جلد ۱۳، شماره ۳
نشریه علوم دانشگاه خوارزمی
تاریخ چاپ زمستان ۱۳۹۲

استنباط شبه درست‌نمایی پاسخ‌های فضایی گسسته (مطالعه موردی داده‌های بارندگی استان سمنان)

فاطمه حسینی*، امید کریمی؛ دانشگاه سمنان، گروه آمار
محسن محمدزاده؛ دانشگاه تربیت مدرس، گروه آمار

چکیده

برای مدل‌بندی پاسخ‌های فضایی گسسته معمولاً از مدل‌های آمیخته خطی تعمیم‌یافته فضایی استفاده می‌شود، که در آن‌ها ساختار همبستگی فضایی داده‌ها از طریق متغیرهای پنهان با توزیع نرمال در نظر گرفته می‌شود. مسئلهٔ مهم در این مدل‌ها پیش‌گویی متغیرهای پنهان در موقعیت‌های فاقد مشاهده است، که مستلزم برآورد پارامترهای مدل و متغیرهای پنهان در موقعیت‌های دارای مشاهده پاسخ است. به‌دلیل وجود متغیرهای پنهان و ناگاوسی بودن متغیرهای پاسخ فضایی، در این مدل‌ها تابع درست‌نمایی شکل بسته‌ای ندارد و برآوردها به‌راحتی میسر نیست. در این تحقیق الگوریتمی جدید برای برآورد پارامترهای مدل و پیش‌گویی‌ها معرفی شده است، که سرعت بسیار بیش‌تری نسبت به‌روش‌های موجود دارد. این الگوریتم از ترکیب روش ماکسیمم درست‌نمایی مرکب، الگوریتم گرادیانت ماکسیمم‌سازی امید ریاضی و روشی تقریبی به‌دست آورده شده است. در بررسی شبیه‌سازی کارایی و دقت الگوریتم مذکور بررسی شده و در نهایت تعداد روزهای دارای بارندگی ثبت شده در ایستگاه‌های هواشناسی استان سمنان در سال ۱۳۹۱ با استفاده از مدل و الگوریتم ارائه شده تحلیل شده است.

مقدمه

نلدر و ودربرن [۱۳] اولین کسانی بودند که چارچوب واحدی برای مدل‌های خطی تعمیم یافته[۱] (GLM's) ارائه کردند و مک‌کلا و نلدر [۱۱] این مدل‌ها را برای مدل‌بندی متغیرهای پاسخ گسسته پیشنهاد دادند. در این مدل‌ها با فرض استقلال مشاهدات با استفاده از یک تابع پیوند بین میانگین مشاهدات و متغیرهای کمکی ارتباط خطی برقرار می‌شود. در حالتی که بین مشاهدات همبستگی وجود دارد، تعمیمی از مدل‌های مذکور به‌نام مدل‌های آمیخته خطی تعمیم‌یافته استفاده می‌شود، که در آن‌ها فرض استقلال مشاهدات به استقلال شرطی تعدیل و همبستگی بین آن‌ها با اضافه کردن اثرات تصادفی از طریق متغیرهای پنهان به مدل در نظر گرفته می‌شود.

واژه‌های کلیدی: مدل آمیخته خطی تعمیم‌یافته فضایی، درست‌نمایی مرکب، الگوریتم گرادیانت ماکسیمم‌سازی امید ریاضی
۹۲/۴/۱۶ پذیرش ۹۲/۱۱/۵
***نویسنده مسئول** fahosseini1980@yahoo.com

۱. Generalized Linear Models

در مسائلی که داده‌ها برحسب موقعیت قرار گرفتن به یک‌دیگر وابسته‌اند، یا به‌عبارت دیگر وابستگی از نوع فضایی دارند، به‌طوری‌که پاسخ‌های فضایی نیز گسسته هستند، مدل آمیخته خطی تعمیم‌یافته فضایی[1] (SGLMM) به‌کار گرفته می‌شود. اولین بار برسلو و کلیتون [۵] از این مدل در پژوهش‌های پزشکی استفاده کردند. دیگل و همکاران [۲] این عنوان را برای مدل مذکور انتخاب و به‌طور مفصل آن را تحلیل کردند.

مسئلهٔ مهم در مدل‌های SGLM، پیش‌گویی متغیرهای پنهان در موقعیت‌های فاقد مشاهده است، که مستلزم برآورد پارامترهای مدل و متغیرهای پنهان در موقعیت‌های دارای مشاهده پاسخ است. چون در مدل‌های آمیخته خطی تعمیم‌یافته، تابع درستنمایی برخلاف مدل‌های خطی به‌دلیل ناگاوسی بودن متغیر پاسخ و وجود متغیرهای پنهان شکل بسته‌ای ندارد، برآورد پارامترها به‌راحتی میسر نیست. ژانگ [۱۵] با ترکیب روش مونت کارلو و الگوریتم گرادیانت ماکسیمم‌سازی امید ریاضی[2] (EMG) الگوریتم گرادیانت ماکسیمم‌سازی امید ریاضی مونت کارلویی[3] (MCEMG) را برای برآورد ماکسیم درستنمایی پارامترهای مدل و پیش‌گویی متغیرهای پنهان بیان کرد. چون این الگوریتم نیاز به نمونه‌گیری‌های مونت‌کارلویی دارد، به‌دلیل شکل پیچیده درستنمایی، ممکن است همگرایی الگوریتم بسیار کند و گاهی اوقات غیرممکن باشد.

ورین و همکاران [۱۴] از تابع درستنمایی جفتی[4] (PL) که حالتی خاص از درستنمایی مرکب[5] است و از ضرب چند تابع درستنمایی دومتغیره حاصل از زوج همسایگی‌های داده‌ها به‌دست می‌آید، استفاده کردند. سپس آن‌ها با استفاده از الگوریتم EM و روش مربع‌بندی گاوس ارمیت[6] الگوریتم ماکسیمم‌سازی امید ریاضی جفتی مربع‌بندی[7] (QPEM)را معرفی کردند و نشان دادند که همگرایی این الگوریتم سریع‌تر از الگوریتم MCEMG ژانگ است. حسینی و محمدزاده [۸] مدل‌های SGLM با متغیرهای پنهان ناگاوسی معرفی کردند و سپس محمدزاده و حسینی [۱۲] و کریمی و همکاران [۹] به تعمیم الگوریتم MCEMG و رهیافت درستنمایی جفتی به حالتی که متغیرهای پنهان ناگاوسی باشند، پرداختند. باغیشنی و همکاران [۳]، [۴] الگوریتم همسانه‌سازی داده‌ها[8] و تعمیمی از آن را برای به‌دست آوردن برآوردهای ماکسیمم درستنمایی مدل‌های SGLM پیشنهاد دادند.

