جلد ۱۳، شماره ۳ نشریه علوم دانشگاه خوارزمی

تاریخ چاپ زمستان ۱۳۹۲

پخش محوری شبیه‌سازی عددی فرآیند انتقال جرم اکسیژن در بسترهای مویرگ انسان

عظیم امین‌عطائی؛

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، دانشکده ریاضی، گروه ریاضی کاربردی

چکیده

در این پژوهش، به شبیه‌سازی عددی فرآیند انتقال جرم اکسیژن در بسترهای مویرگ انسان با در نظر گرفتن جمله پخش محوری پرداخته شده است. معادلۀ شبیه‌سازی شده معادله‌ای دیفرانسیل با مشتقات پاره‌ای نامانا از نوع همرفت-نفوذ است که در مسائل مهندسی زیستی کاربرد فراوان دارد و گسترش عمدۀ آن در مسائل لایۀ مرزی سیالات، مدارهای الکتریکی در کابل‌ها و مسائل انتقال جرم است. حل تحلیلی این نوع معادلات پیچیده است. بنا بر این حل عددی برای به‌دست آوردن جواب تقریبی اهمیت فراوانی دارد و هم‌گرایی و پایداری در این روش حل همواره مورد سؤال بوده است. در این پژوهش، کوشش شده است به پرسش‌های مذکور با در نظر گرفتن این معادلۀ خاص پاسخ داده شود و برای این منظور از روش تفاضلات متناهی استفاده شده است.

مقدمه

در پژوهش‌های قبلی، مدلی ریاضی نامانا از فرآیند انتقال جرم اکسیژن در بسترهای مویرگ انسان ارائه شد. فرمول‌بندی این نوع از مسائل، منجر به معادلۀ دیفرانسیل پاره‌ای سهموی وابسته به زمان شده و برای حل عددی آن از روش تفاضلات متناهی استفاده شده است [۱]-[۱۱]. این نوع پژوهش، در مسائل بیومهندسی مانند انتشار مواد نیز کاربرد فراوان دارد [۱۲]. در این پژوهش، مدل ریاضی نامانای فرآیند انتقال جرم اکسیژن در بسترهای مویرگ انسان را که شامل جمله پخش‌محوری نیز است، در نظر می‌گیریم و به حل عددی این معادله به‌روش تفاضلات متناهی می‌پردازیم. در ادامه، بحث را روی سازگاری، پایداری و هم‌گرایی از معادلات تفاضلی مختلفی که با استفاده از روش‌های صریح استانده و ضمنی لاترونن به‌دست می‌آید، متمرکز می‌کنیم.

مدل ریاضی مسئله

معادلۀ مربوط به انتقال جرم اکسیژن در بسترهای مویرگ انسان وابسته به معادلات همرفت-نفوذ نامانا است. فرض شده است که مویرگ مجرایی دوبعدی به ضخامت ۲a که a=۱ است، باشد. در این‌صورت معادله بدین‌صورت به‌دست می‌آید:

واژه‌های کلیدی: معادلۀ دیفرانسیل با مشتقات پاره‌ای نامانا، روش تفاضلات متناهی، روش صریح استانده، روش ضمنی لاترونن، سازگاری، پایداری، همگرایی

دریافت ۹۲/۲/۱٤ پذیرش ۹۲/۹/۲٤

***نویسنده مسئول** ataei@kntu.ac.ir

$$c_t + uc_y = D\left(c_{xx} + c_{yy}\right), \qquad ۰ \le x \le ۱; ۰ \le y \le ۱, t > ۰ \qquad (۱)$$

در بستر مویرگ، جریان لایه‌ای است و فرض شده است که خون به‌طور یک‌نواخت با سرعت متوسط u=۰/۴ حرکت کند و ضریب نفوذ اکسیژن هم مقدار ثابت D=۰/۲۴ در نظر گرفته شده است. جملات اول و دوم در سمت چپ معادلهٔ (۱) به‌ترتیب تغییر غلظت در واحد زمان و انتقال به‌سبب همرفت را نشان می‌دهند و جملات سمت راست معادلهٔ (۱) هم نفوذ مولکولی در جهت افقی و محوری را منظور می‌کند. معادلهٔ (۱) تحت شرایط مرزی و اولیه بدین‌صورت بیان می‌شود:

(i) شرایط مرزی

- چگالی شار در طول خط قرینگی (تقارن) صفر است:

$$c_x\left(۰, y, t\right) = ۰, \qquad \forall t, ۰ < y \le ۱ \qquad (۲)$$

- در دیوارهٔ محور افقی داریم:

$$c\left(۱, y, t\right) = ۱, \qquad \forall t, ۰ < y \le ۱ \qquad (۳)$$

- در ورود محوری داریم:

$$c\left(x, ۰, t\right) = ۰, \qquad \forall t, ۰ \le x \le ۱ \qquad (۴)$$

- و در دیوارهٔ محوری برای چگالی شار داریم:

$$c_y\left(x, ۱, t\right) = ۱, \qquad \forall t, ۰ \le x \le ۱ \qquad (۵)$$

(ii) شرط اولیه

- برای شرط اولیه در نظر می گیریم:

$$c\left(x, y, ۰\right) = ۰, \qquad x > ۰, y \ge ۰ \qquad (۶)$$

دستورالعمل حل مسئله به روش تفاضلات متناهی

برای به‌کار بردن روش تفاضلات متناهی، ناحیهٔ مورد نظر را به اندازه‌های دقیق Δx ، Δy و Δt به‌ترتیب در جهت‌های x ، y و t تقسیم می‌کنیم. بنا بر این هر یک از نقاط شبکه بدین‌صورت نمایش داده می‌شوند:

$$\begin{cases} x_i = i\Delta x; & y_j = j\Delta y; \qquad t_k = k\Delta t \\ i = ۰,۱,۲,\ldots,(I-۱),\ldots,n; & j = ۱,۲,\ldots,m;\ k = ۱,۲,\ldots, \end{cases}$$

که در آن $n\Delta x = ۱$ و $m\Delta y = ۱$.

در روش تقریب تفاضلات متناهی، با به‌کار بردن تفاضلات متناهی پیش‌رو، پس‌رو و مرکزی برای هر مشتق پاره‌ای در معادلهٔ (۱)، معادلات تفاضلی مختلفی به‌دست می‌آوریم که حل تقریبی از معادلهٔ (۱) را نتیجه می‌دهند. در این پژوهش، با به‌کار بردن این معادلات تفاضلی، سازگاری و پایداری این معادلات را در نظر می‌گیریم زیرا ارتباط مهمی بین سازگاری یک روش تفاضل متناهی پایدار و همگرایی آن به حل معادله دیفرانسیل پاره‌ای مربوط وجود دارد.

قضیهٔ هم‌ارزی لاکس[۱] [۱۳] بیان می‌کند که اگر یک تقریب تفاضل متناهی به مسئله‌ای با مقدار اولیهٔ خطی خوش وضع، سازگار باشد آن‌گاه پایداری برای همگرایی لازم و کافی است. دو محدودیتی که برای این قضیه به‌کار می‌رود و باید به‌طور دقیق به آن توجه شود، این است که اول، مسئلهٔ مقدار اولیه باید خوش وضع باشد؛ یعنی حل معادله باید به‌طور یک‌نواخت به داده‌های اولیه وابسته باشد و دوم، قضیه فقط برای مسائل خطی به‌کار می‌رود. ویژگی مهم از معادلات خطی این است که مجموعه‌ای از جواب‌های مجزا و جوابی از معادله است و به این حقیقت منجر می‌شود که جمله‌های خطا، شکل همگنی از معادلهٔ تفاضلی متناهی را مشخص می‌کنند که معادلهٔ دیفرانسیل داده شده را تقریب می‌زند. این قضیه اهمیت چشم‌گیری دارد. زیرا تا حدی پایداری روش تفاضل متناهی را نشان می‌دهد و این‌که با معادله داده شده سازگار باشد را آسان می‌کند. معمولاً این‌که یک روش تفاضل متناهی حل معادلهٔ مربوط همگرا را نشان می‌دهد، خیلی مشکل است. قضیه هم ارزی لاکس با گذشتن از این نیاز همگرایی را ثابت می‌کند.

در این‌جا از تقریب تفاضلات متناهی برای حل عددی معادلهٔ همرفت-نفوذ نامانا شامل جمله پخش محوری از معادلهٔ (۱) استفاده می‌کنیم و چون معادله مورد نظر خطی و خوش وضع است، این برای اثبات سازگاری و پایداری تقریب‌های تفاضلات متناهی از معادلهٔ (۱) کافی است.

نمایش معادلهٔ تفاضلی با استفاده از روش صریح استانده

مشتق پاره‌ای t در نقطهٔ (i,j,k) با فرمول تفاضلات متناهی پیش‌رو و c_y در نقطهٔ (i,j,k+۱) با فرمول تفاضلات متناهی پس‌رو و مشتق مرتبهٔ دوم در x و y هم در نقطهٔ (i,j,k) با فرمول تفاضلات متناهی مرکزی تقریب زده می‌شوند. با استفاده از روش صریح استانده داریم [۱۴]، [۱۵]:

$$\frac{۱}{\Delta t}\left(c_{i,j}^{k+۱}-c_{i,j}^{k}\right)+\frac{u}{\Delta y}\left(c_{i,j}^{k+۱}-c_{i,j-۱}^{k+۱}\right)=\frac{D}{\left(\Delta x\right)^{۲}}\left[c_{i-۱,j}^{k}-۲c_{i,j}^{k}+c_{i+۱,j}^{k}\right]+\frac{D}{\left(\Delta y\right)^{۲}}\left[c_{i,j-۱}^{k}-۲c_{i,j}^{k}+c_{i,j+۱}^{k}\right]$$

با قرار دادن, $p=\frac{u.\Delta t}{\Delta y}$ و $q=\frac{D.\Delta t}{\left(\Delta x\right)^{۲}}=\frac{D.\Delta t}{\left(\Delta y\right)^{۲}}$ که $\Delta x=\Delta y$ است، داریم:

$$\left(۱+p\right)c_{i,j}^{k+۱}=qc_{i-۱,j}^{k}+\left(۱-۴q\right)c_{i,j}^{k}+qc_{i+۱,j}^{k}+pc_{i,j-۱}^{k+۱}+q\left[c_{i,j-۱}^{k}+c_{i,j+۱}^{k}\right] \qquad (۷)$$

که $i=۰,۱,....,n-۱,\quad j=۱,۲,...m,\quad k=۰,۱,۲,...$.

