Archive of SID
نشریه علوم دانشگاه خوارزمی جلد ۱۳، شماره ۳
تاریخ چاپ زمستان ۱۳۹۲

بررسی لایه‌های کرانه‌ای مسئلهٔ اغتشاشی تکین شامل معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ دوم خطی با شرایط کرانه‌ای غیرموضعی

علیرضا سرخسی، محمد جهانشاهی*؛
دانشگاه شهید مدنی آذربایجان، گروه ریاضی، تبریز

چکیده

در این مقاله با ارائهٔ روش چهار مرحله‌ای موضعی‌سازی شرایط کرانه‌ای، شرایط لازم و کافی برای وجود یا عدم لایه‌های کرانه‌ای در نزدیکی نقاط کرانه‌ای مسئلهٔ اغتشاشی تکین با شرایط غیرموضعی به‌دست می‌آید. تشخیص وجود یا عدم لایه‌های کرانه‌ای در نزدیکی نقاط کرانه‌ای رابطه‌ای مستقیم با نحوهٔ ساختار و به‌هم پیوستن جواب‌های تقریبی داخلی و خارجی دارد. در نهایت چون به‌دست آوردن جواب تقریبی یکنواخت برای چنین مسائل اغتشاشی تکین اهمیت زیادی دارد. برهمین اساس هدف اصلی این مقاله تشخیص وجود یا عدم لایه‌های کرانه‌ای برای مسئلهٔ اغتشاشی تکین با شرایط کرانه‌ای غیرموضعی است.

مقدمه

پدیدهٔ لایهٔ مرزی در مسائل فیزیك و مهندسی به فراوانی اتفاق می‌افتد. مدل ریاضی این مسائل به‌صورت مسئلهٔ اغتشاشی تکین نمایش داده می‌شود. در واقع مسئلهٔ اغتشاشی تکین به‌صورت مسئلهٔ مقدار کرانه‌ای است که در ضریب بیش‌ترین مرتبهٔ مشتق موجود در معادلهٔ دیفرانسیل، پارامتر کوچك و مثبت ε ظاهر می‌شود. موضوع مهم و پیچیده‌ای که در نظریهٔ ریاضی این مسائل و همچنین در مباحث فیزیکی و مهندسی مربوط به آن‌ها پیش می‌آید، پدیدهٔ لایهٔ کرانه‌ای است. صرف نظر از مفهوم فیزیکی لایهٔ کرانه‌ای، مفهوم ریاضی آن بدین‌صورت است که وقتی در یك یا چند نقطهٔ کرانه‌ای یا داخلی ناحیهٔ مربوط به آن مسئله، پارامتر کوچك ε به صفر میل می‌کند نوعی ناهم‌آهنگی از نظر مرتبهٔ معادلهٔ دیفرانسیل و تعداد شرایط کرانه‌ای مسئله پیش می‌آید. در این موارد جواب مسئله شامل معادلهٔ بدون جمله با ضرایب ε در شرایط کرانه‌ای مسئله صدق نمی‌کند. وجود لایه‌های کرانه‌ای به وجود و یگانگی جواب و خوش رفتار بودن مسئلهٔ اغتشاشی، خللی وارد نمی‌کند [۱۱-۱].

به تنها موضوعی که در این حالت توجه می‌شود، تشخیص وجود یا عدم لایه‌های کرانه‌ای و مشخص کردن مکان وقوع این لایه‌ها در نزدیکی نقاط کرانه‌ای است که از بحث برانگیزترین مسائلی است که بین ریاضی‌دانان مطرح است؛ زیرا ساختار جواب‌های تقریبی مسائل فوق به‌صورت محاسبه جواب‌های داخل لایهٔ کرانه‌ای و خارج

واژه‌های کلیدی: مسئلهٔ لایهٔ کرانه‌ای، جواب اساسی، شرایط سازگاری
دریافت ۹۱/۵/۱۵ پذیرش ۹۲/۶/۲۵
*نویسنده مسئول jahanshahi@azaruniv.edu

www.SID.ir

Archive of SID

لایهٔ کرانه‌ای و یک‌پارچه کردن آن‌ها با شرایط سازگاری مجانبی به‌منظور به‌دست آوردن یک جواب تقریبی یک‌نواخت، [۱]، [۲]، [۹]. نویسندگان در پژوهشی دیگر [۹]، در مورد تشخیص وجود یا عدم لایهٔ کرانه‌ای را از نقطه نظر شرایط کرانه‌ای موضعی بررسی کرده‌اند. ولی اگر شرایط کرانه‌ای به‌صورت غیرموضعی باشد تشخیص وجود یا عدم لایه‌های کرانه‌ای به‌چه صورتی است؟