ایدسویک و همکاران [۶] با در نظر گرفتن توزیع نرمال برای متغیرهای پنهان و خانوادهٔ نمایی برای متغیرهای پاسخ، نشان دادند که توزیع متغیرهای پنهان با شرط روی متغیرهای پاسخ به‌طور تقریبی دارای توزیع نرمال است. حسینی و همکاران [۷] نشان دادند، اگر توزیع متغیرهای پنهان چوله‌نرمال باشد، آن‌گاه توزیع شرطی آن‌ها روی متغیرهای پاسخ به‌طور تقریبی دارای توزیع چوله‌نرمال بسته است. محمدزاده و حسینی [۱۲] الگوریتم MCEMG

۱. Spatial Generalized Linear Mixed Model
۲. Expectation Maximization Gradiant
۳. Monte Carlo Expectation Maximization Gradiant
۴. Pairwise Likelihood
۵. Composite Likelihood
۶. Gauss Hermite Quadrature
۷. Quadrature Pairwise Expectation Maximization
۸. Data Cloning

ژانگ [۱۵] را برای مدل‌های با متغیرهای پنهان فضایی چوله‌نرمال بسته تعمیم دادند. سپس حسینی و محمدزاده [۱] الگوریتمی تقریبی با عنوان AEMG برای این مدل‌ها معرفی کردند، که محاسبات آن بسیار سریع‌تر از الگوریتم MCEMG است. در این تحقیق، الگوریتم جدید گرادیانت ماکسیمم‌سازی امید ریاضی جفتی تقریبی[۱](APEMG) برای مدل‌های SGLM با متغیرهای پنهان فضایی نرمال ارائه می‌شود. این الگوریتم از ترکیب روش درست‌نمایی جفتی، روش تقریبی ایدسویک و همکاران [۶] و الگوریتم EMG به‌دست می‌آید و نشان داده می‌شود که بسیار سریع‌تر از الگوریتم MCEMG ژانگ [۱۵] و QPEM ورین [۱۴] است. ساختار مقاله بدین‌صورت است که ابتدا در بخش دوم، مدل تعریف و سپس پیش‌گوی می‌نیمم میانگین توان دوم خطا[۲] (MMSE) برای متغیرهای پنهان را به‌دست می‌آوریم. در بخش سوم برای برآورد ماکسیمم درست‌نمایی پارامترها و متغیرهای پنهان در موقعیت‌های دارای مشاهده پاسخ، الگوریتم جدید APEMG معرفی می‌شود و در بخش چهارم اعتبار و مناسبت الگوریتم در یک پژوهش شبیه‌سازی بررسی می‌شود. در بخش پنجم نحوهٔ کاربست مدل و الگوریتم جدید، برای مجموعهٔ داده‌های مربوط به تعداد روزهای دارای بارندگی ثبت شده در ایستگاه‌های هواشناسی استان سمنان طی ۱۴۹ روز از سال ۱۳۹۱ نشان می‌دهیم. در انتها نیز به بحث و نتیجه‌گیری می‌پردازیم.

مدل‌های آمیخته خطی تعمیم‌یافته فضایی

برای تعریف مدل SGLM، معمولاً فرض بر این است که توزیع متغیرهای پاسخ گسسته فضایی $\mathbf{y}$ متعلق به خانوادهٔ نمایی و توزیع متغیرهای پنهان $\mathbf{x}$ نرمال هستند. فرض کنید $x=(x_1,\dots,x_n)'$، بردار متغیرهای پنهان فضایی در n موقعیت $\{s_1,\dots,s_n\}$ با چگالی $f(\mathbf{x}\mid\boldsymbol{\eta})=N_n(H\boldsymbol{\beta},\Sigma_{\boldsymbol{\theta}})$ باشد، که در آن $\boldsymbol{\eta}=(\boldsymbol{\beta}',\boldsymbol{\theta}')'$ پارامترهای مدل، H ماتریس $n\times(p+1)$ متغیرهای تبیینی، $\boldsymbol{\beta}'=(\beta_0,\beta_1,\dots,\beta_p)$ بردار پارامترهای رگرسیونی و $\boldsymbol{\theta}$ بردار پارامترهای هم‌بستگی فضایی مدل هستند. همچنین فرض کنید بردار مشاهده‌های $\mathbf{y}=(y_1,\dots,y_k)'$ از متغیرهای پاسخ فضایی گسسته در موقعیت‌های فضایی $\{s_1,\dots,s_k\}$ در اختیار باشند و هدف پیش‌گویی متغیرهای پنهان در موقعیت‌های فاقد مشاهده $\{s_{n-k},\dots,s_n\}$ باشد. متغیرهای پنهان در k موقعیت مشاهده شده به‌صورت $\mathbf{x}^{obs}=A\mathbf{x}$ نمایش داده می‌شود، که در آن $A=[I_{k\times k}\mid 0_{k\times n-k}]$ است. در این‌صورت بردار $\mathbf{x}$ را می‌توان به‌صورت $\mathbf{x}=(\mathbf{x}^{obs'},\mathbf{x}^{pred'})'$ تجزیه کرد، که در آن $\mathbf{x}^{pred}$ بردار متغیرهای پنهان در $n-k$ موقعیت انتخاب شده برای پیش‌گویی است. با فرض استقلال شرطی متغیرهای پاسخ روی متغیرهای پنهان، $f(\mathbf{y}\mid\mathbf{x}^{obs})$ متعلق به خانواده نمایی با تابع چگالی $f(y_i\mid x_i)=\exp\{y_i x_i-b(x_i)+c(y_i)\}$ است، که در آن $c(\cdot)$ و $b(\cdot)$ توابع معلوم‌اند و $\partial b(x_i)/\partial x_i=E(y_i\mid x_i)$ و $\partial^2 b(x_i)/\partial x_i^2=Var(y_i\mid x_i)$. به‌عنوان مثال برای مدل درست‌نمایی دوجمله‌ای

۱. Approximate Pairwise EMG ۲. Mean Square Error

$b(x_i)=u_i\log(1+\exp(x_i))$، که در آن u_i تعداد آزمایش‌ها است. اکنون ارتباط بین میانگین شرطی $E(y_i\,|\,x_i)$ و x_i را با استفاده از تابع پیوند معلوم g، می‌توان به‌صورت $E(y_i\,|\,x_i)=g^{-1}(x_i)$ بیان کرد. مؤلفه‌های مدل به‌طور خلاصه بدین‌صورت بیان می‌شود:

$$f(\mathbf{x}\,|\,\mathbf{y},\boldsymbol{\eta})=f(\mathbf{y}\,|\,\mathbf{x}^{obs})\,f(\mathbf{x}\,|\,\boldsymbol{\eta})$$
$$\propto|\Sigma_\theta|^{-1/2}\exp\left\{\sum_{i=1}^{k}[y_i x_i-b(x_i)+c(y_i)]-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-H\boldsymbol{\beta})'\Sigma_\theta^{-1}(\mathbf{x}-H\boldsymbol{\beta})\right\} \quad (1)$$

پیش‌گویی مبتنی بر می‌نیمم میانگین مربع خطای تقریبی برای متغیرهای پنهان

با فرض معلوم بودن پارامترهای مدل پیش‌گوی MMSE متغیرهای پنهان در موقعیت s_j به‌صورت $E(x_j\,|\,\mathbf{y})$ به‌دست می‌آید، که برای محاسبهٔ آن نیاز به توزیع حاشیه‌ای $f(x_j\,|\,\mathbf{y})$ است.

