta_{i1} y'(1) + \beta_{i2} y(1) = 0, \qquad i = 1,2. \qquad (۲)$$

که در آن φ تابع حقیقی مقدار پیوسته و معلومی است و $\alpha_{ij}, \beta_{ij}\ (i,j = 1,2)$ ثابت‌های حقیقی هستند.

مسئلهٔ الحاقی مربوط به مسئلهٔ اصلی

الحاقی معادلG (۱) را به این شکل درنظر می‌گیریم:

$$\ell^* z \equiv z''(x) - a_1 z'(x) + a_2 z(x), \qquad (۳)$$

به‌طوری‌که

$$(\ell y, z) = B(y,z) + (y, \ell^* z),$$

که در آن

$$B(y,z) = [y'(x) z(x) - y(x) z'(x) + a_1 z(x) y(x)]|_0^1 . \qquad (۴)$$

۱. روش نایمارک

مطابق با روش نایمارک برای به‌دست آوردن مسئله الحاقی دو شرط مرزی زیر به شرایط مرزی اضافه می‌شود:

$$\ell_i y \equiv \alpha_{i1} y'(0) + \alpha_{i2} y(0) + \beta_{i1} y'(1) + \beta_{i2} y(1), \qquad i = 3, 4 \qquad (۵)$$

که در آن $\alpha_{ij},\ \beta_{ij}\ (i=3,4,\ j=1,2)$ ثابت‌های اختیاری هستند.

دو شرط مرزی (۲) به‌همراه شرایط اضافی (۵) تشکیل یک دستگاه جبری داده که ثابت‌های $\alpha_{ij},\ \beta_{ij}(i=3,4,\ j=\ 1,2)$ طوری انتخاب می‌شوند که دترمینان ماتریس ضرایب آن بدین‌صورت مخالف صفر باشد:

$$\Delta=\begin{vmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \beta_{11} & \beta_{12}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \beta_{21} & \beta_{22}\\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \beta_{31} & \beta_{32}\\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \beta_{41} & \beta_{42}\end{vmatrix}\neq 0 \qquad (۶)$$

هرگاه $A_{ij}\ (i,j=1,\dots,4)$ را به‌عنوان کهاد (هم‌سازه) درایه ijام در Δ درنظر بگیریم در این صورت برای مجهولات دستگاه جبری فوق این روابط را به‌دست می‌آوریم:

$$y'(0)=\frac{1}{\Delta}\sum_{i=1}^{4}\ell_i\, y\, A_{i1}\quad ,\qquad y(0)=\frac{1}{\Delta}\sum_{i=1}^{4}\ell_i\, y\, A_{i2}$$

$$y'(1)=\frac{1}{\Delta}\sum_{i=1}^{4}\ell_i\, y\, A_{i3}\quad ,\qquad y(1)=\frac{1}{\Delta}\sum_{i=1}^{4}\ell_i\, y\, A_{i4}$$

و برای B(y,z) داریم

$$B(y,z)=\frac{z(1)}{\Delta}\sum_{i=1}^{4}\ell_i\, yA_{i3}-\frac{z'(1)}{\Delta}\sum_{i=1}^{4}\ell_i\, yA_{i4}+\frac{a_1 z(1)}{\Delta}\sum_{i=1}^{4}\ell_i\, yA_{i4}-$$

$$\frac{z(0)}{\Delta}\sum_{i=1}^{4}\ell_i\, yA_{i1}+\frac{z'(0)}{\Delta}\sum_{i=1}^{4}\ell_i\, yA_{i2}-\frac{a_1 z(0)}{\Delta}\sum_{i=1}^{4}\ell_i\, yA_{12}\,.$$

بنا بر این شرایط مرزی مسئلهٔ الحاقی بدین‌صورت هستند:

$$A_{i3}z(1)-A_{i4}z'(1)+a_1A_{i4}z(1)-A_{i1}z(0)+A_{i2}z'(0)-a_1A_{i2}z(0)=0,\quad i=3,4.$$

با توجه به این‌که ضرایب $\alpha_{ij},\ \beta_{ij}\ (i=3,4,\ j=1,2)$ ثابت‌های اختیاری هستند، مسئلهٔ الحاقی حاصل منحصربفرد نیست.