این پرسشی است که ما را بر آن داشت تا روشی را ارائه کنیم که مسئلهٔ لایهٔ کرانه‌ای با شرایط غیرموضعی را تبدیل به مسئلهٔ لایهٔ کرانه‌ای با شرایط موضعی کند تا بتوانیم با استفاده از روش‌های موجود در [۹] به وجود یا عدم لایه‌های کرانه‌ای در نزدیك نقاط کرانه‌ای پی ببریم. به این منظور شرایط موضعی‌سازی را برای مسئلهٔ مقدار کرا نه‌ای شامل معادلهٔ مرتبه دوم خطی با شرایط کرانه‌ای غیرموضعی

$$l_\varepsilon y_\varepsilon(x) \equiv \varepsilon y''_\varepsilon(x) + a y'_\varepsilon(x) + b y_\varepsilon(x) = \phi(x), \qquad x \in (0,1),$$
$$l_i y_\varepsilon(x) \equiv \Sigma_{j=0}^{1}[\alpha_{ij}^{(\varepsilon)} y_\varepsilon^{(j)}(0) + \beta_{ij}^{(\varepsilon)} y_\varepsilon^{(j)}(1)] = 0, \qquad i = 1,2.$$

را که در آن $\varphi(x)$ تابعی هموار برای تمام $x \in (0,1)$ و $\varepsilon \downarrow 0$ برقرار است و همچنین $\beta_{ij}^{(\varepsilon)}, \alpha_{ij}^{(\varepsilon)}, b, a$ ضرایب ثابت حقیقی دل‌خواهند در قالب چهار مرحله بدین‌صورت معرفی می‌شوند:

مرحلهٔ اول) به‌دست آوردن جواب اساسی معادله الحاقی:

در این مرحله با ضرب کردن تابع دل‌خواه $z_\varepsilon(x)$ در طرفین معادلهٔ مسئلهٔ اغتشاشی و با انتگرال‌گیری از طرفین در محدودهٔ تعریف شده برای مسئلهٔ اغتشاشی، این اتحاد را که به فرمول لاگرانژ معروف است به‌دست می‌آوریم:

$$(l y_\varepsilon, z_\varepsilon) = B(y_\varepsilon, z_\varepsilon) + (y_\varepsilon, l^* z_\varepsilon)$$

که در آن

$$l^* z_\varepsilon = \varepsilon z''_\varepsilon(x) - a z'_\varepsilon(x) + b z_\varepsilon(x)$$

معادلهٔ الحاقی معادلهٔ مسئلهٔ اغتشاشی است و $B(y_\varepsilon, z_\varepsilon)$ فرم دوخطی نامیده می‌شود. جواب اساسی (به‌مفهوم توزیع) به‌صورت

$$Z_\varepsilon(x-\xi) = \frac{\theta(x-\xi)}{\varepsilon[\rho_2(\varepsilon) - \rho_1(\varepsilon)]}\left(e^{\rho_1(\varepsilon)[x-\xi]} - e^{\rho_2(\varepsilon)[x-\xi]}\right)$$

ضریب معادلهٔ الحاقی $l^* z_\varepsilon$ در زیر انتگرال ظاهر می‌شود، که در آن $\theta(x-\xi)$ تابع هویساید واحد است [۴]، [۱۰]، [۱۱].

مرحلهٔ دوم) به دست آوردن شرایط ضروری با استفاده از ویژگی تابع دلتای دیراك:

در این مرحله با ضرب جواب اساسی $Z_\varepsilon(x-\xi)$ و مشتقات آن به طرفین معادلهٔ دیفرانسیل مسئلهٔ اغتشاشی و با استفاده از ویژگی تابع دلتای دیراك برای محدودهٔ انتگرال‌گیری $(0,1)$، یعنی:

$$\int_0^1 y_\varepsilon(x)\delta(x-\xi)dx = \begin{cases} y_\varepsilon(\xi), & \xi \in (0,1) \\ \frac{1}{2} y_\varepsilon(\xi), & \xi = 0, \quad \xi = 1 \\ 0, & \xi \notin [0,1] \end{cases}$$

www.SID.ir

Archive of SID

شرایط ضروری بدین‌صورت به‌دست می‌آید:

$$(a\lambda_1-\lambda_3)y_\varepsilon(1)+\lambda_1 y'_\varepsilon(1)+y_\varepsilon(0)=\int_0^1\phi(x)Z_\varepsilon(x)dx,$$

$$(a\lambda_2-\lambda_4)y_\varepsilon(0)+\lambda_2 y'_\varepsilon(0)+y_\varepsilon(1)=-\int_0^1\phi(x)Z_\varepsilon(x-1)dx,$$

که در آن

$$\lambda_1=\frac{e^{\rho_1(\varepsilon)}-e^{\rho_2(\varepsilon)}}{\varepsilon[\rho_1(\varepsilon)-\rho_2(\varepsilon)]},\qquad \lambda_2=\frac{e^{-\rho_1(\varepsilon)}-e^{-\rho_2(\varepsilon)}}{\varepsilon[\rho_1(\varepsilon)-\rho_2(\varepsilon)]}$$

$$\lambda_3=\frac{\rho_1(\varepsilon)e^{\rho_1(\varepsilon)}-\rho_2(\varepsilon)e^{\rho_2(\varepsilon)}}{\varepsilon[\rho_1(\varepsilon)-\rho_2(\varepsilon)]},\qquad \lambda_4=\frac{\rho_1(\varepsilon)e^{-\rho_1(\varepsilon)}-\rho_2(\varepsilon)e^{-\rho_2(\varepsilon)}}{\varepsilon[\rho_1(\varepsilon)-\rho_2(\varepsilon)]}$$

است [۴]، [۱۰]، [۱۱].