$f(\mathbf{x}\,|\,\mathbf{y})\propto f(\mathbf{y}\,|\,\mathbf{x})f(\mathbf{x})$ شکل بسته‌ای ندارد از همین رو، نمی‌توان $E(x_j\,|\,\mathbf{y})$ را مستقیماً محاسبه کرد، از این رو به‌طور تقریبی برآورد می‌شود. ایدسویک و همکاران [٦] نشان دادند اگر $\mathbf{x}$ دارای توزیع نرمال و $\mathbf{y}$ متعلق به خانواده نمایی باشد، با خطی کردن $f(\mathbf{y}\,|\,\mathbf{x}^{obs})$ حول یک مقدار ثابت $\mathbf{x}^{\cdot}$، توزیع $f(\mathbf{x}\,|\,\mathbf{y},\boldsymbol{\eta})$ را می‌توان با توزیع نرمال بدین‌صورت تقریب زد:

$$\hat{f}(\mathbf{x}\,|\,\mathbf{y},\boldsymbol{\eta})\approx N_n(\hat{\mu}_{x|y,\eta}(\mathbf{y},\mathbf{x}^{\cdot}),\hat{\Sigma}_{x|y,\eta}(\mathbf{x}^{\cdot})), \quad (2)$$

که در آن $\hat{\mu}_{x|y,\eta}(\mathbf{y},\mathbf{x}^0)=H\boldsymbol{\beta}+\Sigma_\theta A'R^{-1}(z(\mathbf{y},\mathbf{x}^0)-AH\boldsymbol{\beta})$، $R=A\Sigma_\theta A'+P$، P ماتریس قطری $k\times k$ با عناصر $P(i,i)=1/b''(x_i)$،

$$z_i(y_i,x_i^{\cdot})=[y_i-b'(x_i^{\cdot})+x_i b''(x_i^{\cdot})]/b''(x_i^{\cdot}),$$
$$\hat{\Sigma}_{x|y,\eta}(\mathbf{x}^{\cdot})=\Sigma_\theta-\Sigma_\theta A'R^{-1}A\Sigma_\theta$$

هستند.

اکنون با در نظر گرفتن $\mathbf{x}^*=\begin{pmatrix}x_j\\ \mathbf{x}_{-j}\end{pmatrix}=A_j\mathbf{x},\ j=1,\ldots,n$، که در آن $\mathbf{x}_{-j}=(x_1,\ldots,x_{j-1},x_{j+1},\ldots,x_n)$ و A_j ماتریس واحدی است که j امین سطر آن به سطر اول منتقل شده است، $[\mathbf{x}^*\,|\,\mathbf{y},\boldsymbol{\eta}]$ دارای توزیع تقریبی $N(\hat{\boldsymbol{\mu}}_{x^*|y,\eta},\hat{\Sigma}_{x^*|y,\eta})$ است، که در آن

$$\hat{\boldsymbol{\mu}}_{x^*|y,\eta}=A_j\hat{\boldsymbol{\mu}}_{x|y,\eta}(\mathbf{y},\mathbf{x}^{\cdot})=\begin{pmatrix}\mu_j\\ \boldsymbol{\mu}_{-j}\end{pmatrix},\ \hat{\Sigma}_{x^*|y,\eta}=A_j\hat{\Sigma}_{x|y,\eta}(\mathbf{x}^{\cdot})=\begin{pmatrix}\sigma_{jj} & \sigma_{j,-j}\\ \sigma_{-j,j} & \Sigma_{-j,-j}\end{pmatrix},$$

و $[x_j\,|\,\mathbf{y},\boldsymbol{\eta}]$ دارای توزیع تقریبی $N(\mu_j,\sigma_{jj})$ است. بنا بر این با فرض معلوم بودن پارامترها، پیش‌گوی MMSE تقریبی متغیرهای پنهان فضایی در موقعیت j ام، $E(x_j\,|\,\mathbf{y})=\mu_j$ است. در عمل پارامترها معلوم نیستند و باید برآورد شوند. در بخش بعد الگوریتمی برای برآورد پارامترهای مدل ارائه شده است.

برآورد ماکسیمم درستنمایی تقریبی پارامترها

در عمل اغلب پارامترهای مدل نامعلوم هستند و روش ماکسیمم درستنمایی، از روش‌های معمول برای برآورد پارامترها است. به‌دلیل وجود متغیرهای پنهان فضایی و ناگاوسی بودن متغیرهای پاسخ، در این مدل‌ها برآورد ماکسیمم درستنمایی پارامترهای مدل به‌راحتی قابل محاسبه نیستند. معمولاً برای به‌دست آوردن برآوردهای ماکسیمم درستنمایی در مدل‌هایی که داده‌ها کامل نیستند از الگوریتم EMG که لانجی [۱۰] ارائه کرده است، استفاده می‌شود. به‌دلیل وجود متغیرهای پنهان در مدل‌های SGLM و کامل نبودن داده‌ها، الگوریتم EMG روش مناسبی برای به‌دست آوردن برآوردهای ماکسیمم درستنمایی مدل است. در این بخش برای برآورد پارامترهای مدل براساس الگوریتم EMG و به‌کار بردن روش درستنمایی جفتی و تقریب ارائه شده برای $f(\mathbf{x}|\mathbf{y},\boldsymbol{\eta})$ به‌وسیلهٔ ایدسویک و همکاران [۶]، الگوریتم APEMG معرفی می‌شود. فرض کنید $(\mathbf{y},\mathbf{x})$ شامل بردار متغیرهای پاسخ گسسته فضایی و متغیرهای پنهان باشد، آن‌گاه از رابطهٔ (۱) تابع درستنمایی بدین‌صورت است:

$$L(\boldsymbol{\eta}|\mathbf{y})=\int\prod_{i=1}^{k} f(y_i|x_i)f(\mathbf{x}|\boldsymbol{\eta})d\mathbf{x}$$

بنا بر این تابع درستنمایی کامل بدین‌صورت است:

$$L_c(\boldsymbol{\eta}|\mathbf{y},\mathbf{x})=\prod_{i=1}^{k} f(y_i|x_i)f(\mathbf{x}|\boldsymbol{\eta}) \qquad (۳)$$

ژانگ [۱۵] برای به‌دست آوردن برآورد درستنمایی پارامترها الگوریتم MCEMG را معرفی کرد که مراحل آن بدین شرح است:

۱) مقدار اولیه $\boldsymbol{\eta}^{(0)}$ برای بردار پارامترهای مدل منظور و $m=0$ قرار داده شود.