با به‌کار بردن شرایط مرزی و اولیه داریم:

- با توجه به معادلهٔ (۳) برای هر j و k داریم:

$$c_{n,j}^{k}=۱ \qquad (۸)$$

- با توجه به معادلهٔ (۴) برای هر i و k داریم:

۱. Lax's equivalence theorem

$$c_{i,0}^{k}=0 \qquad (9)$$

- در این پژوهش برای حل عددی m=۱۰ در نظر گرفته شده است، بنا بر این با به‌کار بردن تقریب تفاضلات مرکزی و با توجه به معادلهٔ (۵) برای هر i و k داریم:

$$\frac{c_{11,k}-c_{9,k}}{0/2}=1 \qquad (10)$$

که در نتیجه برای جملهٔ $c_{11,k}$ به‌دست می‌آوریم:

$$c_{11,k}=c_{9,k}+0/2 \qquad (11)$$

که از جملهٔ $c_{11,k}$ در حل عددی معادلات استفاده می‌کنیم.

- و با توجه به معادلهٔ (۶) برای هر i و j داریم:

$$c_{i,j}^{0}=0 \qquad (12)$$

برای تقریب شرط مرزی (۲)، سه تقریب تفاضلی مختلف را در نظر می‌گیریم:

- (i) تقریب شرط مرزی مشتق با استفاده از فرمول تفاضلات متناهی مرکزی

با به‌کار بردن فرمول تفاضلات متناهی مرکزی مرتبهٔ دوم برای تقریب شرط مرزی (۲) داریم:

$$\frac{1}{\Delta x}\left(c_{1,j}^{k}-c_{-1,j}^{k}\right)=0$$

که در نتیجه به‌ازای هر j و k داریم:

$$c_{-1,j}^{k}=c_{1,j}^{k} \qquad (13)$$

با قرار دادن i=۰ در معادلهٔ (۷) و حذف جملهٔ $c_{-1,j}^{k}$ با استفاده از رابطهٔ (۱۳) داریم:

$$(1+p)c_{0,j}^{k+1}=(1-4q)c_{0,j}^{k}+2qc_{1,j}^{k}+pc_{0,j-1}^{k+1}+q\left[c_{0,j-1}^{k}+c_{0,j+1}^{k}\right] \qquad (14)$$

حال با قرار دادن i=n-۱ در معادلهٔ (۷) و با استفاده از رابطهٔ (۸) داریم:

$$(1+p)c_{n-1,j}^{k+1}=qc_{n-2,j}^{k}+(1-4q)c_{n-1,j}^{k}+pc_{n-1,j-1}^{k+1}+q\left[c_{n-1,j-1}^{k}+c_{n-1,j+1}^{k}\right]+q \qquad (15)$$

اکنون با استفاده از معادلات (۷)، (۱۴) و (۱۵) این شکل ماتریسی را می‌توان به‌دست آورد:

$$(1+p)c_{j,k+1}=Ac_{j,k}+pc_{j-1,k+1}+q\left[c_{j-1,k}+c_{j+1,k}\right]+d,$$

که A ماتریس مربعی سه قطری از مرتبهٔ n است و بدین‌صورت معرفی می‌شود:

$$A=\begin{pmatrix} 1-4q & 2q & & & 0 \\ q & 1-4q & q & & \\ & & \ddots & & \\ 0 & & q & 1-4q & q \\ & & & q & 1-4q \end{pmatrix}$$

d و $c_{j,k+1}$ هم بردارهای ستونی از مرتبهٔ n هستند که بدین‌صورت مشخص می‌شوند:

$$d=[0,0,...,0,q]^T \quad ; \quad c_{j,k+1}=\left[c_{0,j}^{k+1},c_{1,j}^{k+1},...,c_{n-1,j}^{k+1}\right]^T$$

(ii) تقریب شرط مرزی مشتق با استفاده از فرمول تفاضلات متناهی پس‌رو

با به‌کار بردن فرمول تفاضلی پس‌رو برای تقریب شرط مرزی (۲) داریم:

$$\frac{1}{\Delta x}\left(c_{0,j}^k-c_{-1,j}^k\right)=0$$

که در نتیجه به‌ازای هر j و k داریم:

$$c_{-1,j}^k=c_{0,j}^k \tag{16}$$

با قرار دادن $i=0$ در معادلهٔ (۷) و حذف جملهٔ $c_{-1,j}^k$ با استفاده از رابطهٔ (۱۶) داریم:

$$(1+p)c_{0,j}^{k+1}=(1-3q)c_{0,j}^k+qc_{1,j}^k+pc_{0,j-1}^{k+1}+q\left[c_{0,j-1}^k+c_{0,j+1}^k\right] \tag{17}$$

و به‌طور مشابه رابطهٔ (۱۵) را برای i=n-1 داریم.

معادلات (۷)، (۱۵) و (۱۷) در شکل ماتریسی بدین‌صورت نوشته می‌شوند:

$$(1+p)c_{j,k+1}=Ac_{j,k}+pc_{j-1,k+1}+q\left[c_{j-1,k}+c_{j+1,k}\right]+d$$

که ماتریس‌های d و $c_{j,k+1}$ به‌همان شکل قبلی تعریف شده‌اند و ماتریس A هم با تبدیل (1-4q) به (1-3q) و 2q به q در سطر اول از ماتریس A معرفی شده در (i) به‌دست می‌آید.

(iii) تقریب شرط مرزی مشتق با استفاده از فرمول تفاضلات متناهی پیش‌رو

با به‌کار بردن فرمول تفاضلی پیش‌رو برای تقریب شرط مرزی (۲) داریم:

$$\frac{1}{\Delta x}\left(c_{1,j}^k-c_{0,j}^k\right)=0$$

که در نتیجه به‌ازای هر j و k داریم:

$$c_{0,j}^k=c_{1,j}^k \tag{18}$$

با قرار دادن i=1 درمعادلهٔ (۷) و حذف $c_{0,j}^k$ با استفاده از رابطهٔ (۱۸) داریم:

$$(1+p)c_{1,j}^{k+1}=(1-3q)c_{1,j}^k+qc_{2,j}^k+pc_{1,j-1}^{k+1}+q\left[c_{1,j-1}^k+c_{1,j+1}^k\right] \tag{19}$$

و به‌طور مشابه رابطهٔ (۱۵) را برای i=n-1 داریم. معادلات (۷)، (۱۵) و (۱۹) در شکل ماتریسی بدین‌صورت نوشته می‌شوند:

$$(1+p)c_{j,k+1}=Ac_{j,k}+pc_{j-1,k+1}+q\left[c_{j-1,k}+c_{j+1,k}\right]+d$$

که ماتریس A همان ماتریس A در (ii) است با این تفاوت که از مرتبهٔ n-1 است. بردارهای d و $c_{j,k+1}$ هم بردارهای ستونی از همان مرتبه هستند که بدین‌صورت مشخص می‌شوند:

$$d=\left[\cdot,\cdot,\cdot,....,q\right]^T\ ;\quad c_{j,k+1}=\left[c_{1,j}^{k+1},c_{2,j}^{k+1},...,c_{n-1,j}^{k+1}\right]^T$$

در این بخش، بعد از حل دستگاه و به‌دست آوردن مقادیر $c_{1,j}^{k+1},c_{2,j}^{k+1},...,c_{n-1,j}^{k+1}$، قرار می‌دهیم: $c_{0,j}^{k+1}=c_{1,j}^{k+1}$

۱. روش حل عددی

با توجه به معادلات تفاضلی به‌دست آمده در هر یک از سه حالت (i)، (ii) و (iii) که در بخش ۴ مطرح شد، مقادیر $c_{i,j}^{k+1}$ را با استفاده از مقادیر معلوم در زمان‌های قبلی با افزایش k برای j=۱,۲,...,m می‌توان محاسبه کرد؛ یعنی یک‌بار همهٔ مقادیر c در یک سطح زمانی محاسبه شده‌اند و سپس محاسبات برای سطوح زمانی بعدی تکرار شده است. این فرآیند ادامه می‌یابد تا زمانی که: $\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\left|c_{i,j}^{k+1}-c_{i,j}^{k}\right|<\varepsilon$ که ε خطای مجاز است.

نتایج مربوط به معادلات تفاضلی به‌دست آمده در حالت‌های (ii) و (iii) در جدول‌های ۱ و ۲ نشان داده شده است.