مرحلهٔ سوم) تشکیل دستگاه جبری:

در این مرحله با استفاده از شرایط ضروری به‌دست آمده از مرحلهٔ قبل و شرایط کرانه‌ای غیرموضعی مسئلهٔ اغتشاشی دستگاه جبری:

$$\begin{cases}(a\,\lambda_1-\lambda_3)y_\varepsilon(1)+\lambda_1 y'_\varepsilon(1)+y_\varepsilon(0)=\int_0^1\phi(x)Z_\varepsilon(x)dx,\\(a\,\lambda_2-\lambda_4)y_\varepsilon(0)+\lambda_2 y'_\varepsilon(0)+y_\varepsilon(1)=-\int_0^1\phi(x)Z_\varepsilon(x-1)dx,\\\alpha_{10}^{(\varepsilon)}y'_\varepsilon(0)+\alpha_{11}^{(\varepsilon)}y_\varepsilon(0)+\beta_{10}^{(\varepsilon)}y'_\varepsilon(1)+\beta_{11}^{(\varepsilon)}y_\varepsilon(1)=0,\\\alpha_{20}^{(\varepsilon)}y'_\varepsilon(0)+\alpha_{21}^{(\varepsilon)}y_\varepsilon(0)+\beta_{20}^{(\varepsilon)}y'_\varepsilon(1)+\beta_{21}^{(\varepsilon)}y_\varepsilon(1)=0\end{cases}$$

را تشکیل می‌دهیم که به‌دنبال به‌دست آوردن مجهول‌های $y'_\varepsilon(1),y_\varepsilon(1),y'_\varepsilon(0),y_\varepsilon(0)$ هستیم.

مرحلهٔ چهارم) به‌دست آوردن شرایط کرانه‌ای موضعی:

در این مرحله با فرض این‌که شرایط ضروری و شرایط کرانه‌ای غیرموضعی مستقل از هم هستند و به‌همین سبب، دترمینان دستگاه جبری به‌دست آمده از مرحلهٔ قبل مخالف صفر است شرایط کرانه‌ای موضعی را با استفاده از قاعدهٔ کرامر به‌دست می‌آید:

$$y'_\varepsilon(0)=\frac{\eta_1}{\Delta}[\lambda_2^*\sigma_{34}+\sigma_{23}]-\frac{\eta_2}{\Delta}[\sigma_{34}-\lambda_1\,\sigma_{24}+\lambda_1^*\sigma_{23}],$$

$$y_\varepsilon(0)=-\frac{\eta_1}{\Delta}\lambda_2\,\sigma_{34}+\frac{\eta_2}{\Delta}[-\lambda_1\,\sigma_{14}+\lambda_1^*\sigma_{13}],$$

$$y'_\varepsilon(1)=\frac{\eta_1}{\Delta}[\lambda_2\,\sigma_{24}-\lambda_2^*\sigma_{14}+\sigma_{12}]-\frac{\eta_2}{\Delta}[-\sigma_{14}+\lambda_1^*\sigma_{12}],$$

$$y_\varepsilon(1)=-\frac{\eta_1}{\Delta}[\lambda_2\,\sigma_{23}-\lambda_2^*\sigma_{13}]+\frac{\eta_2}{\Delta}[-\sigma_{13}+\lambda_1\,\sigma_{12}],$$

www.SID.ir

Archive of SID

که در آن

$$\lambda_1^* = a\lambda_1 - \lambda_3, \qquad \lambda_2^* = a\lambda_2 - \lambda_4,$$

$$\eta_1 = \int_0^1 \phi(x) Z_\varepsilon(x) dx, \qquad \eta_2 = -\int_0^1 \phi(x) Z_\varepsilon(x-1) dx$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \lambda_1 & a\lambda_1 - \lambda_3 \\ \lambda_2 & a\lambda_2 - \lambda_4 & 0 & 1 \\ \alpha_{10}^{(\varepsilon)} & \alpha_{11}^{(\varepsilon)} & \beta_{10}^{(\varepsilon)} & \beta_{11}^{(\varepsilon)} \\ \alpha_{20}^{(\varepsilon)} & \alpha_{21}^{(\varepsilon)} & \beta_{20}^{(\varepsilon)} & \beta_{21}^{(\varepsilon)} \end{vmatrix} \neq 0,$$

$$\sigma_{12} = \begin{vmatrix} \alpha_{10}^{(\varepsilon)} & \alpha_{11}^{(\varepsilon)} \\ \alpha_{20}^{(\varepsilon)} & \alpha_{21}^{(\varepsilon)} \end{vmatrix}, \qquad \sigma_{13} = \begin{vmatrix} \alpha_{10}^{(\varepsilon)} & \beta_{10}^{(\varepsilon)} \\ \alpha_{20}^{(\varepsilon)} & \beta_{20}^{(\varepsilon)} \end{vmatrix}, \qquad \sigma_{14} = \begin{vmatrix} \alpha_{10}^{(\varepsilon)} & \beta_{11}^{(\varepsilon)} \\ \alpha_{20}^{(\varepsilon)} & \beta_{21}^{(\varepsilon)} \end{vmatrix}$$