۲) با الگوریتم EMG و تابع درستنمایی کامل (۳) این عبارت محاسبه شود:

$$\boldsymbol{\eta}^{(m+1)}=\boldsymbol{\eta}^{(m)}-\left[E\left(\frac{\partial^2 \ln L_c(\boldsymbol{\eta}|\mathbf{y},\mathbf{x})}{\partial\boldsymbol{\eta}\partial\boldsymbol{\eta}'}\Big|\mathbf{y}\right)\right]^{-1}_{\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{\eta}^{(m)}}\left[E\left(\frac{\partial \ln L_c(\boldsymbol{\eta}|\mathbf{y},\mathbf{x})}{\partial\boldsymbol{\eta}}\Big|\mathbf{y}\right)\right]_{\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{\eta}^{(m)}}$$
$$=\boldsymbol{\eta}^{(m)}-\left[E\left(\frac{\partial^2 \ln f(\mathbf{x}|\boldsymbol{\eta})}{\partial\boldsymbol{\eta}\partial\boldsymbol{\eta}'}\Big|\mathbf{y}\right)\right]^{-1}_{\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{\eta}^{(m)}}\left[E\left(\frac{\partial \ln f(\mathbf{x}|\boldsymbol{\eta})}{\partial\boldsymbol{\eta}}\Big|\mathbf{y}\right)\right]_{\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{\eta}^{(m)}}$$

۳) n مقدار $\mathbf{x}^{(1)},\ldots,\mathbf{x}^{(n)}$ از $f_{\mathbf{x}|\mathbf{y}}(\mathbf{x}|\mathbf{y},\boldsymbol{\eta}^{(m)})$ با الگوریتم متروپولیس- هستینگس تولید شوند.

۴) برآورد مونت کارلوی امیدریاضی‌های $E\{\frac{\partial^2 \ln f(\mathbf{x}|\boldsymbol{\eta})}{\partial\boldsymbol{\eta}\partial\boldsymbol{\eta}'}|\mathbf{y}\}$ و $E\{\frac{\partial \ln f(\mathbf{x}|\boldsymbol{\eta})}{\partial\boldsymbol{\eta}}|\mathbf{y}\}$ محاسبه و در (۲) جای‌گذاری شود و $\boldsymbol{\eta}^{(m)}$ جدید محاسبه شود.

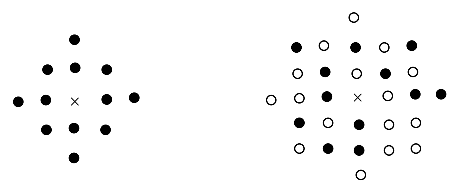
۵) $m=m+1$ قرار داده شود و الگوریتم تا رسیدن به همگرایی ادامه یابد.

پس از همگرایی $\boldsymbol{\eta}^{(m+1)}$ برآورد ماکسیمم درستنمایی پارامترها است. مهم‌ترین ایراد الگوریتم MCEMG،

سرعت بسیار کم در رسیدن به همگرایی و محاسبات پیچیده است. ورین و همکاران [۱۴] به‌جای استفاده از تابع درستنمایی کامل از تابع درستنمایی جفتی و از الگوریتم EM استفاده کردند و الگوریتم QPEM را معرفی کرده‌اند. درستنمایی جفتی حاصل‌ضرب درستنمایی‌های دو متغیره بدین‌صورت است:

$$\begin{aligned} PL(\boldsymbol{\eta}\,|\,\mathbf{y}) &= \prod_{(\ell,\ell')\in\aleph} L(\boldsymbol{\eta}\,|\,y_{\ell}, y_{\ell'}) \\ &\propto \prod_{(\ell,\ell')\in\aleph} \iint f(y_{\ell}\,|\,x_{\ell}) f(y_{\ell'}\,|\,x_{\ell'}) f(x_{\ell}, x_{\ell'}\,|\,\boldsymbol{\eta}) dx_{\ell} dx_{\ell'}, \end{aligned} \tag{٤}$$

که در آن $\aleph$ زیرمجموعه همسایگی‌های جفتی است. برای مثال نمودار ۱ .ب، ۱۲ جفت داده در همسایگی به شعاع دو را در یک مشبکه منظم و نمودار ۱.الف، ۱۲ موقعیت نمونه‌گیری شده تصادفی بدون جای‌گذاری در همسایگی به شعاع سه را نشان می‌دهند .



(ب) (الف)

نمودار ۱. الف) ۱۲ موقعیت نمونه‌گیری شده تصادفی بدون جای‌گذاری در همسایگی به شعاع سه،
ب) ۱۲ جفت داده در همسایگی به شعاع دو

مراحل الگوریتم QPEM بدین‌صورت است:

۱) مقدار اولیه $\boldsymbol{\eta}^{(\cdot)}$ برای بردار پارامترهای مدل منظور و $m=\cdot$ قرار داده شود.

۲) از الگوریتم EM و تابع درستنمایی جفتی (۴) ، در مرحلهٔ E عبارت

$$Q(\eta\,|\,\eta^{(m)}) = \sum_{(\ell,\ell')\in\aleph} \iint \ln[f(x_{\ell}, x_{\ell'}, y_{\ell}, y_{\ell'}\,|\,\eta)]\, f(x_{\ell}, x_{\ell'}\,|\,y_{\ell}, y_{\ell'}, \eta) dx_{\ell} dx_{\ell'}$$

محاسبه شود. حل مجموع انتگرال‌های دو گانه فوق به‌دلیل پیچیدگی تابع امکان‌پذیر نیست، از روش مربع‌بندی گاوس ارمیت استفاده و تقریبی از مجموع به‌دست می‌آید و در مرحلهٔ M، $\boldsymbol{\eta}^{(m+1)}$ طوری انتخاب شود که $\boldsymbol{\eta}^{(m+1)} = \arg\max_{\eta} Q(\boldsymbol{\eta}\,|\,\boldsymbol{\eta}^{(m)})$.

۳) قرار داده شود $m=m+1$ و الگوریتم تا رسیدن به همگرایی ادامه یابد. پس از همگرایی $\boldsymbol{\eta}^{(m+1)}$ برآورد ماکسیمم درستنمایی پارامترها است.

ورین و همکاران [۱٤] نشان دادند که نتایج الگوریتم QPEM مشابه الگوریتم EM برای تابع درستنمایی کامل است. از ایرادهای این الگوریتم نیز سرعت اندک در رسیدن به همگرایی است، البته با کوتاه‌تر کردن محاسبات سرعت بیش‌تری نسبت به الگوریتم MCEMG دارد. طولانی بودن محاسبات هر دو الگوریتم به‌دلیل مشخص نبودن شکل توزیع $f(\mathbf{x}\,|\,\mathbf{y}, \boldsymbol{\eta})$ است. به‌همین سبب، در این تحقیق، بر اساس تقریب توزیع $f(\mathbf{x}\,|\,\mathbf{y}, \boldsymbol{\eta})$ الگوریتم جدید APEMG معرفی شده است.