۲. بررسی خطای برشی و سازگاری

معادلهٔ تفاضلی مربوط به معادلهٔ (۱) را که در بخش ۴ بیان شد، در نظر می‌گیریم:

$$F_{i,j}^{k}(c)=\frac{1}{\Delta t}(c_{i,j}^{k+1}-c_{i,j}^{k})+\frac{u}{\Delta y}(c_{i,j}^{k+1}-c_{i,j-1}^{k+1})-\frac{D}{(\Delta x)^2}\left[c_{i-1,j}^{k}-2c_{i,j}^{k}+c_{i+1,j}^{k}\right]-\frac{D}{(\Delta y)^2}\left[c_{i,j-1}^{k}-2c_{i,j}^{k}+c_{i,j+1}^{k}\right]$$

چون $T_{i,j}^{k}=F_{i,j}^{k}(c)$، بنا بر این با قرار دادن $h=\Delta x,\ r=\Delta y\ ,\ s=\Delta t$ و به‌کار بردن سری تنزده تیلر [۱۶] داریم:

$$T_{i,j}^{k}=c_t+\frac{s}{2}c_{tt}+O(s^2)+u\left[c_y-\frac{r}{2}c_{yy}+O(r^2)\right]-D\left[c_{xx}+\frac{h^2}{12}c_{xxxx}+O(h^4)\right]-D\left[c_{yy}+\frac{r^2}{12}c_{yyyy}+O(r^4)\right]$$

و بنا بر این داریم:

$$T_{i,j}^{k}=c_t+uc_y-D(c_{xx}+c_{yy})+O(s)+O(r)+O(h^2),$$

و چون c مقدار دقیق از معادلهٔ (۱) است از این‌رو داریم:

$$T_{i,j}^{k}=O(s)+O(r)+O(h^2)$$

و وقتی $s\to 0\ ,\ r\to 0\ ,\ h\to 0$ آن‌گاه داریم که $T_{i,j}\to 0$.

بنا بر این معادلهٔ تفاضلی معرفی شده با معادلهٔ (۱) سازگار است و خطا از مرتبهٔ $O(\Delta t+\Delta y+(\Delta x)^2)$ است.

۳. بررسی پایداری

شکل ماتریسی از معادلهٔ تفاضلی معرفی شده در بخش ۴ را در نظر می‌گیریم:

$$(1+p)c_{j,k+1}=Ac_{j,k}+pc_{j-1,k+1}+q\left[c_{j-1,k}+c_{j+1,k}\right]+d \qquad (20)$$

که ماتریس A و بردارهای d و $c_{j,k+1}$ در بخش ۴ معرفی شده‌اند. حال ازمعادلهٔ (۲۰) داریم:

$$c_{j,k+1} = Bc_{j,k} + p'c_{j-1,k+1} + q'\left[c_{j-1,k} + c_{j+1,k}\right] + f \qquad (21)$$

که در آن $B = A.(1+p)^{-1}$, $p' = p.(1+p)^{-1}$, $q' = q.(1+p)^{-1}$ و $f = d.(1+p)^{-1}$.

با توجه به مفهوم پایداری [۱۳]، در اینجا یک شرط پایداری مناسب را برای معادله تفاضلی دنبال می‌کنیم. ابتدا با در نظر گرفتن یک اختلال کوچک برای $c_{j,k}$ به‌صورت $c^*_{j,k}$ داریم:

$$e_{j,k} = c_{j,k} - c^*_{j,k} \qquad (22)$$

با قرار دادن k=۰ در معادلهٔ (۲۱) داریم:

$$c_{j,1} = Bc_{j,0} + p'c_{j-1,1} + q'\left[c_{j-1,0} + c_{j+1,0}\right] + f \qquad (23)$$

با قرار دادن j=۱ در معادلهٔ (۲۳) داریم:

$$c_{1,1} = Bc_{1,0} + p'c_{0,1} + q'\left[c_{0,0} + c_{2,0}\right] + f \qquad (24)$$

برای معادلهٔ (۲۴) با توجه به رابطهٔ (۲۲) به‌دست می‌آوریم:

$$c_{1,1} - c^*_{1,1} = B\left(c_{1,0} - c^*_{1,0}\right) + p'\left(c_{0,1} - c^*_{0,1}\right) + q'\left[\left(c_{0,0} - c^*_{0,0}\right) + \left(c_{2,0} - c^*_{2,0}\right)\right] + f - f$$

و در نتیجه داریم:

$$e_{1,1} = Be_{1,0} + p'e_{0,1} + q'\left[e_{0,0} + e_{2,0}\right] \qquad (25)$$

به‌دلیل این‌که در j=۰ مقادیر c معلوم‌اند، بنا بر این برای هر k داریم:

$$e_{0,k} = 0.$$

پس برای معادلهٔ (۲۵) به‌دست می‌آوریم:

$$e_{1,1} = Be_{1,0} + q'e_{2,0}$$

حال در معادلهٔ (۲۳) قرار می دهیم j=۲ و داریم:

$$c_{2,1} = Bc_{2,0} + p'c_{1,1} + q'\left[c_{1,0} + c_{3,0}\right] + f \qquad (26)$$

و برای معادلهٔ (۲۶) با توجه به معادلهٔ (۲۲) داریم:

$$c_{2,1} - c^*_{2,1} = B\left(c_{2,0} - c^*_{2,0}\right) + p'\left(c_{1,1} - c^*_{1,1}\right) + q'\left[\left(c_{1,0} - c^*_{1,0}\right) + \left(c_{3,0} - c^*_{3,0}\right)\right] + f - f$$

و بنا بر این

$$e_{2,1} = Be_{2,0} + p'e_{1,1} + q'\left[e_{1,0} + e_{3,0}\right] = Be_{2,0} + p'Be_{1,0} + p'q'e_{2,0} + q'\left[e_{1,0} + e_{3,0}\right]$$

با استقرای ریاضی روی j داریم:

$$e_{j,1}=Be_{j,0}+p'Be_{j-1,0}+\ldots+(p')^{j-1}Be_{1,0}+p'q'[e_{j-2,0}+e_{j,0}]+\ldots+$$
$$(p')^{j-2}q'[e_{1,0}+e_{3,0}]+(p')^{j-1}q'e_{2,0}+q'\left[e_{j-1,0}+e_{j+1,0}\right]$$

بنا بر این با قرار دادن k=۱ درمعادلهٔ (۲۱) و استفاده از نتیجه استقرا خواهیم داشت:

$$e_{j,2}=Be_{j,1}+p'Be_{j-1,1}+\ldots+(p')^{j-1}Be_{1,1}+p'q'[e_{j-2,1}+e_{j,1}]+\ldots+$$
$$(p')^{j-2}q'[e_{1,1}+e_{3,1}]+(p')^{j-1}q'e_{2,1}+q'\left[e_{j-1,1}+e_{j+1,1}\right]$$

حال با در نظر گرفتن استقرا روی k داریم:

$$e_{j,k+1}=Be_{j,k}+p'Be_{j-1,k}+\ldots+(p')^{j-1}Be_{1,k}+p'q'[e_{j-2,k}+e_{j,k}]+\ldots+$$
$$(p')^{j-2}q'[e_{1,k}+e_{3,k}]+(p')^{j-1}q'e_{2,k}+q'\left[e_{j-1,k}+e_{j+1,k}\right] \tag{۲۷}$$

$e_{,k+1}$ ماتریسی بدین‌صورت با ستون‌های $e_{j,k+1}$ است:

$$e_{k+1}=\left[e_{1,k+1},e_{2,k+1},\ldots,e_{J,k+1}\right]$$

از دو طرف رابطهٔ (۲۷)، $\|.\|_1$ می‌گیریم [۱۷]. بنا بر این با توجه به خاصیت نرم داریم:

$$\left\|e_{j,k+1}\right\|_1\le\|B\|_1\left\|e_{j,k}\right\|_1+|p'|\|B\|_1\left\|e_{j-1,k}\right\|_1+\ldots+|p'|^{j-1}\|B\|_1\left\|e_{1,k}\right\|_1+|p'||q'|\left[\left\|e_{j-2,k}\right\|_1+\left\|e_{j,k}\right\|_1\right]$$
$$+\ldots+|p'|^{j-2}|q'|\left[\left\|e_{1,k}\right\|_1+\left\|e_{3,k}\right\|_1\right]+|p'|^{j-1}|q'|\left\|e_{2,k}\right\|_1+|q'|\left[\left\|e_{j-1,k}\right\|_1+\left\|e_{j+1,k}\right\|_1\right] \tag{۲۸}$$

چون برای هر ماتریس دل‌خواه M داریم:

$$\|M\|_1=\max_j\sum_i\left|M_{i,j}\right|$$

پس با توجه به این توضیح دربارهٔ نرم ماتریسی، برای (۲۸) می‌توان نوشت:

$$\left\|e_{j,k+1}\right\|_1\le\|B\|_1\sum_{n=0}^{\infty}(p')^n\|e_k\|_1+2|q'|\sum_{n=0}^{\infty}(p')^n\|e_k\|_1$$

و در نتیجه به‌دست می‌آوریم:

$$\left\|e_{j,k+1}\right\|_1\le(\|B\|_1+2|q'|)\sum_{n=0}^{\infty}(p')^n\|e_k\|_1 \tag{۲۹}$$

که در آن $\|e_k\|_1=\max\left\|e_{j,k}\right\|_1$ و بنا بر این از مانده (۲۹) هم خواهیم داشت:

$$\|e_{k+1}\|_1\le(\|B\|_1+2|q'|)\sum_{n=o}^{\infty}(p')^n\|e_k\|_1 \tag{۳۰}$$

چون $|p'|<1$، سری هندسی در (۳۰) همگرا می‌شود و داریم:

$$\|e_{k+1}\|_1\le\left(\frac{\|B\|_1+2|q'|}{1-p'}\right)\|e_k\|_1 \tag{۳۱}$$

با فرمول بازگشتی برای (۳۱) خواهیم داشت:

$$\|e_{k+1}\|_1 \le \left(\frac{\|B\|_1 + 2|q'|}{1-p'}\right)^{k+1} \|e_0\|_1$$

بنا بر این برای پایداری از این فرآیند تفاضلی این شرط باید برقرار باشد:

$$\frac{\|B\|_1 + 2|q'|}{1-p'} < 1$$

و یا به‌طور معادل باید داشته باشیم:

$$\|B\|_1 + 2|q'| + p' < 1 \qquad (۳۲)$$

بنا بر این شرط لازم و کافی برای پایداری از معادلات تفاضلی به‌دست می‌آید و مقادیر Δx , Δy , Δt در p و q باید طوری در نظر گرفته شوند که در نهایت شرط (۳۲) برقرار باشد. در بخش ۸ به‌طور مشابه این خاصیت را برای $\|.\|_2$ نشان داده‌ایم [۱۷].