$$\sigma_{23} = \begin{vmatrix} \alpha_{11}^{(\varepsilon)} & \beta_{10}^{(\varepsilon)} \\ \alpha_{21}^{(\varepsilon)} & \beta_{20}^{(\varepsilon)} \end{vmatrix}, \qquad \sigma_{34} = \begin{vmatrix} \beta_{10}^{(\varepsilon)} & \beta_{11}^{(\varepsilon)} \\ \beta_{20}^{(\varepsilon)} & \beta_{21}^{(\varepsilon)} \end{vmatrix}, \qquad \sigma_{24} = \begin{vmatrix} \alpha_{11}^{(\varepsilon)} & \beta_{11}^{(\varepsilon)} \\ \alpha_{21}^{(\varepsilon)} & \beta_{21}^{(\varepsilon)} \end{vmatrix}$$

سرانجام با به‌دست آوردن شرایط کرانه‌ای موضعی با استفاده از روند چهار مرحله‌ای موضعی‌سازی شرایط برای تشخیص وجود یا عدم لایه‌های کرانه‌ای در نزدیکی نقاط کرانه‌ای فراهم می‌شود و سپس با استفاده از روش حد یکنواخت مکرر به‌وجود یا عدم لایه‌های کرانه‌ای در نزدیکی نقاط کرانه‌ای پی می‌بریم [۱]، [۲]، [۳]، [۹].

بیان مدل ریاضی مسئله

اکنون با تغییر روی معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ دوم خطی مسئلهٔ اغتشاشی تکین و شرایط غیرموضعی آن، مسئلهٔ مقدار کرانه‌ای اغتشاشی تکین با این شرایط کرانه‌ای غیرموضعی را در نظر می‌گیریم:

$$l_\varepsilon y_\varepsilon \equiv \varepsilon y_\varepsilon''(x) + y_\varepsilon'(x) = p(x); \qquad x \in (0,1) \tag{1}$$

$$2y_\varepsilon(0) = y_\varepsilon(1), \qquad 2y_\varepsilon'(0) = y_\varepsilon'(1) \tag{2}$$

اکنون با استفاده از روش چهار مرحله‌ای موضعی‌سازی و روش حد یکنواخت مکرر درپی پاسخ به این پرسش‌ها هستیم:

I. در چه شرایطی در نقاط کرانه‌ای لایهٔ کرانه‌ای تشکیل نمی‌شود؟

II. در چه شرایطی لایهٔ کرانه‌ای تنها در نقطهٔ $x=0$ تشکیل می‌شود؟

III. در چه شرایطی لایهٔ کرانه‌ای تنها در نقطهٔ $x=1$ تشکیل می‌شود؟

IV. در چه شرایطی لایهٔ کرانه‌ای در هر دو نقاط کرانه‌ای $x=0$ و $x=1$ تشکیل می‌شود؟

به‌دست آوردن جواب اساسی معادلهٔ الحاقی

در این مرحله برای به‌دست آوردن جواب اساسی، معادلهٔ الحاقی نظیر معادلهٔ همگن (۱) را در نظر می‌گیریم:

www.SID.ir

Archive of SID

$$l_\varepsilon^* z_\varepsilon \equiv \varepsilon z_\varepsilon''(x) - z_\varepsilon'(x) = q(x) \tag{۳}$$

که در آن $q(x)$ تابع اختیاری و هموار است.

تعریف) جواب اساسی یك معادلهٔ دیفرانسیل عادی، تابع تعمیم یافته‌ای است که در معادلهٔ دیفرانسیلی که طرف راست آن تابع دلتای دیراك است صدق کند. به‌عبارتی دیگر، هرگاه l عمل‌گر دیفرانسیلی با ضرایب ثابت به‌صورت $l(D) = \sum_{|\alpha|=\cdot}^{m} a_\alpha D^\alpha$ باشد، تابع تعمیم یافته (توزیع) $y(x-\xi) \in D'$ که در معادلهٔ

$$l(D) y(x-\xi) = \delta(x-\xi)$$

صدق می‌کند یك جواب اساسی عمل‌گر $l(D)$ نامیده می‌شود.

اکنون با استفاده از معادلهٔ الحاقی $l_\varepsilon^* z_\varepsilon$ و اتحاد لاگرانژ، جواب اساسی را بدین‌صورت داریم:

$$Z_\varepsilon(x-\xi) = [1 - e^{\frac{x-\xi}{\varepsilon}}]\theta(x-\xi) \tag{۴}$$

که در آن $\theta(x-\xi)$ تابع هویساید است [۴]، [۱۰]، [۱۱].