الگوریتم APEMG

از رابطهٔ (۲) به‌دلیل $(\mathbf{x}|\mathbf{y},\boldsymbol{\eta}) \approx N_n(\hat{\boldsymbol{\mu}}_{x|y}, \hat{\Sigma}_{x|y})$، بنا بر این طبق خاصیت بسته بودن حاشیه‌سازی توزیع نرمال می‌توان نوشت، $(\mathbf{x}_{\ell\ell'}|\mathbf{y}_{\ell\ell'},\boldsymbol{\eta}) \approx N_2(\hat{\boldsymbol{\mu}}_{\ell\ell'}, \hat{\Sigma}_{\ell\ell'})$ که در آن $\mathbf{x}_{\ell\ell'} = (x_\ell, x_{\ell'})'$ ، $\mathbf{y}_{\ell\ell'} = (y_\ell, y_{\ell'})'$ و $\hat{\boldsymbol{\mu}}_{\ell\ell'}$ یک بردار ۱×۲ با مؤلفه‌های برگرفته از سطرهای ℓو ℓ' از بردار $\hat{\boldsymbol{\mu}}_{x|y}$ است. همچنین $\Sigma_{\ell\ell'}$ یک ماتریس ۲×۲ از سطر ℓ و ستون ℓ' از ماتریس کوواریانس $\hat{\Sigma}_{x|y}$ است. از توزیع متغیرهای پنهان $\mathbf{x}|\boldsymbol{\eta}$ داریم:

$$\ln f(\mathbf{x}|\boldsymbol{\eta}) = -\frac{1}{2}\ln|\Sigma_\theta| - \frac{p}{2}\ln 2\pi - \frac{1}{2}(\mathbf{x}-H\boldsymbol{\beta})'\Sigma_\theta^{-1}(\mathbf{x}-H\boldsymbol{\beta}) \qquad (۵)$$

اکنون با مشتق‌گیری از عبارت (۵) نسبت به پارامترهای $\boldsymbol{\beta}$ و $\boldsymbol{\theta}$،

$$\frac{\partial \ln f(\mathbf{x}|\boldsymbol{\eta})}{\partial \boldsymbol{\beta}} = H'\Sigma_\theta^{-1}(\mathbf{x}-H\boldsymbol{\beta})$$

$$\frac{\partial^2 \ln f(\mathbf{x}|\boldsymbol{\eta})}{\partial \boldsymbol{\beta}\partial \boldsymbol{\beta}'} = -H'\Sigma_\theta^{-1}H$$

$$\frac{\partial \ln f(\mathbf{x}|\boldsymbol{\eta})}{\partial \theta_i} = -\frac{1}{2}tr(\Sigma_\theta^{-1}\Sigma_\theta^{(i)}) + \frac{1}{2}(\mathbf{x}-H\boldsymbol{\beta})'\Sigma_\theta^{-1}\Sigma_\theta^{(i)}\Sigma_\theta^{-1}(\mathbf{x}-H\boldsymbol{\beta})$$

$$\frac{\partial^2 \ln f(\mathbf{x}|\boldsymbol{\eta})}{\partial \theta_i\partial \theta_j} = -\frac{1}{2}tr(\Sigma_\theta^{-1}\Sigma_\theta^{(ij)} - \Sigma_\theta^{-1}\Sigma_\theta^{(i)}\Sigma_\theta^{-1}\Sigma_\theta^{(j)}) - \frac{1}{2}(\mathbf{x}-H\boldsymbol{\beta})'\Sigma_\theta^{*(ij)}(\mathbf{x}-H\boldsymbol{\beta})$$

که

$$\Sigma_\theta^{(i)} = \frac{\partial \Sigma_\theta}{\partial \theta_i}\text{،}\quad \Sigma_\theta^{(ij)} = \frac{\partial^2 \Sigma_\theta}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \quad \text{و} \quad \Sigma_\theta^{*(ij)} = \frac{\partial^2 \Sigma_\theta^{-1}}{\partial \theta_i \partial \theta_j} = \Sigma_\theta^{-1}(\Sigma_\theta^{(i)}\Sigma_\theta^{-1}\Sigma_\theta^{(j)} + \Sigma_\theta^{(j)}\Sigma_\theta^{-1}\Sigma_\theta^{(i)} - \Sigma_\theta^{(ij)})\Sigma_\theta^{-1}$$

اکنون با توجه به مشتق‌های محاسبه شده و استفاده از توزیع تقریبی نرمال معرفی شده برای توزیع شرطی $\mathbf{x}|\mathbf{y}$:

$$\begin{aligned} E\left(\frac{\partial \ln f(\mathbf{x}|\boldsymbol{\eta})}{\partial \boldsymbol{\beta}}|\mathbf{y}\right) &= E(-H'\Sigma_\theta^{-1}(\mathbf{x}-H\boldsymbol{\beta})|\mathbf{y}) \\ &= -H'\Sigma_\theta^{-1}(E(\mathbf{x}|\mathbf{y})-H\boldsymbol{\beta}) \\ &= -H'\Sigma_\theta^{-1}(\hat{\boldsymbol{\mu}}_{x|y}-H\boldsymbol{\beta}) \end{aligned} \qquad (۶)$$

$$E\left(\frac{\partial^2 \ln f(\mathbf{x}|\boldsymbol{\eta})}{\partial \boldsymbol{\beta}\partial \boldsymbol{\beta}'}|\mathbf{y}\right) = E(-H'\Sigma_\theta^{-1}H) = -H'\Sigma_\theta^{-1}H \qquad (۷)$$

$$E\left(\frac{\partial \ln f(\mathbf{x}|\boldsymbol{\eta})}{\partial \theta_i}|\mathbf{y}\right) = -\frac{1}{2}tr(\Sigma_\theta^{-1}\Sigma_\theta^{(i)}) + \frac{1}{2}E\left[(\mathbf{x}-H\boldsymbol{\beta})'V_\theta(\mathbf{x}-H\boldsymbol{\beta})|\mathbf{y}\right]$$

که در آن $V_\theta = \Sigma_\theta^{-1}\Sigma_\theta^{(i)}\Sigma_\theta^{-1}$ است و از امیدریاضی شکل درجه دوم یک بردار تصادفی به‌صورت $E(\mathbf{y}'A\mathbf{y}) = tr(A\Sigma_y) + \boldsymbol{\mu}_y'A\boldsymbol{\mu}_y$ داریم:

$$E\left(\frac{\partial \ln f(\mathbf{x}|\boldsymbol{\eta})}{\partial \theta_i}|\mathbf{y}\right) = -\frac{1}{2}tr(\Sigma_\theta^{-1}\Sigma_\theta^{(i)}) + \frac{1}{2}\left[tr(V_\theta\hat{\Sigma}_{x|y,\eta}) + (\hat{\boldsymbol{\mu}}_{x|y,\eta}-H\boldsymbol{\beta})'V_\theta(\hat{\boldsymbol{\mu}}_{x|y,\eta}-H\boldsymbol{\beta})\right] \qquad (۸)$$