نمایش معادلهٔ تفاضلی با استفاده از روش کلاسیک ضمنی لاترونن

معادلهٔ تفاضلی روش لاترونن برای حل تقریبی از معادلهٔ (۱) بدین‌صورت است [۱۸]، [۱۹]:

$$\frac{1}{\Delta t}\left(c_{i,j}^{k+1} - c_{i,j}^{k}\right) + \frac{u}{\Delta y}\left(c_{i,j}^{k+1} - c_{i,j-1}^{k+1}\right) = \frac{D}{(\Delta x)^2}\left(c_{i-1,j}^{k+1} - 2c_{i,j}^{k+1} + c_{i+1,j}^{k+1}\right) + \frac{D}{(\Delta y)^2}\left(c_{i,j-1}^{k} - 2c_{i,j}^{k} + c_{i,j+1}^{k}\right)$$

با قرار دادن $p = \frac{u\Delta t}{\Delta y}$ و $q = \frac{D\Delta t}{(\Delta x)^2} = \frac{D\Delta t}{(\Delta y)^2}$ که $\Delta x = \Delta y$ ، داریم:

$$-qc_{i-1,j}^{k+1} + (1+p+2q)c_{i,j}^{k+1} - qc_{i+1,j}^{k+1} = (1-2q)c_{i,j}^{k} + q\left[c_{i,j-1}^{k} + c_{i,j+1}^{k}\right] + pc_{i,j-1}^{k+1} \qquad (۳۳)$$

که i=۰ ,۱,...,n-۱ ، j=۱,۲,...,m و k=۰,۱,... هستند.

حال با توجه به تقریب‌های تفاضلی مختلف که برای شرط مرزی (۲) در بخش ۴ در نظر گرفته شد، برای معادله تفاضلی (۳۳)، این حالت‌ها را در نظر می‌گیریم:

(i) در معادلهٔ (۳۳) قرار می دهیم i=۰ و با استفاده از رابطهٔ (۱۳) داریم:

$$(1+p+2q)c_{0,j}^{k+1} - 2qc_{1,j}^{k+1} = (1-2q)c_{0,j}^{k} + q\left[c_{0,j-1}^{k} + c_{0,j+1}^{k}\right] + pc_{0,j-1}^{k+1} \qquad (۳۴)$$

حال با قرار دادن i=n-۱ در معادلهٔ (۳۳) و استفاده از رابطهٔ (۸) داریم:

$$-qc_{n-2,j}^{k+1} + (1+p+2q)c_{n-1,j}^{k+1} = (1-2q)c_{n-1,j}^{k} + q\left[c_{n-1,j-1}^{k} + c_{n-1,j+1}^{k}\right] + pc_{n-1,j-1}^{k+1} + q \qquad (۳۵)$$

اکنون با استفاده از معادلات (۳۳)، (۳۴) و (۳۵) داریم:

$$Ac_{j,k+1} = (1-2q)c_{j,k} + q\left[c_{j-1,k} + c_{j+1,k}\right] + pc_{j-1,k+1} + d$$

که A ماتریس مربعی سه قطری از مرتبهٔ n است و بدین‌صورت معرفی می شود:

$$A=\begin{pmatrix} ۱+p+۲q & -۲q & & ۰ & \\ -q & ۱+p+۲q & -q & & \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ ۰ & -q & ۱+p+۲q & -q & \\ & & -q & ۱+p+۲q \end{pmatrix}$$

d و $c_{j,k+۱}$ بردارهای ستونی از مرتبهٔ n هستند که بدین‌صورت مشخص می‌شوند:

$$d=[۰,۰,....,۰,q]^T,\ c_{j,k+۱}=\left[c_{۰,j}^{k+۱},c_{۱,j}^{k+۱},...,c_{n-۱,j}^{k+۱}\right]^T.$$

(ii) در معادلهٔ (۳۳) قرار می‌دهیم i=۰ و با استفاده از رابطهٔ (۱۶) داریم:

$$(۱+p+۲q)c_{۰,j}^{k+۱}-qc_{۱,j}^{k+۱}=(۱-۲q)c_{۰,j}^{k}+q\left[c_{۰,j-۱}^{k}+c_{۰,j+۱}^{k}\right]+pc_{۰,j-۱}^{k+۱} \qquad (۳۶)$$

و به‌طور مشابه رابطهٔ (۳۵) را برای i=n-۱ داریم. اکنون با استفاده از معادلات (۳۳)، (۳۵) و(۳۶) داریم:

$$Ac_{j,k+۱}=(۱-۲q)c_{j,k}+q\left[c_{j-۱,k}+c_{j+۱,k}\right]+pc_{j-۱,k+۱}+d$$

و ماتریس A هم با تبدیل ۲q به q در سطر اول از ماتریس A در (i) به‌دست می‌آید.

(iii) با قرار دادن i=۱ در معادلهٔ (۳۳) و استفاده از رابطهٔ (۱۸) داریم:

$$(۱+p+q)c_{۱,j}^{k+۱}-qc_{۲,j}^{k+۱}=(۱-۲q)c_{۱,j}^{k}+q\left[c_{۱,j-۱}^{k}+c_{۱,j+۱}^{k}\right]+pc_{۱,j-۱}^{k+۱} \qquad (۳۷)$$

معادلات (۳۳)، (۳۵) و (۳۷) در شکل ماتریسی بدین‌صورت نوشته می‌شوند:

$$Ac_{j,k+۱}=(۱-۲q)c_{j,k}+q\left[c_{j-۱,k}+c_{j+۱,k}\right]+pc_{j-۱,k+۱}+d$$

که ماتریس A همان ماتریس A در (ii) است با این تفاوت که از مرتبهٔ n-۱ است. بردارهای d و $c_{j,k+۱}$ هم بردارهای ستونی از همان مرتبه‌اند که در (ii) معرفی شده‌اند.

در این بخش بعد از حل دستگاه و به‌دست آوردن مقادیر $c_{n-۱,j}^{k+۱},...,c_{۲,j}^{k+۱},c_{۱,j}^{k+۱}$ قرار می‌دهیم: $c_{۰,j}^{k+۱}=c_{۱,j}^{k+۱}$.

۱. روش حل عددی

در هر یک از سه حالت (i)، (ii) و (iii) که در بخش ۵ مطرح شد، دستگاهی از معادلات جبری خطی بدین‌صورت به‌دست آمده است:

$$Ac_{j,k+۱}=(۱-۲q)c_{j,k}+q\left[c_{j-۱.k}+c_{j+۱,k}\right]+pc_{j-۱,k+۱}+d \qquad (۳۸)$$

چنین دستگاهی برای حل نیازمند تکنیک عددی است. بنا بر این می‌توان این دستگاه را به‌طور مستقیم با استفاده از روش حذفی گوس برای یک زمان داده شده حل کرد. در حالت کلی می‌توان این دستگاه را با استفاده از روش‌های تکرار نقطه‌ای [۲۰]، مانند روش گوس-سایدل و روش فوق تخفیف متوالی حل کرد. این روش‌ها دقت زیادی را برای مقدار c در هر نقطه شبکه ایجاب می‌کنند. این دقت مربوط به مقدار $c_{i,j}^{k+۱}$ است که در معادلهٔ استفاده شده مجهول است.

همگرایی سریع‌تر با روش‌های تکرار سطری به‌دست می‌آید [۲۱]. یک روش تکرار سطری، تکرارهای متوالی را در شکل ضمنی تولید می‌کند و به‌طور کلی به‌عنوان مجموعه‌ای از معادلات جبری ساده به‌صورت سه قطری، استفاده از الگوریتم توماس را اجازه می‌دهد [۲۲]. در این‌جا روشی تکرار سطری برای حل دستگاهی از معادلات جبری (۳۸) به‌کار رفته است و در آن از صورت سه قطری مجموعه معادلات تولید شده در تکرارهای متوالی استفاده می شود. در روش تکرار سطری برای به‌دست آوردن مقادیر c از معادلهٔ (۳۸) در سطح زمانی (k+۱)ام، از تکرارهای بعدی مقادیر c در نقاط سطری $y=y_j$ استفاده می‌شود که با افزایش j برای j=۱,۲,...,n، مقادیر بعدی c به‌دست می‌آیند.