به‌دست آوردن شرایط ضروری

در این مرحله با ضرب جواب اساسی $Z_\varepsilon(x-\xi)$ به طرفین معادلهٔ اغتشاشی (۱) و با انتگرال‌گیری در بازهٔ $(\cdot,1)$ به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}
&\varepsilon y_\varepsilon'(\cdot) Z_\varepsilon(-\xi) - \varepsilon y_\varepsilon(\cdot) Z_\varepsilon'(-\xi) + y_\varepsilon(\cdot) Z_\varepsilon(-\xi) \\
&-\varepsilon y_\varepsilon'(1) Z_\varepsilon(1-\xi) + \varepsilon y_\varepsilon(1) Z_\varepsilon'(1-\xi) \\
&-y_\varepsilon(1) Z_\varepsilon(1-\xi) + \int_\cdot^1 p(x) Z_\varepsilon(x-\xi)\,dx \\
&= \begin{cases} y_\varepsilon(\xi), & \xi \in (\cdot,1) \\ \frac{1}{2} y_\varepsilon(\xi), & \xi = \cdot, \quad \xi = 1 \\ \cdot, & \xi \notin [\cdot,1] \end{cases}
\end{aligned} \tag{۵}$$

اکنون با استفاده از رابطهٔ (۵) برای به‌دست آوردن شرایط ضروری داریم:

$$\begin{cases}
\frac{1}{2} y_\varepsilon(\cdot) = \varepsilon y_\varepsilon'(\cdot) Z_\varepsilon(\cdot) - \varepsilon y_\varepsilon(\cdot) Z_\varepsilon'(\cdot) + y_\varepsilon(\cdot) Z_\varepsilon(\cdot) \\
\qquad -\varepsilon y_\varepsilon'(1) Z_\varepsilon(1) + \varepsilon y_\varepsilon(1) Z_\varepsilon'(1) \\
\qquad -y_\varepsilon(1) Z_\varepsilon(1) + \int_\cdot^1 p(x) Z_\varepsilon(x)\,dx \\
\frac{1}{2} y_\varepsilon(1) = \varepsilon y_\varepsilon'(\cdot) Z_\varepsilon(-1) - \varepsilon y_\varepsilon(\cdot) Z_\varepsilon'(-1) + y_\varepsilon(\cdot) Z_\varepsilon(-1) \\
\qquad -\varepsilon y_\varepsilon'(1) Z_\varepsilon(\cdot) + \varepsilon y_\varepsilon(1) Z_\varepsilon'(\cdot) \\
\qquad -y_\varepsilon(1) Z_\varepsilon(\cdot) + \int_\cdot^1 p(x) Z_\varepsilon(x-1)\,dx
\end{cases}$$

www.SID.ir

Archive of SID

رابطهٔ اول دستگاه به یك اتحاد تبدیل می‌شود و رابطهٔ دوم این شرط ضروری را به‌دست می‌دهد:

$$y_\varepsilon(1) = \varepsilon y'_\varepsilon(0)(1-e^{\frac{-1}{\varepsilon}}) + y_\varepsilon(0) + \int_0^1 p(x)(1-e^{\frac{x-1}{\varepsilon}})dx \qquad (6)$$

اکنون شرطهای ضروری روی مشتق جواب معادلهٔ اغتشاشی (۱) را به‌دست می‌آوریم. بدین منظور مشتق جواب اساسی را به طرفین معادلهٔ اغتشاشی (۱) ضرب و در بازهٔ $(0,1)$ انتگرال‌گیری می‌کنیم:

$$\varepsilon y'_\varepsilon(1)Z'_\varepsilon(1-\xi) - \varepsilon y'_\varepsilon(0)Z'_\varepsilon(-\xi) - \int_0^1 p(x)Z'_\varepsilon(x-\xi)dx$$

$$= \begin{cases} y'_\varepsilon(\xi), & \xi \in (0,1) \\ \frac{1}{2} y'_\varepsilon(\xi), & \xi = 0, \quad \xi = 1 \\ 0, & \xi \notin [0,1] \end{cases} \qquad (7)$$

از رابطهٔ (۷) داریم:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} y'_\varepsilon(0) = \varepsilon y'_\varepsilon(1)Z'_\varepsilon(1) - \varepsilon y'_\varepsilon(0)Z'_\varepsilon(0) - \int_0^1 p(x)Z'_\varepsilon(x)dx \\ \frac{1}{2} y'_\varepsilon(1) = \varepsilon y'_\varepsilon(1)Z'_\varepsilon(0) - \varepsilon y'_\varepsilon(0)Z'_\varepsilon(-1) - \int_0^1 p(x)Z'_\varepsilon(x-1)dx \end{cases}$$

رابطهٔ اول دستگاه به یك اتحاد تبدیل می‌شود و رابطهٔ دوم دستگاه این شرط ضروری را به‌دست می‌دهد:

$$y'_\varepsilon(1) = y'_\varepsilon(0)e^{\frac{-1}{\varepsilon}} + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^1 p(x)e^{\frac{x-1}{\varepsilon}}dx \qquad (8)$$