$$\begin{aligned} E(\frac{\partial^{2} \ln f(\mathbf{x} \mid \boldsymbol{\eta})}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \mid \mathbf{y}) &= -\frac{1}{2} tr(\Sigma_\theta^{-1}\Sigma_\theta^{(ij)} - \Sigma_\theta^{-1}\Sigma_\theta^{(i)}\Sigma_\theta^{-1}\Sigma_\theta^{(j)}) \\ &\quad -\frac{1}{2} E\left[(\mathbf{x}-H\boldsymbol{\beta})'(\Sigma_\theta^{*(ij)})(\mathbf{x}-H\boldsymbol{\beta}) \mid \mathbf{y} \right] \\ &= -\frac{1}{2} tr(\Sigma_\theta^{-1}\Sigma_\theta^{(ij)} - \Sigma_\theta^{-1}\Sigma_\theta^{(i)}\Sigma_\theta^{-1}\Sigma_\theta^{(j)}) \\ &\quad -\frac{1}{2} tr(\Sigma_\theta^{*(ij)}\hat{\Sigma}_{x|y,\eta}) + (\hat{\boldsymbol{\mu}}_{x|y,\eta} - H\boldsymbol{\beta})'\Sigma_\theta^{*(ij)}(\hat{\boldsymbol{\mu}}_{x|y,\eta} - H\boldsymbol{\beta}) \end{aligned} \tag{۹}$$

تمام مشتق‌ها شکل مشخصی دارند و برای محاسبهٔ امیدریاضی‌های مذکور، نیازی به استفاده از روش‌های نمونه‌گیری مونت کارلو نیست وهم‌چنین با به‌کار بردن درست‌نمایی جفتی مشتقات ساده‌تر می‌شود و نیازی به استفاده از تقریب‌هایی مثل مربع‌بندی گاوس ارمیت نیست. بنا بر این زمان محاسبات الگوریتم APEMG که مراحل آن در ذیل آمده است، سریع‌تر از الگوریتم‌های QPEM و MCEMG است.

۱) مقادیر اولیه $\boldsymbol{\eta}^{(0)}$ را در نظر گرفته و $m=0$ قرار داده شود.

۲) مقدار اولیه $\mathbf{x}^{(0)}$، به‌عنوان مثال مد توزیع $(\mathbf{x} \mid \boldsymbol{\eta})$، $\mathbf{x}^{(0)} = M(\mathbf{x} \mid \boldsymbol{\eta})$ انتخاب و $d=0$ قرار داده شود.

۳) از رابطهٔ (۲) توزیع پسین تقریبی در $x^{(d)}$، یعنی $\hat{f}(\mathbf{x} \mid \mathbf{y}, \boldsymbol{\eta}) = N_n(\hat{\boldsymbol{\mu}}_{x|y}(\mathbf{x}^{(d)}), \hat{\Sigma}_{x|y,\eta}(\mathbf{x}^{(d)}))$ تعیین و $\mathbf{x}^{(d+1)} = \hat{M}(\mathbf{x} \mid \mathbf{y}, \boldsymbol{\eta})$ و $d=d+1$ قرار داده شود. پس از همگرایی، توزیع پسین تقریبی تعیین می‌شود.

۴) از الگوریتمEMG و درست‌نمایی جفتی

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\eta}^{(m+1)} &= \boldsymbol{\eta}^{(m)} - \left[\sum_{(\ell,\ell')\in\aleph} E\left\{ \frac{\partial^{2} \ln f(x_\ell, x_{\ell'} \mid \boldsymbol{\eta})}{\partial \boldsymbol{\eta} \partial \boldsymbol{\eta}'} \mid (y_\ell, y_{\ell'}) \right\} \right]^{-1}_{\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{\eta}^{(m)}} \\ &\quad \times \left[\sum_{(\ell,\ell')\in\aleph} E\left\{ \frac{\partial \ln f(x_\ell, x_{\ell'} \mid \boldsymbol{\eta})}{\partial \boldsymbol{\eta}} \mid (y_\ell, y_{\ell'}) \right\} \right]_{\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{\eta}^{(m)}} \end{aligned} \tag{۱۰}$$

محاسبه شود. از خواص توزیع نرمال و مرحله ۳، $f(x_\ell, x_{\ell'} \mid y_\ell, y_{\ell'}, \boldsymbol{\eta})$ دارای توزیع تقریبی نرمال است و امید ریاضی‌های (۱۰) به‌راحتی از روابط (۹-۶) محاسبه می‌شوند.

۵) $m=m+1$ قرار داده شود و الگوریتم تا رسیدن به همگرایی تکرار شود، پس از همگرایی $\boldsymbol{\eta}^{(m+1)}$ برآورد پارامترها است.

بررسی شبیه‌سازی

در این بخش الگوریتم پیشنهاد شده در بررسی شبیه‌سازی براساس داده‌های تولید شده در مشبکه‌ای منظم ۱۰×۱۰ به‌صورت $\{(\ell,k), \ell,k=1,\dots,10\}$ ارزیابی شود. برای تولید متغیرهای پنهان فضایی نرمال $\mathbf{x}$، $N_{100}(\beta z, \Sigma_\theta)$ تابع کوواریانس نمایی همسانگرد به‌صورت $C(h) = \sigma^{2}\exp(-h/\varphi)$, h>۰ و مقادیر $\sigma^{2}=2$ و $\beta=-0/5$ و $\varphi=4$ در نظر گرفته شده‌اند. متغیر تبیینی در هر موقعیت $s_. = (\ell,k)$ به‌صورت $z_{\ell k} = \log(1+\ell)$ در نظر گرفته

شده است. متغیرهای پاسخ $y_{\ell k}$ نیز با شرطی کردن روی متغیرهای پنهان فضایی از توزیع $y_{\ell k} \sim Bin(۱۰۰, \exp(x_{\ell k})/[۱+\exp(x_{\ell k})])$ تولید شده‌اند.

برای برآورد پارامترها از سه الگوریتم MCEMG با ۵۰۰۰ تکرار، QPEM و الگوریتم معرفی شده APEMG با همسایگی به شعاع سه، برای هر مشاهده ۱۲ جفت همسایه به‌صورت تصادفی بدون جای‌گذاری استفاده شده است. برای محاسبه مقادیر MSE تحت شرایط مذکور، ۱۰۰ مجموعه داده تولید شده است. متوسط مقادیر برآورد شده پارامترها و MSE در جدول ۱ ارائه شده‌اند. چنان‌که ملاحظه می‌شود برآورد پارامترهای مدل برای هر سه روش تقریبا معادلند.