۲. روش استفاده از شرایط ضروری

در این بخش ، مسئله الحاقی متناظر با مسئلهٔ اصلی را تشکیل می‌دهیم که منحصربفرد است، زیرا شرایط اضافی به‌طور منحصربفرد با به‌کارگیری شرایط ضروری مشخص می‌شوند.

برای این منظور، ابتدا جواب اساسی معادله را به این شکل درنظر می‌گیریم:

$$Z(x-\xi)=\frac{e(x-\xi)}{r_1-r_2}\left[e^{r_1(x-\xi)}-e^{r_2(x-\xi)}\right], \qquad (۸)$$

که در آن e تابع هویساید متقارن و r_1, r_2 ریشه‌های مجزای معادلهٔ شاخص (۳) هستند. به‌عبارت دیگر

$$Z''(x-\xi)-a_1Z'(x-\xi)+a_2Z(x-\xi)=\delta(x-\xi), \qquad (۹)$$

که در آن δ تابع دلتای دیراک است [۴].

اکنون شرایط ضروری را برای معادلهٔ دیفرانسیل (۱) به‌دست می‌آوریم. بدین‌منظور، جواب اساسی (۸) به طرفین معادلهٔ (۱) ضرب شده و سپس روی $[0,1]$ انتگرال‌گیری می‌کنیم. (چنان‌که در [۶] و [۷] مشاهده می‌شود.)

$$\int_0^1 \varphi(x)Z(x-\xi)dx = \int_0^1 [y''(x)+a_1y'(x)+a_2y(x)]Z(x-\xi)dx$$
$$= \left[y'(x)Z(x-\xi) - y(x)Z'(x-\xi) + a_1y(x)Z(x-\xi)\right]\Big|_0^1 +$$
$$\int_0^1 y(x)[Z''(x-\xi) - a_1Z'(x-\xi) + a_2Z(x-\xi)]dx.$$

طبق رابطهٔ (۹) و خاصیت تابع δ داریم

$$\int_0^1 y(x)[Z''(x-\xi) - a_1Z'(x-\xi) + a_2Z(x-\xi)]dx = \int_0^1 y(x)\,\delta(x-\xi)dx$$
$$= \begin{cases} y(\xi) & \xi \in (0,1), \\ \frac{1}{2}y(\xi) & \xi = 0 \text{ یا } \xi = 1, \\ 0 & \xi \notin [0,1]. \end{cases}$$

بنا بر این با درنظرگرفتن مقادیر مرزی تابع مجهول داریم:

$$\int_0^1 \varphi(x)Z(x-\xi)dx = \left[y'(x)Z(x-\xi) - y(x)Z'(x-\xi) + a_1y(x)Z(x-\xi)\right]\Big|_0^1 + \frac{1}{2}y(\xi).$$

برای $\xi = 0$ می‌توان نوشت

$$\int_0^1 \varphi(x)Z(x)dx = y'(1)Z(1) - y(1)Z'(1) + a_1y(1)Z(1) - y'(0)Z(0) +$$
$$y(0)Z'(0) - a_1y(0)Z(0) + \tfrac{1}{2}y(0). \qquad (۱۰)$$

برای $\xi = 1$ داریم

$$\int_0^1 \varphi(x)Z(x-1)dx = y'(1)Z(0) - y(1)Z'(0) + a_1y(1)Z(0) - y'(0)Z(-1) +$$
$$y(0)Z'(-1) - a_1y(0)Z(-1) + \tfrac{1}{2}y(1) \qquad (۱۱)$$