بنا بر این در آغاز در معادلهٔ (۳۸)، $k=۰$ قرار می‌دهیم و به‌دست می‌آوریم:

$$Ac_{j,۱} = (۱-۲q)c_{j,۰} + q\left[c_{j-۱,۰} + c_{j+۱,۰}\right] + pc_{j-۱,۱} + d \qquad (۳۹)$$

با قرار دادن j=۱ در معادلهٔ (۳۹) داریم:

$$Ac_{۱,۱} = (۱-۲q)c_{۱,۰} + q\left[c_{۰,۰} + c_{۲,۰}\right] + pc_{۰,۱} + d$$

مقادیر $c_{۰,۰}$، $c_{۱,۰}$، $c_{۲,۰}$ و $c_{۰,۱}$ با توجه به شرایط اولیه و مرزی که قبلاً اشاره شد، معلوم‌اند و فقط مقادیر $c_{۱,۱}$ مجهول‌اند. در حقیقت دستگاهی از n معادله و m مجهول (که m=n) داریم و ماتریس ضرایب A یک ماتریس سه قطری است. با حل این دستگاه با الگوریتم توماس، مقادیر بردار $c_{۱,۱}$ به‌دست می‌آیند. حال در معادلهٔ (۳۹)، j=۲ قرار می‌دهیم و بنا بر این داریم:

$$Ac_{۲,۱} = (۱-۲q)c_{۲,۰} + q\left[c_{۱,۰} + c_{۳,۰}\right] + pc_{۱,۱} + d$$

بردارهای $c_{۱,۰}$، $c_{۲,۰}$ و $c_{۳,۰}$ با توجه به شرط اولیه به‌دست می‌آیند و مقادیر $c_{۱,۱}$ نیز در بالا محاسبه شده‌اند. بنا بر این باز هم یک دستگاه از n معادله و n مجهول با ماتریس ضرایب A داریم که با حل آن، مقادیر $c_{۲,۱}$ به‌دست می‌آیند. با ادامه این روش حل، مقادیر $c_{j,۱}$ برای jهای مختلف به‌دست می‌آیند. این روند را تا j=n ادامه می‌دهیم. در این‌صورت مقادیر c در زمان $t=۱.\Delta t$ در نقاط (x_i, y_j) برای i=۰,۱,...,n-۱ و j=۱,۲,...,n به‌دست می‌آیند. حال در معادلهٔ (۳۸)، k=۱ قرار می‌دهیم و داریم:

$$Ac_{j,۲} = (۱-۲q)c_{j,۱} + q\left[c_{j-۱,۱} + c_{j+۱,۱}\right] + pc_{j-۱,۲} + d \qquad (۴۰)$$

با قرار دادن j=۱ در معادلهٔ (۴۰) داریم:

$$Ac_{۱,۲} = (۱-۲q)c_{۱,۱} + q\left[c_{۰,۱} + c_{۲,۱}\right] + pc_{۰,۲} + d \qquad (۴۱)$$

مقادیر $c_{۱,۱}$ و $c_{۲,۱}$ از بالا به‌دست آمده‌اند و مقادیر $c_{۰,۱}$ و $c_{۰,۲}$ هم با توجه به شرایط مرزی به‌دست می‌آیند. بنا بر این با حل دستگاه سه قطری، مقادیر بردار $c_{۱,۲}$ مشخص می‌شوند.

حال در معادلهٔ (۴۰)، j=۲ قرار می‌دهیم و بنا بر این داریم:

$$Ac_{۲,۲} = (۱-۲q)c_{۲,۱} + q\left[c_{۱,۱} + c_{۳,۱}\right] + pc_{۱,۲} + d \qquad (۴۲)$$

در طرف راست معادلهٔ (۴۲)، همهٔ مقادیر معلوم‌اند و با حل دستگاه سه قطری، مقادیر $c_{۲,۲}$ به‌دست می‌آیند. در نهایت مقادیر c در زمان $t = ۲.\Delta t$ در نقاط (x_i, y_j) برای $i=۰,۱,...,n$ و $j=۱,۲,...,n$ به‌دست می‌آیند.

اگر فرآیند بالا را با افزایش k برای $j=۱,۲,...,n$ ادامه دهیم آن‌گاه در هر سطح زمانی با حل یک دستگاه سه قطری از معادلات خطی، می‌توان مقادیر $c_{i,j}^{k+۱}$ را محاسبه کرد. یعنی یک‌بار همهٔ مقادیر c در یک سطح زمانی محاسبه شده‌اند و سپس محاسبات برای سطح‌های زمانی بعدی تکرار شده است. این فرآیند ادامه می‌یابد تا زمانی که:

$$\sum_{i=۰}^{n}\sum_{j=۰}^{n}\left|c_{i,j}^{k+۱} - c_{i.j}^{k}\right| < \varepsilon$$

که ε خطای مجاز است.

نتایج مربوط به معادلات تفاضلی به‌دست آمده از بخش ۵ در حالت (ii)، در جدول ۳ نشان داده شده است.

۲. بررسی خطای برشی و سازگاری

معادلهٔ تفاضلی مربوط به معادلهٔ (۱) در بخش ۵ را در نظر می‌گیریم:

$$F_{i,j}^{k}(c) = \frac{۱}{\Delta t}(c_{i.j}^{k+۱} - c_{i,j}^{k}) + \frac{u}{\Delta y}(c_{i.j}^{k+۱} - c_{i,j-۱}^{k+۱}) - \frac{D}{(\Delta x)^{۲}}\left[c_{i-۱.j}^{k+۱} - ۲c_{i,j}^{k+۱} + c_{i+۱,j}^{k+۱}\right]$$
$$-\frac{D}{(\Delta y)^{۲}}\left[c_{i.j-۱}^{k} - ۲c_{i,j}^{k} + c_{i,j+۱}^{k}\right]$$

چون $T_{i,j}^{k} = F_{i,j}^{k}(c)$، بنا بر این با قرار دادن $h = \Delta x, r = \Delta y, s = \Delta t$ و به‌کار بردن سری تنزده تیلر [۱۶] داریم:

$$T_{i,j}^{k} = c_t + \frac{s}{۲}c_{tt} + O(s^{۲}) + u\left[c_y - \frac{r}{۲}c_{yy} + O(r^{۲})\right] - D\left[c_{xx} + \frac{h^{۲}}{۱۲}c_{xxxx} + O(h^{۴})\right]$$
$$-D\left[c_{yy} + \frac{r^{۲}}{۱۲}c_{yyyy} + O(r^{۴})\right]$$

و بنا بر این داریم:

$$T_{i,j}^{k} = c_t + uc_y - Dc_{xx} + O(s) + O(r) + O(h^{۲})$$

چون c مقدار دقیق معادلهٔ (۱) است، از این رو داریم:

$$T_{i,j}^{k} = O(s) + O(r) + O(h^{۲})$$

و وقتی $h \to ۰, r \to ۰, s \to ۰$ ، آن‌گاه داریم که $T_{i,j} \to ۰$.

بنا بر این معادلهٔ تفاضلی معرفی شده با معادلهٔ دیفرانسیل (۱) سازگار است و خطا از مرتبهٔ $O(\Delta t + \Delta y + (\Delta x)^{۲})$ است.

۳. بررسی پایداری

شکل ماتریسی از معادلهٔ تفاضلی معرفی شده در بخش ۵، (i) را در نظر می‌گیریم:

$$Ac_{j,k+1}=(1-2q)c_{j,k}+q\left[c_{j-1,k}+c_{j+1,k}\right]+pc_{j-1,k+1}+d \qquad (43)$$

که ماتریس A و بردارهای d و $c_{j,k+1}$ در بخش ۵، (i) معرفی شده‌اند. حال از (۴۳) داریم:

$$c_{j,k+1}=Bc_{j,k}+C\left[c_{j-1,k}+c_{j+1,k}\right]+Dc_{j-1,k+1}+f \qquad (44)$$

که $B=(1-2q).A^{-1}, C=q.A^{-1}, D=p.A^{-1}$ و $f=d.A^{-1}$ هستند.

با توجه به بخش ۳.۴ داریم:

$$e_{j,k}=c_{j,k}-c^{*}_{j,k} \qquad (45)$$

در مرتبهٔ مشابهی که در بخش ۳.۴ دیدیم، داریم:

$$\begin{aligned}e_{j,k+1}&=Be_{j,k}+C\left[e_{j-1,k}+e_{j+1,k}\right]+DBe_{j-1,k}+DC\left[e_{j-2,k}+e_{j,k}\right]+D^{2}Be_{j-2,k}\\&+D^{2}C\left[e_{j-3,k}+e_{j-1,k}\right]+....+D^{j-1}Be_{1,k}+D^{j-1}C\left[e_{0,k}+e_{2,k}\right]+D^{j}e_{0,k+1}\end{aligned} \qquad (46)$$

با فرض این‌که $e_{j,k+1}$ یک ماتریس با ستون‌های $e_{j,k+1}$ باشد و با به‌کار بردن خاصیت نرم‌ها برای (۴۶) داریم:

(47)

$$\begin{aligned}\|e_{j,k+1}\|_1&\le\|B\|_1\|e_{j,k}\|_1+\|C\|_1\left[\|e_{j-1,k}\|_1+\|e_{j+1,k}\|_1\right]+\|D\|_1\|B\|_1\|e_{j-1,k}\|_1+\|D\|_1\|C\|_1\left[\|e_{j-2,k}\|_1+\|e_{j,k}\|_1\right]\\&+\|D\|_1^{2}\|B\|_1\|e_{j-2,k}\|_1+\|D\|_1^{2}\|C\|_1\left[\|e_{j-3,k}\|_1+\|e_{j-1,k}\|_1\right]\\&+\ldots+\|D\|_1^{j-1}\|B\|_1\|e_{1,k}\|_1+\|D\|_1^{j-1}\|C\|_1\left[\|e_{0,k}\|_1+\|e_{2,k}\|_1\right]+\|D\|_1^{j}\|e_{0,k+1}\|_1\end{aligned}$$