تشکیل دستگاه جبری

در این مرحله با گردآوری شرایط کرانه‌ای غیرموضعی (۲) و شرایط ضروری (۶) و (۸) به‌دست آمده از مرحلهٔ قبل با استفاده از ضرب جواب اساسی $Z_\varepsilon(x-\xi)$ و مشتق آن به طرفین معادلهٔ اغتشاشی (۱) و با انتگرال‌گیری در بازهٔ $(0,1)$ دستگاه جبری را بدین‌صورت تشکیل می‌دهیم:

$$\begin{cases} 2y_\varepsilon(0) = y_\varepsilon(1) \\ 2y'_\varepsilon(0) = y'_\varepsilon(1) \\ y'_\varepsilon(1) = y'_\varepsilon(0)e^{\frac{-1}{\varepsilon}} + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^1 p(x)e^{\frac{x-1}{\varepsilon}}dx \\ y_\varepsilon(1) = \varepsilon y'_\varepsilon(0)(1-e^{\frac{-1}{\varepsilon}}) + y_\varepsilon(0) + \int_0^1 p(x)(1-e^{\frac{x-1}{\varepsilon}})dx \end{cases} \qquad (9)$$

به‌دست آوردن شرایط کرانه‌ای موضعی

در این مرحله با فرض اینکه دستگاه جبری (۹) مستقل خطی است و دترمینان ضرایب آن مخالف صفر است به‌دنبال به‌دست آوردن شرایط موضعی $y_\varepsilon(0)$ و $y_\varepsilon(1)$ و $y'_\varepsilon(0)$ و $y'_\varepsilon(1)$ هستیم.

www.SID.ir

Archive of SID

حال از جمع معادله‌های دوم و سوم دستگاه (۹) داریم:

$$y'_\varepsilon(0) = \frac{1}{2-e^{-\frac{1}{\varepsilon}}}\int_0^1 p(x)\frac{e^{\frac{x-1}{\varepsilon}}}{\varepsilon}dx \tag{۱۰}$$

و نیز با جای‌گذاری رابطهٔ (۱۰) در معادلهٔ دوم دستگاه (۹) به‌دست می‌آوریم:

$$y'_\varepsilon(1) = \frac{2}{2-e^{-\frac{1}{\varepsilon}}}\int_0^1 p(x)\frac{e^{\frac{x-1}{\varepsilon}}}{\varepsilon}dx \tag{۱۱}$$

اکنون برای به‌دست آوردن مجهول‌های $y_\varepsilon(0)$ و $y_\varepsilon(1)$ معادله‌های اول و چهارم دستگاه (۹) را با هم جمع می‌کنیم و به‌دست می‌آوریم:

$$y_\varepsilon(0) = \varepsilon y'_\varepsilon(0)(1-e^{-\frac{1}{\varepsilon}}) + \int_0^1 p(x)(1-e^{\frac{x-1}{\varepsilon}})dx \tag{۱۲}$$

حال با جای‌گذاری رابطهٔ (۱۰) در رابطهٔ (۱۲) داریم:

$$y_\varepsilon(0) = \int_0^1 p(x)dx - \frac{1}{2-e^{\frac{-1}{\varepsilon}}}\int_0^1 p(x)(1-e^{\frac{x-1}{\varepsilon}})dx \tag{۱۳}$$

و با قرار دادن رابطهٔ (۱۳) در معادلهٔ اول دستگاه (۹) به‌دست می‌آوریم:

$$y_\varepsilon(1) = 2\int_0^1 p(x)dx - \frac{2}{2-e^{\frac{-1}{\varepsilon}}}\int_0^1 p(x)e^{\frac{x-1}{\varepsilon}}dx \tag{۱۴}$$

اکنون این قضیه را نتیجه‌گیری می‌کنیم:

قضیهٔ ۱) فرض کنیم معادلهٔ دیفرانسیل اغتشاشی تکین (۱) با شرایط غیرموضعی (۲) برای $0<x<1$ و $0<\varepsilon\ll 1$ برقرار باشد هرگاه شرایط کرانه‌ای غیرموضعی (۲) با شرایط ضروری (۶) و (۸) که به‌صورت مستقل خطی هستند، دستگاه خطی جبری (۹) را تشکیل دهند در این صورت جواب $y_\varepsilon(x)$ معادلهٔ دیفرانسیل اغتشاشی تکین (۱) با شرایط کرانه‌ای (۲)، در شرایط کرانه‌ای موضعی (۱۰) و (۱۱) و (۱۳) و (۱۴) صدق می‌کند.

بررسی لایه‌های کرانه‌ای در نزدیك نقاط کرانه‌ای

برای تشخیص وجود یا عدم لایه‌های کرانه‌ای نزدیك نقاط کرانه‌ای $x=0$ و $x=1$ از روش حد یك‌نواخت مکرر استفاده می‌کنیم بدین‌منظور این دو گام را در نظر می‌گیریم:

گام اول) تشخیص وجود یا عدم لایهٔ کرانه‌ای نزدیك نقطهٔ کرانه‌ای $x=0$:

برای این کار نیاز است که ما برقراری یا عدم برقراری این روابط را برای تابع مجهول $y_\varepsilon(x)$ نشان دهیم:

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\lim_{x\downarrow 0} y_\varepsilon(x) = \lim_{x\downarrow 0}\lim_{\varepsilon\downarrow 0} y_\varepsilon(x) \tag{۱۵}$$

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\lim_{x\downarrow 0} y'_\varepsilon(x) = \lim_{x\downarrow 0}\lim_{\varepsilon\downarrow 0} y'_\varepsilon(x) \tag{۱۶}$$

www.SID.ir

Archive of SID

حال با حدگیری از طرفین رابطهٔ (۱۳) وقتی که $\varepsilon \downarrow 0$ میل می‌کند داریم:

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} y_\varepsilon(0)=\int_0^1 p(\xi)d\xi \tag{۱۷}$$

اکنون از معادلهٔ رابطهٔ (۵) داریم:

$$y_\varepsilon(x)=\varepsilon y'_\varepsilon(0)(1-e^{-\frac{x}{\varepsilon}})+y_\varepsilon(0)+\int_0^x p(\xi)(1-e^{\frac{\xi-x}{\varepsilon}})d\xi \tag{۱۸}$$

و با حدگیری از طرفین رابطهٔ (۱۸) وقتی که $\varepsilon \downarrow 0$ میل می‌کند به‌دست می‌آوریم:

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} y_\varepsilon(x)=\int_0^1 p(\xi)d\xi+\int_0^x p(\xi)d\xi \tag{۱۹}$$

و نیز با حدگیری از طرفین رابطهٔ (۱۹) وقتی که $x \downarrow 0$ میل می‌کند داریم:

$$\lim_{x\downarrow 0}\lim_{\varepsilon\downarrow 0} y_\varepsilon(x)=\int_0^1 p(\xi)d\xi \tag{۲۰}$$

حال از روابط (۱۷) و (۲۰) پی به برقراری رابطهٔ (۱۵) می‌بریم.

اکنون با مشتق‌گیری از رابطهٔ (۱۸) داریم:

$$y'_\varepsilon(x)=y'_\varepsilon(0)e^{-\frac{x}{\varepsilon}}+\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x p(\xi)e^{\frac{\xi-x}{\varepsilon}}d\xi \tag{۲۱}$$

و با استفاده از رابطه

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{e^{\frac{\xi-x}{\varepsilon}}}{2\varepsilon}=\delta(\xi-x) \tag{۲۲}$$

که در آن $\delta(\xi-x)$ تابع دلتای دیراك است حد رابطهٔ (۲۱) را وقتی که $\varepsilon \downarrow 0$ میل می‌کند بدین‌صورت به‌دست می‌آوریم:

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} y'_\varepsilon(x)=\int_0^x p(\xi)\delta(\xi-x)d\xi=p(x) \tag{۲۳}$$

و با حدگیری از طرفین رابطهٔ (۲۳) وقتی که $x \downarrow 0$ میل می‌کند داریم:

$$\lim_{x\downarrow 0}\lim_{\varepsilon\downarrow 0} y'_\varepsilon(x)=p(0) \tag{۲۴}$$

و نیز با حدگیری از رابطهٔ (۲۱) وقتی که $x \downarrow 0$ میل می‌کند به‌دست می‌آوریم:

$$\lim_{x\downarrow 0} y'_\varepsilon(x)=\frac{1}{2-e^{-\frac{1}{\varepsilon}}}\int_0^1 p(\xi)\frac{e^{\frac{\xi-1}{\varepsilon}}}{\varepsilon}d\xi \tag{۲۵}$$

اکنون با حدگیری از طرفین رابطهٔ (۲۵) وقتی که $\varepsilon \downarrow 0$ میل می‌کند و نیز با استفاده از رابطهٔ (۲۲) داریم:

$$\lim_{x\downarrow 0}\lim_{\varepsilon\downarrow 0} y'_\varepsilon(x)=\frac{1}{2}p(1) \tag{۲۶}$$

www.SID.ir

Archive of SID

حال با استفاده از روابط (۲۴)و(۲۶) از برقراری یا عدم برقراری رابطهٔ (۱۶) به‌وجود یا عدم لایهٔ کرانه‌ای در نزدیکی نقطه کرانه‌ای $x=\cdot$ پی می‌بریم.

گام دوم) تشخیص وجود یا عدم لایهٔ کرانه‌ای نزدیك نقطهٔ کرانه‌ای $x=۱$ **:**

در این قسمت برای نقطهٔ کرانه‌ای $x=۱$ این روابط را بررسی می‌کنیم:

$$\lim_{\varepsilon\downarrow\cdot}\lim_{x\uparrow ۱} y_\varepsilon(x)=\lim_{x\uparrow ۱}\lim_{\varepsilon\downarrow\cdot} y_\varepsilon(x) \tag{۲۷}$$

$$\lim_{\varepsilon\downarrow\cdot}\lim_{x\uparrow ۱} y'_\varepsilon(x)=\lim_{x\uparrow ۱}\lim_{\varepsilon\downarrow\cdot} y'_\varepsilon(x) \tag{۲۸}$$

با حدگیری از رابطهٔ (۲۴) وقتی که $x\uparrow ۱$ میل می‌کند به‌دست می‌آوریم:

$$\lim_{x\uparrow ۱}\lim_{\varepsilon\downarrow\cdot} y_\varepsilon(x)=۲\int_{\cdot}^{۱} p(\xi)d\xi \tag{۲۹}$$

و همچنین با حدگیری از رابطهٔ (۱۴) وقتی که $\varepsilon\downarrow\cdot$ میل می‌کند داریم:

$$\lim_{\varepsilon\downarrow\cdot} y_\varepsilon(۱)=۲\int_{\cdot}^{۱} p(x)dx \tag{۳۰}$$

حال از روابط (۲۹) و(۳۰) به برقراری رابطهٔ (۲۷) پی می‌بریم.