با توجه به این‌که

$$Z(x) = e(x)z(x) \quad , \quad Z'(x) = e(x)z'(x)$$

که در آن $z(x)$ جواب معادله همگن متناظر با است، داریم

$$Z(1) = \frac{1}{2(r_1-r_2)}[e^{r_1} - e^{r_2}] \quad , \quad Z'(1) = \frac{1}{2(r_1-r_2)}[r_1e^{r_1} - r_2e^{r_2}]$$
$$Z(-1) = -\frac{1}{2(r_1-r_2)}[e^{-r_1} - e^{-r_2}] \quad , \quad Z'(-1) = -\frac{1}{2(r_1-r_2)}[r_1e^{-r_1} - r_2e^{-r_2}]$$

$$Z(0)=0 \quad , \quad Z^{'}(0)=0$$

هرگاه قرار دهیم

$$\lambda_1=\frac{1}{r_1-r_2}[e^{r_1}-e^{r_2}] \quad , \quad \lambda_2=\frac{1}{r_1-r_2}[e^{-r_1}-e^{-r_2}]$$
$$\lambda_3=\frac{1}{r_1-r_2}[r_1e^{r_1}-r_2e^{r_2}] \quad , \quad \lambda_4=\frac{1}{r_1-r_2}[r_1e^{-r_1}-r_2e^{-r_2}]$$

در این صورت

$$Z(1)=\frac{1}{2}\lambda_1 \quad , \quad Z^{'}(1)=\frac{1}{2}\lambda_3 \quad , \quad Z(0)=0$$
$$Z(-1)=-\frac{1}{2}\lambda_2 \quad , \quad Z^{'}(-1)=-\frac{1}{2}\lambda_4 \quad , \quad Z'(0)=0$$

بنا بر این از روی روابط (۱۰) و (۱۱) به‌دست می‌آوریم

$$\begin{cases}(a_1\lambda_1-\lambda_3)y(1)+\lambda_1y^{'}(1)+y(0)=\int_0^1\varphi(x)z(x)dx\,, \\ (a_1\lambda_2-\lambda_4)y(0)+\lambda_2y^{'}(0)+y(1)=-\int_0^1\varphi(x)z(x-1)dx.\end{cases} \qquad (۱۲)$$

که شرایط ضروری برای معادله (۱) هستند.

تشکیل دستگاه جبری

در این مرحله، یک دستگاه جبری با به‌کارگیری شرایط ضروری (۱۲) و شرایط مرزی (2) تشکیل می‌دهیم:

$$\begin{cases}(a_1\lambda_1-\lambda_3)y(1)+\lambda_1y^{'}(1)+y(0)=\int_0^1\varphi(x)z(x)dx\,, \\ (a_1\lambda_2-\lambda_4)y(0)+\lambda_2y^{'}(0)+y(1)=-\int_0^1\varphi(x)z(x-1)dx, \\ \alpha_{11}y^{'}(0)+\alpha_{12}y(0)+\beta_{11}y^{'}(1)+\beta_{12}y(1)=0, \\ \alpha_{21}y^{'}(0)+\alpha_{22}y(0)+\beta_{21}y^{'}(1)+\beta_{22}y(1)=0,\end{cases}$$

مقادیر مرزی تابع مجهول $y'(1),\ y(1),\ y^{'}(0),\ y(0)$ از حل دستگاه فوق به‌وسیلهٔ دستور کرامر به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$y^{'}(0)=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix}\int_0^1\varphi(x)z(x)dx & 1 & \lambda_1 & a_1\lambda_1-\lambda_3 \\ -\int_0^1\varphi(x)z(x-1)dx & a_1\lambda_2-\lambda_4 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha_{12} & \beta_{11} & \beta_{12} \\ 0 & \alpha_{22} & \beta_{21} & \beta_{22}\end{vmatrix}$$

$$y(0)=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 0 & \int_0^1 \varphi(x)z(x)dx\,, & \lambda_1 & a_1\lambda_1-\lambda_3 \\ \lambda_2 & -\int_0^1 \varphi(x)z(x-1)dx, & 0 & 1 \\ \alpha_{11} & 0 & \beta_{11} & \beta_{12} \\ \alpha_{21} & 0 & \beta_{21} & \beta_{22} \end{vmatrix}$$