حال اگر قرار دهیم $\|e_k\|_1=\max\|e_{j,k}\|_1$. با توجه به شرط مرزی (۴) داریم: $\|e_{0,k}\|_1=0$، بنا بر این از (۴۷) به‌دست می‌آوریم:

$$\|e_{k+1}\|_1\le\|B\|_1\sum_{n=0}^{\infty}\|D\|_1^{n}\|e_k\|_1+2\|C\|_1\sum_{n=0}^{\infty}\|D\|_1^{n}\|e_k\|_1$$

و در نتیجه داریم:

$$\|e_{k+1}\|_1\le(\|B\|_1+2\|C\|_1)\sum_{n=0}^{\infty}\|D\|_1^{n}\|e_k\|_1 \qquad (48)$$

حال اگر $\|D\|_1<1$، آن‌گاه سری هندسی (۴۸) همگراست و داریم:

$$\|e_{k+1}\|_1\le\left(\frac{\|B\|_1+2\|C\|_1}{1-\|D\|_1}\right)\|e_k\|_1$$

و با فرآیند بازگشتی داریم:

$$\|e_{k+1}\|_1\le\left(\frac{\|B\|_1+2\|C\|_1}{1-\|D\|_1}\right)^{k+1}\|e_0\|_1$$

بنا بر این شرط لازم و کافی برای پایداری دستگاه تفاضلی (۴۳) اینست که $\frac{\|B\|_{1}+2\|C\|_{1}}{1-\|D\|_{1}}<1$ و در نتیجه شرط لازم و کافی همگرایی اینست که

$$\|B\|_{1}+2\|C\|_{1}+\|D\|_{1}<1. \qquad (49)$$

تحقیق عددی

در این پژوهش، یک مدل ریاضی نامانا برای فرآیند انتقال جرم اکسیژن در بسترهای مویرگ انسان با افزودن جملهٔ پخش محوری ارائه شده، و به دستورالعمل حل عددی مسئله به‌روش تفاضلات متناهی پرداختیم. در به‌کار بردن روش‌ها، سه حالت برای تقریب شرط مرزی مشتق به‌روش تفاضلی در نظر گرفته شد. در ابتدا شرط مرزی مشتق به روش تفاضلات متناهی مرکزی و سپس به روش تفاضلات متناهی پس‌رو و در حالت سوم هم به‌روش تفاضلات متناهی پیش‌رو تقریب زده شد. در اولین روش تفاضلی، روش تفاضلی صریح استانده به‌کار رفته است و نتایج عددی به‌دست آمده از این روش در حالت‌های (ii) و (iii) تقریب شرط مرزی مشتق بیان شده، به‌ترتیب در جدول‌های ۱ و ۲ آمده است. این روش در این حالت‌ها، دارای سازگاری و پایداری نسبت به مسئله اصلی است.

روش تفاضلی بعدی که استفاده شده است روش ضمنی لاترونن است که نتایج حل از این روش در حالت (ii) در جدول ۳ آمده است. نشان داده شده است که این روش نیز دارای سازگاری و پایداری نسبت به مسئله اصلی است. در تمامی این روش‌های تفاضلی مقادیر $\Delta t=0/005, \Delta y=0/1, \Delta x=0/1$ در نظر گرفته شده است.

نتیجه

در این مقاله، یک مدل ریاضی نامانا برای بررسی فرآیند انتقال اکسیژن در بسترهای مویرگ انسان ارائه شد که در آن مویرگ یک شبکه دو بعدی در شکل بدون بعد فرض شده است. با افزودن جملهٔ پخش محوری به این مدل ریاضی، به شکلی از یک معادلهٔ دیفرانسیل پاره‌ای با شرایط اولیه و مرزی می‌رسیم که به‌طور عددی به‌روش تفاضلات متناهی حل شده است. نتایج به‌دست آمده نشان می‌دهند که معادلات تفاضلی مختلفی که در بخش‌های ۴ و ۵ تشریح شدند، همگی دارای دقت یک‌سانی هستند که برابر $O(\Delta t+\Delta y+(\Delta x)^{2})$ است. برای شرایط پایداری، دیدیم که معادلات نمایش داده شده برای هر دو روش به‌کار رفته پایدارند و نتایج به‌خوبی همگرا هستند. بدین سبب برای پایداری مشهود $\Delta t=0/005$ منظور شده است.

فرمول‌بندی تفاضلات متناهی به دستگاهی از معادلات جبری منجر می‌شود که به تکنیکی برای حل این دستگاه نیاز داریم. این دستگاه دارای ماتریس ضرایب سه قطری است. چنین دستگاهی را با روش‌های تکرار نقطه‌ای می‌توان حل کرد ولی همگرایی از روش‌های تکرار نقطه‌ای خیلی کند است.

برای رسیدن به همگرایی سریع‌تر از روش‌های تکرار سطری استفاده می‌کنیم. این روش‌ها با استفاده از ماتریس ضرایب سه قطری و الگوریتم توماس به جواب می‌رسند. با استفاده از این تکنیک، دستگاه معادلات در هر سطر برای یک زمان ثابت دارای یک مجهول c خواهد بود که در رایانه ذخیره می‌شود. معادل با قضیه لاکس، اثبات‌های ریاضی از تکنیک‌های حل عددی به‌دست می‌آیند. بنا بر این سازگاری و پایداری این معادلات بررسی شد.

محاسبات انجام شده برای ۱۰ فاصلهٔ زمانی با $\Delta x = ۰/۱$ در جهت مثبت x و $\Delta y = ۰/۱$ در جهت مثبت y و گام زمانی مناسب در جهت t هستند. برنامه‌ها حتی برای گام‌های زمانی کوچک‌تر هم آزمایش شده‌اند.

تکنیک شرح داده شده در این‌جا می‌تواند برای حل هر دستگاه خطی از معادلات دیفرانسیل پاره‌ای سهموی همرفت-نفوذ استفاده شود. به‌علاوه دیده شده است که این تکنیک در حل معادلات شامل جمله پخش محوری نیز به‌خوبی جواب می‌دهد.

بررسی خطای معادله شبیه‌سازی شده با استفاده از نرم‌های $L_۱$, $L_۲$, L_∞

نتایج عددی به‌دست آمده در این‌جا، با توجه به فرضیه‌های u=۰/۴، D=۰/۲۴، $\Delta t = ۰/۰۰۵, \Delta y = ۰/۱, \Delta x = ۰/۱$ به‌دست آمده‌اند. با این مقادیر اولیه داریم: p=۰/۰۲ و q=۰/۱۲.

- در بررسی پایداری روش صریح استانده داریم:

$$\|B\|_۱ = ۰/۷۴۵۰۹۸$$
$$\|B\|_۲ = ۰/۷۴۲۴۷$$
$$\|B\|_\infty = ۰/۷۴۵۰۹۸$$

بنا بر این از نتایج مذکور، با توجه به شرط پایداری (۳۲) داریم:

$$\|B\|_۱ + ۲|q'| + p' = ۰/۹۹۹۹۹۹۹۶ < ۱$$
$$\|B\|_۲ + ۲|q'| + p' = ۰/۹۹۷۳۷۲ < ۱$$
$$\|B\|_\infty + ۲|q'| + p' = ۰/۹۹۹۹۹۹۹۶ < ۱$$

تذکر: این نتایج مربوط به حالت ۴،(ii) است و برای حالت ۴، (iii) نیز به‌سادگی ثابت می‌شود.

- در روش کلاسیک ضمنی لاترونن با توجه به شرط پایداری (۴۹) داریم:

$$\|B\|_۱ = ۰/۷۴۵۰۹۸ \;\; ; \;\; \|C\|_۱ = ۰/۱۱۷۶۴۷ \;\; ; \;\; \|D\|_۱ = ۰/۰۱۹۶۰۷۸$$
$$\|B\|_۲ = ۰/۷۴۳۱۴۵ \;\; ; \;\; \|C\|_۲ = ۰/۱۱۷۳۳۸ \;\; ; \;\; \|D\|_۲ = ۰/۰۱۹۵۵۶۴$$
$$\|B\|_\infty = ۰/۷۴۵۰۹۸ \;\; ; \;\; \|C\|_\infty = ۰/۱۱۷۶۴۷ \;\; ; \;\; \|D\|_\infty = ۰/۰۱۹۶۰۷۸$$

با توجه به نتایج مذکور داریم:

$$\|B\|_۱ + ۲\|C\|_۱ + \|D\|_۱ = ۰/۹۹۹۹۹۹۸ < ۱,$$
$$\|B\|_۲ + ۲\|C\|_۲ + \|D\|_۲ = ۰/۹۹۷۳۷۷۴ < ۱,$$
$$\|B\|_\infty + ۲\|C\|_\infty + \|D\|_\infty = ۰/۹۹۹۹۹۹۸ < ۱.$$