اکنون با حدگیری از طرفین رابطهٔ (۱۱) وقتی که $\varepsilon\downarrow\cdot$ میل می‌کند و نیز با استفاده از رابطهٔ (۲۲) داریم:

$$\lim_{\varepsilon\downarrow\cdot} y'_\varepsilon(۱)=p(۱) \tag{۳۱}$$

و همچنین با حدگیری از رابطهٔ (۲۳) وقتی که $x\uparrow ۱$ میل می‌کند داریم:

$$\lim_{x\uparrow ۱}\lim_{\varepsilon\downarrow\cdot} y'_\varepsilon(x)=p(۱) \tag{۳۲}$$

و سرانجام از روابط (۳۱) و(۳۲) به برقراری رابطهٔ (۲۸) پی می‌بریم. حال می‌توانیم نتایج به‌دست آمده از گام‌های اول و دوم را در قالب قضیه‌ای در ذیل مطرح کنیم.

قضیه ۲ . فرض کنیم معادله دیفرانسیل اغتشاشی تکین (۱) با شرایط غیرموضعی (۲) برای $\cdot<x<۱$ و $\cdot<\varepsilon\ll ۱$ برقرار باشد در این صورت:

الف) مسئلهٔ اغتشاشی تکین فاقد لایهٔ کرانه‌ای در نزدیکی نقطهٔ کرانه‌ای $x=\cdot$ است اگر و تنها اگر رابطهٔ $p(۱)-۲p(\cdot)=\cdot$ برقرار باشد.

ب) مسئلهٔ اغتشاشی تکین فاقد لایهٔ کرانه‌ای در نزدیکی نقطهٔ کرانه‌ای $x=۱$ است.

نتیجه‌گیری

در این مقاله برای مسئلهٔ اغتشاشی تکین (۱)-(۲) بااستفاده از روش چهارمرحله‌ای موضعی‌سازی به‌دنبال به‌دست آوردن شرایط موضعی (۱۰) و (۱۱) و (۱۳) و (۱۴) در قضیهٔ ۱ و همچنین در پی به‌دست آوردن شرایط لازم و کافی برای عدم لایهٔ کرانه‌ای در نزدیکی نقاط کرانه‌ای مسئلهٔ اغتشاشی تکین (۲)-(۱) هستیم که با

www.SID.ir

Archive of SID

برقراری رابطهٔ (۱۵) و با ارائه شرط کافی برای برقراری رابطهٔ (۱۶) در قضیه ۲،عدم لایهٔ کرانه‌ای در نزدیکی نقطهٔ کرانه‌ای $x = ۰$ را نشان می‌دهیم و نیز با برقراری روابط (۲۷) و(۲۸) با استفاده از قضیه ۲،عدم لایهٔ کرانه‌ای در نزدیکی نقطهٔ کرانه‌ای $x = ۱$ را نیز نمایش دادیم.

منابع

1. J. R. E., O`mally, "Introduction to Singular Perturbations", Academic Press, New York (1974).
2. J. R. E, O`mally, "Singular Perturbation Methods For O.D.E`S", Springer verlag (1991).
3. A. H. Nayfeh, "Perturbation Methods", John Wiley and Sons (1973).
4. E. P. Doolan, J. J. Miller, W. H. Schilders, "Uniform Numerical Methods for Problems with Initial and Boundary Layers", Bode Press, Dublin (1980).
5. G. D. Birkhoff, "On the asympetotic of the solution of certain linear differential equations containing a parameter", Trans. Amer. Math. Soc. q (1908) 219-231 and 380-382.
6. J. Jayakumar, N. Ramanujam, "A computational method for solving singular perturbation problems", Appl. Math, Comput, 55 (1993) 31-48.
7. J. Jayakumar, N. Ramanujam, "A numerical method for singular perturbation problems arising in chemical reactors theory", Appl. Math. Comput, 27 (1994).
8. V. Shanthi, N. Ramanujam, "A numerical method for boundary value problems for singulary perturbed fourth order O.D.E‘s", Appl. Math. Comput, 129 (2002) 269-294.
9. A. R. Sarakhsi, M. Jahanshahi, "Asymptotic Solution of the Problem of Singular Perturbation of Second-Order Linear with Constant Cofficients with a Dirichlet Condition", Journal of sciences Tarbiat Moallem University, Volome 10, No.1 (2010).
10. M. Sajjadmanesh, M. Jahanshahi, "The New Method for Investigation and Self adjoint Boundary Value Problems Including Ordinary Differential Equations", Journal of sciences Tarbiat Moallem University (2011).
11. A. R. Sarakhsi, S. Ashrafi, M. Jahanshahi, M .Sarakhsi, "Investigation of Boundary Layers in Some Singular Perturbation Problems Including Fourth Order Ordinary Differential Equation", World Applied Sciences Journal 22 (12) (2013)1695-1701.

www.SID.ir