$$y'(1)=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 0 & 1 & \int_0^1 \varphi(x)z(x)dx & a_1\lambda_1-\lambda_3 \\ \lambda_2 & a_1\lambda_2-\lambda_4 & -\int_0^1 \varphi(x)z(x-1)dx & 1 \\ \alpha_{11} & \alpha_{12} & 0 & \beta_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & 0 & \beta_{22} \end{vmatrix}$$

$$y(1)=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 0 & 1 & \lambda_1 & \int_0^1 \varphi(x)z(x)dx \\ \lambda_2 & a_1\lambda_2-\lambda_4 & 0 & -\int_0^1 \varphi(x)z(x-1)dx \\ \alpha_{11} & \alpha_{12} & \beta_{11} & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \beta_{21} & 0 \end{vmatrix}$$

که در آن

$$\Delta=\begin{vmatrix} 0 & 1 & \lambda_1 & a_1\lambda_1-\lambda_3 \\ \lambda_2 & a_1\lambda_2-\lambda_4 & 0 & 1 \\ \alpha_{11} & \alpha_{12} & \beta_{11} & \beta_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \beta_{21} & \beta_{22} \end{vmatrix}\neq 0. \qquad (۱۳)$$

فرض می‌کنیم که این دترمینان مخالف صفر است.

هرگاه قرار دهیم

$$A_{12}=\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}, \qquad A_{12}=\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \beta_{11} \\ \alpha_{21} & \beta_{21} \end{vmatrix}, \qquad A_{12}=\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \beta_{12} \\ \alpha_{21} & \beta_{22} \end{vmatrix}$$

$$A_{12}=\begin{vmatrix} \alpha_{12} & \beta_{11} \\ \alpha_{22} & \beta_{21} \end{vmatrix}, \qquad A_{12}=\begin{vmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{vmatrix}, \qquad A_{12}=\begin{vmatrix} \alpha_{12} & \beta_{12} \\ \alpha_{22} & \beta_{22} \end{vmatrix}$$

$$\lambda^*{}_1=a_1\lambda_1-\lambda_3 \qquad , \qquad \lambda^*{}_2=a_1\lambda_2-\lambda_4$$

$$B_1=\int_0^1 \varphi(x)z(x)dx \qquad , \qquad B_2=-\int_0^1 \varphi(x)z(x-1)dx$$

در این صورت این روابط را داریم:

$$\begin{cases} y'(0) = \frac{B_1}{\Delta}\,[\lambda_2{}^*A_{34} + A_{23}] - \frac{B_2}{\Delta}\,[A_{34} - \lambda_1 A_{24} + \lambda_1{}^*A_{23}], \\ y(0) = -\frac{B_1}{\Delta}\,\lambda_2 A_{34} + \frac{B_2}{\Delta}\,[-\lambda_1 A_{14} + \lambda_1{}^*A_{13}], \\ y'(1) = \frac{B_1}{\Delta}\,[\lambda_2 A_{24} - \lambda_2{}^*A_{14} + A_{12}] - \frac{B_2}{\Delta}\,[-A_{14} + \lambda_1{}^*A_{12}], \\ y(1) = -\frac{B_1}{\Delta}\,[\lambda_2 A_{23} - \lambda_2{}^*A_{13}] + \frac{B_2}{\Delta}\,[-A_{13} + \lambda_1 A_{12}]. \end{cases} \qquad (۱۴)$$