جدول۱. $t=$ ۱/۰۱۵; $\varepsilon=$ ۰/۰۰۱; $k=$ ۲۰۳

x\y	۰/۰	۰/۱	۰/۲	۰/۳	۰/۴	۰/۵
۰/۰	۰/۰۰۰۰۰۰۰	۰/۰۰۷۹۱۷۱۹	۰/۰۱۶۱۲۸۴	۰/۰۲۵۰۸۴۶	۰/۰۳۵۵۴۰۴	۰/۰۴۸۷۰۲۴
۰/۱	۰/۰۰۰۰۰۰۰	۰/۰۰۸۹۹۶۳۷	۰/۰۱۸۱۷۷۵	۰/۰۲۷۹۲۱۷	۰/۰۳۸۹۵۹۶	۰/۰۵۲۵۱۳۱
۰/۲	۰/۰۰۰۰۰۰۰	۰/۰۱۱۴۴۲۹	۰/۰۲۲۷۹۷۲	۰/۳۴۲۷۱۷	۰/۰۴۶۵۵۵۱	۰/۰۶۰۹۱۹۵
۰/۳	۰/۰۰۰۰۰۰۰	۰/۰۱۵۹۳۵۸	۰/۰۳۱۱۹۶۶	۰/۰۴۵۶۷۲	۰/۰۶۰۰۱۹۹	۰/۰۷۵۶۵۴۵
۰/۴	۰/۰۰۰۰۰۰۰	۰/۰۲۳۸۰۷۳	۰/۰۴۵۶۷۵۲	۰/۰۶۴۹۵۰۵	۰/۰۸۲۳۸۱	۰/۰۹۹۷۵۳
۰/۵	۰/۰۰۰۰۰۰۰	۰/۰۳۷۶۲۹۶	۰/۰۷۰۴۴۵۴	۰/۰۹۷۰۲۵۶	۰/۱۱۸۶۹۵	۰/۱۳۸۱۵۱
۰/۶	۰/۰۰۰۰۰۰۰	۰/۰۶۲۵۷۶	۰/۱۱۳۲۶۸	۰/۱۵۰۲۹۴	۰/۱۷۷۱۵۱	۰/۱۹۸۶۰۶
۰/۷	۰/۰۰۰۰۰۰۰	۰/۱۰۹۸۶۸	۰/۱۸۸۶۹۹	۰/۲۳۸۸۷۵	۰/۲۷۰۶۵۹	۰/۲۹۲۹۹۹
۰/۸	۰/۰۰۰۰۰۰۰	۰/۲۰۶۵۳۴	۰/۳۲۴۲۸۳	۰/۳۸۵۷۳۷	۰/۴۱۸۷۹۷	۰/۴۳۹۰۶۷
۰/۹	۰/۰۰۰۰۰۰۰	۰/۴۲۶۴۲۵	۰/۵۷۰۲۴۶	۰/۶۲۵۳۳۲	۰/۶۴۹۵۹۳	۰/۶۶۲۵۴۱
۱/۰	۰/۰۰۰۰۰۰۰	۱/۰۰۰۰۰۰۰	۱/۰۰۰۰۰۰۰	۱/۰۰۰۰۰۰۰	۱/۰۰۰۰۰۰۰	۱/۰۰۰۰۰۰۰

x\y	۰/۶	۰/۷	۰/۸	۰/۹	۱/۰
۰/۰	۰/۰۶۶۴۱۴۲	۰/۰۹۱۴۲۵۹	۰/۱۲۷۸۰۹	۰/۱۸۱۵۹۲	۰/۲۶۱۷۳۴
۰/۱	۰/۰۷۰۴۶۲	۰/۰۹۵۵۹۹۸	۰/۱۳۲۰۳۸	۰/۱۸۵۸۴	۰/۲۶۵۹۸۶
۰/۲	۰/۰۷۹۳۳۸۵	۰/۱۰۴۷۰۸	۰/۱۴۱۱۲۳۴	۰/۱۹۵۰۵۳	۰/۲۷۵۱۹۸
۰/۳	۰/۰۹۴۷۵۱۱	۰/۱۲۰۴۰۲	۰/۱۵۶۹۸۴	۰/۲۱۰۷۷۲	۰/۲۹۰۸۹۴
۰/۴	۰/۱۱۹۶۴۹	۰/۱۴۵۵۰۷	۰/۱۸۱۹۸۴	۰/۲۳۵۵۸۸	۰/۳۱۵۶۲۴
۰/۵	۰/۱۵۸۷۵۱	۰/۱۸۴۴۹۴	۰/۲۲۰۴۵۶	۰/۲۷۳۵۱۴	۰/۳۵۳۳۱
۰/۶	۰/۲۱۹۳۷	۰/۲۴۴۲۳۳	۰/۲۷۸۸۱	۰/۳۳۰۵۳۳	۰/۴۰۹۷۲
۰/۷	۰/۳۱۲۶۱۸	۰/۳۳۵۱۴۷	۰/۳۶۶۶۸۳	۰/۴۱۵۳۸۱	۰/۴۹۲۹۹۹
۰/۸	۰/۴۵۵۱۸۹	۰/۴۷۳۰۵۸	۰/۴۹۸۶۶۳	۰/۵۴۰۷۰۱	۰/۶۱۳۸۴۱
۰/۹	۰/۶۷۱۹۶۶	۰/۶۸۲۱۷۵	۰/۶۹۷۴۲۴	۰/۷۲۵۱۴۸	۰/۷۸۳۳۷۹
۱/۰	۱/۰۰۰۰۰۰۰	۱/۰۰۰۰۰۰۰	۱/۰۰۰۰۰۰۰	۱/۰۰۰۰۰۰۰	۱/۰۰۰۰۰۰۰

جدول ۲. $t=$ ۱/۰۲۵; $\varepsilon=$ ۰/۰۰۱; $k=$ ۲۰۵

x\y	۰/۰	۰/۱	۰/۲	۰/۳	۰/۴	۰/۵
۰/۰	۰/۰۰۰۰۰۰۰	۰/۰۱۰۷۵۱۷	۰/۰۲۱۵۶۱۱	۰/۰۳۲۷۱۰۵	۰/۰۴۴۸۸۱۱	۰/۰۵۹۲۹
۰/۱	۰/۰۰۰۰۰۰۰	۰/۰۱۰۷۵۱۷	۰/۰۲۱۵۶۱۱	۰/۰۳۲۷۱۰۵	۰/۰۴۴۸۸۱۱	۰/۰۵۹۲۹
۰/۲	۰/۰۰۰۰۰۰۰	۰/۰۱۲۵۳۷۷	۰/۰۲۴۹۱۶۹	۰/۰۳۷۲۹۱۲	۰/۰۵۰۳۱۷۸	۰/۰۶۵۲۶۰۵
۰/۳	۰/۰۰۰۰۰۰۰	۰/۰۱۶۶۲۲۱	۰/۰۳۲۵۳۰۱	۰/۰۴۷۵۸۱۵	۰/۰۶۲۴۱۴۴	۰/۰۷۸۴۳۵۶
۰/۴	۰/۰۰۰۰۰۰۰	۰/۰۲۴۲۳۸۸	۰/۰۴۶۵۱۵۹	۰/۰۶۶۱۵۹۵	۰/۰۸۳۹۰۴۹	۰/۱۰۱۵۳۳
۰/۵	۰/۰۰۰۰۰۰۰	۰/۰۳۷۹۰۰۸	۰/۰۷۰۹۷۴۹	۰/۰۹۷۷۸۹۷	۰/۱۱۹۶۶۳	۰/۱۳۹۲۸۶
۰/۶	۰/۰۰۰۰۰۰۰	۰/۰۶۲۷۴۵۲	۰/۱۱۳۵۹۹	۰/۱۵۰۷۷۳	۰/۱۷۷۷۵۹	۰/۱۹۹۳۲۲
۰/۷	۰/۰۰۰۰۰۰۰	۰/۱۰۹۹۷۱	۰/۱۸۸۹۰۱	۰/۲۳۹۱۶۸	۰/۲۷۱۰۲۸	۰/۲۹۳۴۴
۰/۸	۰/۰۰۰۰۰۰۰	۰/۲۰۶۵۹۳	۰/۳۲۴۳۹۹	۰/۳۸۵۹۰۴	۰/۴۱۹۰۱	۰/۴۳۹۳۲
۰/۹	۰/۰۰۰۰۰۰۰	۰/۴۲۶۴۵۲	۰/۵۷۰۲۹۸	۰/۶۲۵۴۰۸	۰/۶۴۹۶۹	۰/۶۶۲۶۵۶
۱/۰	۰/۰۰۰۰۰۰۰	۱/۰۰۰۰۰۰۰	۱/۰۰۰۰۰۰۰	۱/۰۰۰۰۰۰۰	۱/۰۰۰۰۰۰۰	۱/۰۰۰۰۰۰۰

x\y	۰/۶	۰/۷	۰/۸	۰/۹	۱/۰
۰/۰	۰/۰۷۷۸۴۴۵	۰/۱۰۳۳۸۲	۰/۱۴۰۰۶۳	۰/۱۹۳۹۹۱	۰/۲۷۴۱۷۵
۰/۱	۰/۰۷۷۸۴۴۵	۰/۱۰۳۳۸۲	۰/۱۴۰۰۶۳	۰/۱۹۳۹۹۱	۰/۲۷۴۱۷۵
۰/۲	۰/۰۸۴۱۰۳۸	۰/۱۰۹۷۶۵	۰/۱۴۶۴۷۵	۰/۲۰۰۳۹۵	۰/۲۸۰۵۷۲
۰/۳	۰/۰۹۷۸۲۳۸	۰/۱۲۳۶۸۲	۰/۱۶۰۳۹۹	۰/۲۱۴۲۶۲	۰/۲۹۴۴۰۸
۰/۴	۰/۱۲۱۶۲۶	۰/۱۴۷۶۲۸	۰/۱۸۴۲۰۱	۰/۲۳۷۸۵۹	۰/۳۱۷۹۱۲
۰/۵	۰/۱۶۰۰۱۸	۰/۱۸۵۸۵۸	۰/۲۲۱۸۸۶	۰/۲۷۴۹۸۲	۰/۳۵۴۷۹
۰/۶	۰/۲۲۰۱۷۲	۰/۲۴۵۱	۰/۲۷۹۷۲۱	۰/۳۳۱۴۷	۰/۴۱۰۶۶۶
۰/۷	۰/۳۱۳۱۱۳	۰/۳۳۵۶۸۴	۰/۳۶۷۲۴۹	۰/۴۱۵۹۶۴	۰/۴۹۳۵۸۶
۰/۸	۰/۴۵۵۴۷۳	۰/۴۷۳۳۶۷	۰/۴۹۸۹۸۹	۰/۵۴۱۰۳۷	۰/۶۱۴۱۸
۰/۹	۰/۶۷۲۰۹۶	۰/۶۸۲۳۱۶	۰/۶۹۷۵۷۳	۰/۷۲۵۳۰۱	۰/۷۸۳۵۳۴
۱/۰	۱/۰۰۰۰۰۰۰	۱/۰۰۰۰۰۰۰	۱/۰۰۰۰۰۰۰	۱/۰۰۰۰۰۰۰	۱/۰۰۰۰۰۰۰