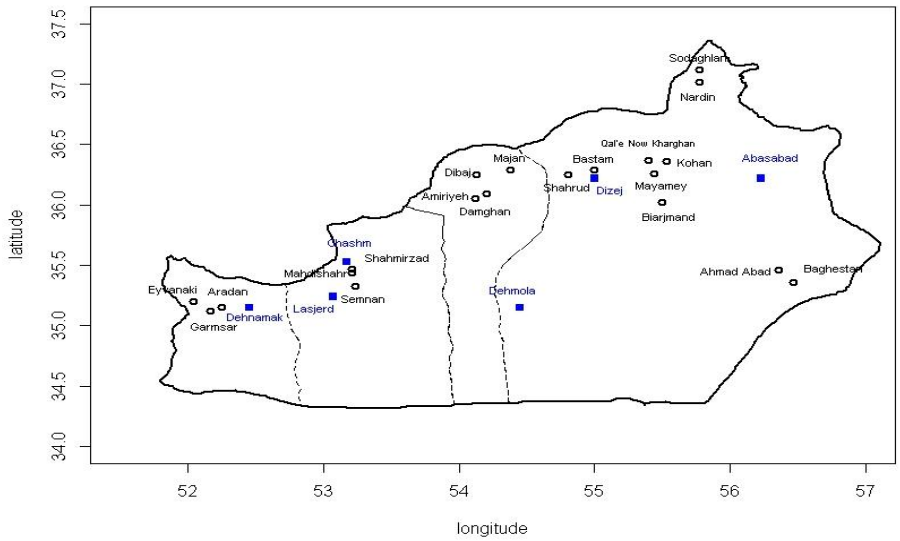
برای مقایسهٔ دقت پیش‌گویی سه الگوریتم، در موقعیت (۳/۵ و ۴/۵) پیش‌گویی برای هر ۱۰۰ مجموعه داده محاسبه و مقدار MSPE به‌ترتیب برای الگوریتم‌های MCEMG، QPEM و APEMG مقادیر۱/۵۳۴۰، ۱/۵۲۸۷ و ۱/۵۳۱۴ حاصل شده و بیانگر آن است که دقت پیش‌گویی هر سه الگوریتم معادل است. زمان اجرای الگوریتم‌های MCEMG با ۵۰۰۰ تکرار، QPEM و APEMG برای هر مجموعه داده به‌ترتیب حدود ۱۵۰۰، ۱۰۰ و ۲۰ ثانیه است به‌طوری که برای ۱۰۰ مجموعه داده و برای این بررسی شبیه‌سازی الگوریتم MCEMG ۴۸ ساعت، الگوریتم QPEM سه ساعت و الگوریتم APEMG نیم ساعت با استفاده از رایانه‌ای با ۲/۵ CPU MH به‌طول انجامیده‌اند.

جدول ۱. متوسط برآورد میانگین مربع خطای پارامترها براساس ۱۰۰ مجموعه داده

پارامتر	مقدار واقعی	MCEMG		QPEM		APEMG	
		MSE	MLE	MSE	MLE	MSE	MLE
β	-۰/۵	۰/۰۴۶۱	-۰/۵۱۶۷	۰/۰۵٤۵	-۰/۵۲۱	۰/۰۵۳۳	-۰/۵۰۹۸
σ^2	۲	۰/۰۳۳۱	۱/۸۷۶۱	۰/۰۳۲٤	۱/۹۰۱۳	۰/۰۳۱۵	۱/۸۸۳۹
φ	٤	۰/٦۱٤۱	۳/۸۲۱۸	۰/٦۲۵۳	۳/۸۱۱۸	۰/٦۱۸٦	۳/۷۸٦۷

داده‌های بارندگی استان سمنان

در این بخش داده‌های مربوط به تعداد روزهای دارای بارندگی در استان سمنان با مدل و روش‌های پیشنهادی تحلیل آماری می‌شوند. مشاهدات تعداد روزهای دارای بارندگی است، که طی ۱۴۹ روز از سال ۱۳۹۱ در ۲۰ ایستگاه هواشناسی استان سمنان ثبت شده‌اند. موقعیت ایستگاه‌ها و شش موقعیت جدید که به‌منظور پیش‌گویی انتخاب شده‌اند، برروی نقشه استان سمنان در شکل ۱ مشخص شده است. با توجه به این‌که داده‌های بارندگی به موقعیت قرار گرفتن‌شان در محیط بررسی شده بستگی دارند، پس ماهیت فضایی دارند، از طرفی پاسخ‌ها تعداد روزهای دارای بارندگی هستند، بنا بر این متغیر پاسخ گسسته است و برای تحلیل این داده‌ها می‌توان از مدلی آمیخته خطی تعمیم‌یافته استفاده کرد.

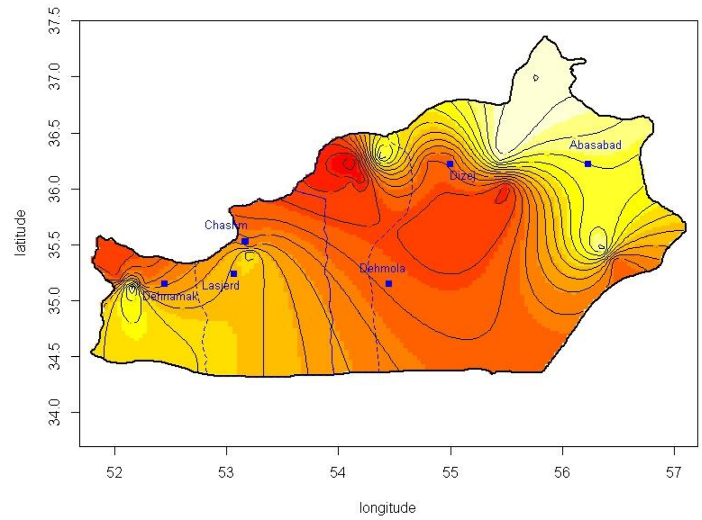


شکل۱. موقعیت جغرافیایی ایستگاه‌های هواشناسی روی نقشهٔ استان سمنان

فرض می‌شود همبستگی فضایی داده‌ها که با متغیرهای پنهان $\mathbf{x}$ مدل‌بندی شده است، توزیع نرمال $N(\beta_{\cdot}\mathbf{1}',\Sigma_{\theta})$ دارند. متغیر پاسخ y_i تعداد روزهای دارای بارندگی در $u_i=۱۴۹$ روز است، بنا بر این به شرط بردار متغیر پنهان $\mathbf{x}$، توزیع بردار متغیر پاسخ دو جمله‌ای متعلق به خانواده نمایی بدین‌صورت است:

$$f(y_i\,|\,x_i)=\exp\{y_i x_i-u_i\log(۱+\exp(x_i))\},\, i=۱,\ldots,۲۰$$

برای ساختار همبستگی فضایی، تابع کوواریانس همسان‌گرد نمایی با پارامترهای $\boldsymbol{\theta}=(\sigma,\varphi)$ در نظر گرفته می‌شود. بنا بر این بردار پارامترهای مدل به‌صورت $\boldsymbol{\eta}=(\beta_{\cdot},\sigma,\varphi)$ خواهد شد. از الگوریتم APEMG، برآورد تقریبی ماکسیمم درست‌نمایی پارامترها $\hat{\boldsymbol{\theta}}=(۰/۳,۲۸/۵)$ و $\hat{\beta}_{\cdot}=۰/۵$ به‌دست می‌آید و متغیرهای پنهان در بیست موقعیت دارای مشاهده، $\mathbf{x}^{obs}=\{x_i; i=۱,\ldots,۲۰\}$ از الگوریتم استخراج می‌شوند. با استفاده از برآورد پارامترها و متغیرهای پنهان در بیست موقعیت دارای مشاهده، در شش موقعیت جدید $\mathbf{x}^{pred}=\{x_i; i=۲۱,\ldots,۲۶\}$ پیش‌گویی انجام و نقشه پیش‌گویی متغیر پنهان در نمودار ۲ رسم و این نقاط مشخص شده‌اند. این نمودار همبستگی مناطق مختلف سمنان را از نظر بارندگی نشان می‌دهد. به‌دلیل وسعت این استان مناطق مختلف آب و هوایی متفاوت دارند. به‌طوری‌که مشاهده می‌شود نیمهٔ شمال‌غرب به‌سمت استان مازندران و نیمهٔ غربی بالایی به‌سمت استان تهران از نظر بارندگی مشابه‌اند و دارای بارندگی بیش‌تری نسبت به‌سایر مناطق این استان هستند و شرق استان به‌سمت خراسان رضوی و جنوب‌غربی به‌سمت استان قم، خشک‌تر و از نظر بارندگی مشابه‌اند. چنان‌که در شکل ۱ نقشهٔ سمنان نیز مشاهده می‌شود در منطقهٔ جنوبی استان، شهری وجود ندارد و خالی از سکنه است، این قسمت استان واقع در دشت کویر و کویر طبس است. به‌همین سبب، داده‌ای برای این قسمت در دسترس نیست. در این مناطق پیش‌گویی‌ها براساس نزدیک‌ترین داده‌ها انجام شده‌اند و بدیهی است دقت کم‌تری دارند.



شکل ۲. نقشه پیش‌گویی متغیر پنهان استان سمنان

بحث و نتیجه‌گیری

با به‌کار بردن الگوریتم APEMG معرفی شده برای استنباط مدل آمیختهٔ خطی تعمیم‌یافته فضایی، زمان محاسبات در مقایسه با الگوریتم‌های موجود مثل MCEMG و QPEM بسیار کاهش می‌یابد. به‌خصوص برای مجموعه داده با حجم بسیار زیاد که ممکن است استفاده از استنباط درست‌نمایی بسیار پیچیده و شاید غیرممکن باشد، به‌کار بردن استنباط درست‌نمایی جفتی، بسیار مفید به‌نظر می‌رسد. یکی از پیشنهادات مقاله ورین و همکاران [۱۴] نیز استفاده از روشی مناسب به‌جای روش تقریب گاوس ارمیت است. در این مقاله نیز با به‌کار بردن روش تقریبی معرفی شده به‌جای روش تقریب گاوس ارمیت مشاهده شد که زمان محاسبات کاهش می‌یابد. البته ذکر این نکته ضروری است که سرعت الگوریتم‌های مبتنی بر درست‌نمایی جفتی به تعداد همسایگی‌ها وابسته است و با افزایش جفت‌ها زمان محاسبات نیز افزایش می‌یابد. از موضوعات مورد علاقه دیگر در استباط مدل‌های SGLM، توزیع پیشنهادی برای متغیرهای پنهان است. چون توزیع‌های چوله از جمله کلاس توزیع چوله نرمال کلاس بزرگ‌تری از توزیع نرمال است، به‌نظر می‌رسد به‌کار بردن توزیع چوله نرمال برای متغیرهای پنهان به جای توزیع نرمال، نتایج دقیق‌تری در بر داشته باشد، که در حال حاضر به وسیلهٔ نویسندگان این مقاله در حال بررسی است.

قدردانی و تشکر

نویسندگان از داوران محترم مجله که نظرات ارزنده آن‌ها موجب بهبود مقاله شد و از حمایت قطب علمی داده‌های ترتیبی و فضایی دانشگاه فردوسی مشهد قدردانی می‌کنند.

منابع

۱. ف. حسینی، م. محمدزاده، *برآورد مدل‌های آمیخته خطی تعمیم‌یافته فضایی با متغیرهای پنهان چوله نرمال بسته*، نشریه علوم دانشگاه خوارزمی، دور ۱۲، شماره ۱، بهار ۱۳۹۲ (۱۳۹۲) ۳۱۲-۳۰۵.

2. P. Diggle, J. A. Tawn, R. A. Moyeed, "Model-Based Geostatistics with Discussion", Journal of the Royal Statistical Society. Series C. Applied Statistics, 47 (1998) 299-350.

3. H. Baghishani, H. Rue, M. Mohammadzadeh," On a Hybrid Data Cloning Method and Its Application in Generalized Linear Mixed Models", Statistics and Com- puting, 22 (2012) 613-597.

4. H. Baghishani, H. Rue, M. Mohammadzadeh, "A Data Cloning Algorithm for Computing Maximum Likelihood Estimates in Spatial Generalized Linear Mixed Models", Computational Statistics and Data Analysis, 55 (2011) 1748-1759.

5. NE Breslow, D. G Clayton, "Approximate Inference in Generalized Linear Mixed Models", Journal of the American Statistical Association, 88 (1993) 9-25.

6. J. Eidsvik, S. Martino, H. Rue, "Approximate Bayesian Inference in Spatial Generalized Linear Mixed Models", Scandinavian Journal of Statistics, 36 (2009) 1-22.

7. F. Hosseini, J. Eidsvik, M. Mohammadzadeh, "Approximate Bayesian Inference in Spatial GLMM with Skew Normal Latent Variables", Computational Statistics and Data Analysis, 55 (2011) 1791-1806.

8. F. Hosseini, M. Mohammadzadeh, "Bayesian Prediction for Spatial GLMM’s with Closed Skew Normal Latent Variables", Australian & New Zealand Journal of Statistics, 54 (2012) 43-62.

9. O. Karimi, M. Mohammadzadeh, F. Hosseini, "Pairwise Likelihood in Spatial GLMM with Skew Normal Latent Variables", Proceedings of 15th Conference of the International Association for Mathematical Geology, Salzburg, Australia (2011).

10. K. Lange, "A Gradiant Algorithm Locally Equivalent to the EM Algorithm", Journal of Royal Statistical Society, Series B. Methodological, 57 (1995) 425-437.

11. P. McCullagh, J. A. Nelder, Generalized Linear Models, Chapman and Hall, London(1989).

12. M. Mohammadzadeh, F. Hosseini, "Maximum-Likelihood Estimation for Spatial GLM Models with Closed-Skew Normal Latent Variables", Procedia Environmental Scinences, 3 (2011) 63-68.

13. J. A. Nelder, R. W. M. Wedderburn, "Generalized Linear Models", Journal of the Royal Statistical Society Series A, 135(1972) 370-384.

١٤. C. Varin, G. Host, O. Skare, " Pairwise Likelihood Inference in Spatial Generalized Linear Mixed Models", Computational Statistics and Data Analysis, 49 (2005) 1173-1191.

15. H. Zhang, H. "On Estimation and Prediction for Spatial Generalized Linear Mixed Models", Biometrics, 58 (2002) 129-136.