شرایط مرزی برای معادلهٔ الحاقی

اکنون برای به‌دست آوردن شرایط مرزی معادلهٔ الحاقی (۳)، مقادیر مرزی (۱۴) را در شکل دوخطی $B(y,z)$ قرار می‌دهیم

$$\begin{aligned} B(y,z) = {} & \frac{1}{\Delta}\,[(\lambda_2 A_{24} - \lambda_2{}^*A_{14} + A_{12} - a_1\lambda_2 A_{23} + a_1\lambda_2{}^*A_{13})B_1 + \\ & (A_{14} - \lambda_1{}^*A_{12} - A_{13} + \lambda_1 A_{12})B_2]z(1) + \\ & \frac{1}{\Delta}\,[(\lambda_2 A_{23} - \lambda_2{}^*A_{13})B_1 + (A_{13} - \lambda_1 A_{12})B_2]z'(1) + \\ & \frac{1}{\Delta}[-(\lambda_2{}^*A_{34} + A_{23} - a_1\lambda_2 A_{34})B_1 + \\ & (A_{34} - \lambda_1 A_{24} + \lambda_1{}^*A_{23} + a_1\lambda_1 A_{14} - a_1\lambda_1{}^*A_{13})B_2]z(0) + \\ & \frac{1}{\Delta}\,[-\lambda_2 A_{34}B_1 + (-\lambda_1 A_{14} + \lambda_1{}^*A_{13})B_2]z'(0)\,. \end{aligned}$$

برای این‌که $B(y,z) = 0$ کافی‌است این روابط را داشته باشیم:

$$\begin{cases} (\lambda_2 A_{24} - \lambda_2{}^*A_{14} + A_{12} - a_1\lambda_2 A_{23} + a_1\lambda_2{}^*A_{13})z(1) + (\lambda_2 A_{23} - \lambda_2{}^*A_{13})z'(1) - \\ \quad (\lambda_2{}^*A_{34} + A_{23} - a_1\lambda_2 A_{34})z(0) - \lambda_2 A_{34}z'(0) = 0, \\ (A_{14} - \lambda_1{}^*A_{12} - A_{13} + \lambda_1 A_{12})z(1) + (A_{13} - \lambda_1 A_{12})z'(1) + (-\lambda_1 A_{14} + \lambda_1{}^*A_{13})z'(0) + \\ \quad (A_{34} - \lambda_1 A_{24} + \lambda_1{}^*A_{23} + a_1\lambda_1 A_{14} - a_1\lambda_1{}^*A_{13})z(0) = 0. \end{cases} \qquad (۱۵)$$

نتایج اصلی

با جمع‌بندی مطالب فوق، قضیه و گزاره زیر را نتیجه می‌گیریم.

قضیهٔ ۱.۶: با درنظر گرفتن معادلهٔ الحاقی (۳) و شرایط مرزی الحاقی (۱۵، مسئلهٔ الحاقی مربوط به‌مسئله اصلی (۲)- (۱) با (۳) و (۱۵) داده می‌شود.

گزاره ۱.۶ : ا مقایسهٔ مسئلهٔ اصلی (۲)- (۱) و مسئلهٔ الحاقی (۳) و (۱۵) متناظر با آن تحت شرط (۱۳) در این صورت مسئلهٔ اصلی (۲)- (۱) خودالحاق است هرگاه $a_1 = 0$ و روابط زیر برقرار باشند:

$$\alpha_{11} = -\lambda_2 A_{34} \quad , \quad \alpha_{12} = -\lambda_2{}^*A_{34} - A_{23} \quad , \quad \beta_{11} = \lambda_2 A_{23} - \lambda_2{}^*A_{13}$$

$$\beta_{12} = \lambda_2 A_{24} - \lambda_2{}^*A_{14} + A_{12} \quad , \quad \alpha_{21} = -\lambda_1 A_{14} + \lambda_1{}^*A_{13}$$

$$\alpha_{22} = A_{34} - \lambda_1 A_{24} + \lambda_1{}^*A_{23} \quad , \quad \beta_{21} = A_{13} - \lambda_1 A_{12}$$

$$\beta_{22} = A_{14} - \lambda_1{}^*A_{12} - A_{13} + \lambda_1 A_{12}$$

مسائل حل نشده

۱. مسئله مقدار مرزی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\Delta u + au_{x_1} + bu_{x_2} + cu = 0\ ,\quad x = (x_1, x_2) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$$

$$\alpha_j(x_1)u\left(x_1, \gamma_1(x_1)\right) + \beta_j(x_1)u\left(x_1, \gamma_2(x_1)\right) = \varphi_j(x_1), \quad j = 1,2,\ \ x_1 \in (a, b)$$