جدول ۳. $t=۰/۷۷;\ \varepsilon=۰/۰۰۱;\ k=۱۵۴$

x\y	۰/۰	۰/۱	۰/۲	۰/۳	۰/۴	۰/۵
۰/۰	۰/۰۰۰۰۰۰۰	۰/۰۲۴۷۹۴	۰/۰۵۳۱۲۳۷	۰/۰۸۵۰۴۶	۰/۱۲۰۸۸۹	۰/۱۶۱۳۹۷
۰/۱	۰/۰۰۰۰۰۰۰	۰/۰۲۷۰۷۹۲	۰/۰۵۷۷۹۸۹	۰/۰۹۱۹۹۴۱	۰/۱۲۹۸۲۴	۰/۱۷۱۹۴۱
۰/۲	۰/۰۰۰۰۰۰۰	۰/۰۳۱۹۱۵۳	۰/۰۶۷۶۴۲۹	۰/۱۰۶۵۲	۰/۱۴۸۳۵۶	۰/۱۹۳۶۳۴
۰/۳	۰/۰۰۰۰۰۰۰	۰/۰۳۹۹۱۰۹	۰/۰۸۳۷۶۱۹	۰/۱۲۹۹۹۶	۰/۱۷۷۸۷۷	۰/۲۲۷۷۰۵
۰/۴	۰/۰۰۰۰۰۰۰	۰/۰۵۲۲۲۱۱	۰/۱۰۸۱۷۱	۰/۱۶۴۷۹۳	۰/۲۲۰۶۶۲	۰/۲۷۶۰۳۴
۰/۵	۰/۰۰۰۰۰۰۰	۰/۰۷۱۰۲۳۲	۰/۱۴۴۴۱۶	۰/۲۱۴۷۶	۰/۲۸۰۰۹۴	۰/۳۴۱۱۶۴
۰/۶	۰/۰۰۰۰۰۰۰	۰/۱۰۰۶۷۸	۰/۱۹۸۸۵۲	۰/۲۸۶۰۰۵	۰/۳۶۰۹۲۲	۰/۴۲۶۲۰۸
۰/۷	۰/۰۰۰۰۰۰۰	۰/۱۵۰۸۱۸	۰/۲۸۳۱۹۳	۰/۳۸۷۹۵۳	۰/۴۶۹۲۷۲	۰/۵۳۴۴۲۵
۰/۸	۰/۰۰۰۰۰۰۰	۰/۲۴۵۵۰۱	۰/۴۱۹۲۲۷	۰/۵۳۳۹۵۷	۰/۶۱۱۶۷۲	۰/۶۶۸۰۶۳
۰/۹	۰/۰۰۰۰۰۰۰	۰/۴۵۳۵۴۷	۰/۶۴۴۶۲۶	۰/۷۳۸۳۰۳	۰/۷۹۱۳۷۸	۰/۸۲۵۹۴۱
۱/۰	۰/۰۰۰۰۰۰۰	۱/۰۰۰۰۰۰۰	۱/۰۰۰۰۰۰۰	۱/۰۰۰۰۰۰۰	۱/۰۰۰۰۰۰۰	۱/۰۰۰۰۰۰۰

x\y	۰/۶	۰/۷	۰/۸	۰/۹	۱/۰
۰/۰	۰/۲۰۷۸۰۶	۰/۲۶۱۸۵۲	۰/۳۲۵۷۰۲	۰/۴۰۱۸۵۲	۰/۴۹۲۹۸۹
۰/۱	۰/۲۱۹۵۶	۰/۲۷۴۴۴۸	۰/۳۳۸۸۳۳	۰/۴۱۵۲۷۷	۰/۵۰۶۵۱۱
۰/۲	۰/۲۴۳۵۶۱	۰/۲۹۹۹۹۸	۰/۳۶۵۳۲۷	۰/۴۴۲۲۶۵	۰/۵۳۳۶۵۸
۰/۳	۰/۲۸۰۷۶۵	۰/۳۳۹۱۵۲	۰/۴۰۵۵۴۹	۰/۴۸۲۹۷۶	۰/۵۷۴۵۰۸
۰/۴	۰/۳۳۲۵۲	۰/۳۹۲۷۰۲	۰/۴۵۹۸	۰/۵۳۷۳۵۴	۰/۶۲۸۸۶۵
۰/۵	۰/۴۰۰۴۲۷	۰/۴۶۱۳۴۹	۰/۵۲۸۰۰۱	۰/۶۰۴۷۴۹	۰/۶۹۵۸۴۴
۰/۶	۰/۴۸۶۰۶۷	۰/۵۴۵۳۴۸	۰/۶۰۹۲۷۲	۰/۶۸۳۳۹۵	۰/۷۷۳۲۷۸
۰/۷	۰/۵۹۰۵۱۲	۰/۶۴۴۰۴۱	۰/۷۰۱۴۳۷	۰/۷۶۹۷۲	۰/۸۵۶۷۸
۰/۸	۰/۷۱۳۴۵۵	۰/۷۵۵۳۵۹	۰/۸۰۰۶۲۷	۰/۸۵۷۵۱۶	۰/۹۳۷۹۶۶
۰/۹	۰/۸۵۲۰۶۴	۰/۸۷۵۵۸۸	۰/۹۰۱۵۷۷	۰/۹۳۷۴۳	۰/۹۹۹۷۹۳
۱/۰	۱/۰۰۰۰۰۰۰	۱/۰۰۰۰۰۰۰	۱/۰۰۰۰۰۰۰	۱/۰۰۰۰۰۰۰	۱/۰۰۰۰۰۰۰

منابع

1. A. Aminataei, M. Sharan, M. P. Singh, "A numerical solution for the nonlinear convective-facilitated diffusion reaction problem for the process of blood oxygenation in the lungs", J. Nat. Acad. Math., 3 (1985) 182.
2. A. Aminataei, M. Sharan, M. P. Singh, "A numerical model for the process of gas exchange in the pulmonary capillaries", Ind. J. pure Appl. Math., 18 (1987) 1040.
3. A. Aminataei, M. Sharan, M. P. Singh, "Two layer model for the process of blood oxygenation in the pulmonary capillaries-parabolic profiles in the core as well as in the plasma layer", Appl. Math. Modelling.,12 (1988) 601.
4. A. Aminataei, "A numerical two layer model for blood oxygenation in lungs", Amir-Kabir J. Sci. & Tech., 12 (45) (2001) 63.
5. A. Aminataei, "Comparision of explicit and implicit approaches to numerical solution of uni-dimensional equation of diffusion", J. of Sci., Al-Zahra Univ., 15(2) (2002) 1.
6. A. Aminataei, "A mathematical model for oxygen dissociation curve in the blood", Euro. J. Scien. Res., 6(1) (2005) 5.
7. A. Aminataei, "Blood oxygenation in the pulmonary circulation: a review", Euro. J. Scien. Res., 10(2) (2005) 55.

8. A. Aminataei, "A numerical simulation of the unsteady convective-diffusion equation", The J. of Damghan Univ. of Basic Scis., 1(2) (2008) 73.

9. A.Aminataei, S. Hassani, "An efficient numerical method for the solution of initial and boundary values problems", J. of Sci., Al-Zahra Univ., 22 (2) (2009) 13.

10. A. Aminataei, "The analysis of convection and diffusion in capillary beds", J. of Sci., Al-Zahra Univ., 23 (2011) 1.

11. A. Aminataei, "Simulation of the breathing gases in the airways", J. Advan. Math. Model., 1(2) (2012) 51.

12. C. S. Desai, L. D. Johnson, "Evaluation of some numerical schemes for consolidation", Int. J. Numer. Meth.Eng., 7 (1973) 243.

13. P. D. Lax, R. D. Richtmyer, "Survey of the stability of linear finite difference equations", Communi. Pure Appl. Math., 9 (1959) 267.

14. R. D. Richtmyer, K. W. Morton, "Difference Methods for Initial Value Problems", 2nd edn., Inter Science, New York (1967).

15. V. N.Vedamurthy, N. Ch. S. N. Iyengar, "Numerical Methods", Vikas Publishing House PVTLTD (1998).

16. L. Lapidus, G. F. Pinder, "Numerical Solution of Partial Differential Equations in Science and Engineering", John Wiley and Sons, New York (1982).

17. K. E. Atkinson, "An Introduction to Numerical Analysis", John Wiley and Sons, New York (1998).

18. P. Laasonen, "Ubereinemethodezurlosung der warmeleitungs-gleichung", Acta Math., 81, (1949) 309.

19. G. G. O'Brien, M. A. Hyman, S. Kaplan, "A study of the numerical solution of partial differential equation, J. Math. Phys., 29 (1951) 233.

20. G. D. Smith, "Numerical Solution of Partial Differential Equations: Finite Difference Methods", Oxford Univ. Press, Oxford (1993).

21. J. Noye, "Numerical Simulation of Fluid Motion", Amsterdam, North-Holland (1978).

22. L. H. Thomas, "Elliptic problems in linear difference equations over a network", Watson Scientific Computing Laboratory, Columbia Univ., New York (1949).