که در آن $\Omega = \{\, (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \in (a, b)\, , x_2 \in (\gamma_1(x_1), \gamma_2\,(x_1))\}$ ناحیهٔ کرانداری در $\mathbb{R}^2$ با مرزی‌های هموار معلوم γ_1, γ_2 بوده $\varphi_j,\ \alpha_j\ ,\ \beta_j\ (j = 1,2)$ توابع پیوسته معلوم و u تابع مجهول مسئله هستند. در صورت لزوم می‌توان روی توابع $\varphi_j,\ \alpha_j\ ,\ \beta_j\ (j = 1,2)$ پیوستگی هولدر گذاشت.

آیا می‌توان با ارائهٔ شرایط کافی مسئله را به یک مسئلهٔ خودالحاق تبدیل کرد. توجه شود که شرایط ضروری در مورد معادلات دیفرانسیل جزئی به‌صورت معادلات انتگرالی مرزی نوع دوم فردهلم در می‌آید.

۲. مسئلهٔ مقدار مرزی- اولیهٔ زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + f(x,t) \qquad x \in (0,1),\ \ t > 0$$

$$u(0,t) = u(1,t),$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=0} + \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=1} = 0, \quad t \geq 0$$

$$\frac{\partial^k u(x,t)}{\partial t^k}\Big|_{t=0} = \varphi_k(x), \quad k = 0,1 \qquad x \in [0,1]$$

تعین کنید مسئلهٔ اسپکترال حاصل از مساله اصلی خودالحاق است یا نه؟

اگر خودالحاق نباشد، شرایط کافی ارائه شود که مسئلهٔ اسپکترل حاصل خودالحاق باشد.

منابع

1. Kenneth Hoffman and Ray Kunze, "Linear Algebra", Second Edition, Prentice-Hall (1971).
2. T. Myint, U. Lokenath Debnath, "Partial Differential Euations for Scientists and Engineers", Third Edition, North-Holland (1987).
3. M. A. Naimark, "Linear Differential Operators", Moscow (1965).
4. V. S Vladimirov, "Equations of Mathematical Physics", Mir Publishers, Moscow (1984).
5. A. V. Bitsadze, "Boundary value problems including second order elliptic equations", Science Publisher, Moscow (1966) (Russian).
6. M. Jahanshahi, "Investigation of boundary layers in a singular perturbation problem including a 4th order ordinary differential equations", Journal of Sciences, Vol. 12, No. 2 (2001).

7. N. Aliyev, M. Jahanshahi, "Solution of Poisson's equation with global", local and non-local boundary conditions, Int. J. Math. Educ. Sci. Technol., Vol. 33, No. 2 (2002) 241-247.

8. M. Jahanshahi, N. Aliyev, "Determining of an analytic function on its analytic domain y Cauchy-Remann equation with special kind of boundary conditions", Southeast Asian Bulletin of Mathematics, Vol. 28, No. 1 (2004) 33-39.

9. N. Aliyev, M. Jahanshahi, "Sufficient conditions for the reduction of a BVP include a mixed PDE with non-local boundary conditions to Fredholm integral equations", Int. J. Math. Educ. Sci. Tech., Taylor and Francis, U. K, Vol. 28, No. 3 (1997) 419-425.

10. M. Jahanshahi, N. Aliyev and S. M. Hosseini, "An analytic numerical method for investigation and solving 3-Dimensional steady -state Navier-Stokes equations 2", International Journal of Differentional Equations, Vol. 46, No. 2 (2008).

11. M. Jahanshahi and N. Aliyev, "An analytic method for investigation and solving 2-dimensional steady-state Navier-Stokes equations 1", Southeast Asian Bulletin of Mathematics, 33 (2009) 749-763.