مدل‌بندی و پیش‌گویی بیزی مقادیر کرانگین فضایی با تابع مفصل تی

بهزاد محمودیان، محسن محمدزاده*، لیلا شهبازی؛ دانشگاه تربیت مدرس، گروه آمار

چکیده

در این مقاله مدل فضایی برای تحلیل مقادیر کرانگین با توزیع حاشیه‌ای مقدار کرانگین تعمیم‌یافته معرفی می‌شود، که در آن وابستگی‌های فضایی کوچک مقیاس با استفاده از تابع مفصل تی مدل‌بندی و سپس با روی‌کردی سلسله مراتب میدانی تصادفی برای جذب وابستگی‌های بزرگ مقیاس با پارامتر مکان توزیع‌های حاشیه‌ای مرتبط می‌شود. برازش مدل در رهیافت بیزی با استفاده از تکنیک‌های مونت کارلوی زنجیر مارکوفی انجام می‌گیرد که شامل الگوریتم متروپولیس سازوار است. در الگوریتم پیشنهادی با به‌دست آوردن توزیع نامزد مناسب، امکان به هنگام‌سازی بردار پارامتر مکان به‌صورت توأم فراهم می‌گردد. همچنین پیش‌گویی فضایی بیزی بر اساس مدل ارائه شده با تقریب توزیع پیش‌گو به‌دست آورده می‌شود. برآوردپذیری پارامترهای مدل، جذب و تفکیک وابستگی‌های فضایی چند مقیاسی در بررسی شبیه‌سازی بررسی شده و تحلیل مقادیر کرانگین بارندگی ارائه می‌شود.

مقدمه

مقادیر کرانگین به مشاهداتی اطلاق می‌شود که دم توزیع را توصیف می‌کنند. در روش حداکثرهای بلوکی[۱] پس از تعریف بلوک‌های زمانی به بزرگ‌ترین مشاهده در هر بلوک یک حداکثر بلوکی گفته می‌شود و در صورتی که این حداکثرها بر حسب موقعیت‌های فضایی وابسته باشند، با مقادیر کرانگین (حداکثرهای بلوکی) فضایی مواجهیم. تحلیل مقادیر کرانگین فضایی می‌تواند با روی‌کرد سلسله مراتب و مرتبط کردن میدان تصادفی با پارامترهای توزیع مانند مدل‌های آمیخته خطی تعمیم‌یافته طرح‌ریزی شود که هدف اصلی آن پیش‌گویی مقدار کرانگین در موقعیت‌های فاقد مشاهده است.

در تحلیل مقادیر کرانگین فضایی می‌توان به مدل‌های پیشنهادی کسن و کلز (۱۹۹۹)، کولی و همکاران (۲۰۰۷) و سانگ و گلفند (۲۰۰۹) اشاره کرد. کسن و کلز (۱۹۹۹) با استفاده از فرایند نقطه‌ای مدل فضایی را با رهیافت بیزی برای فزونی‌های سرعت باد به‌کار بردند. کولی و همکاران (۲۰۰۷) مدل رگرسیونی زمین آمار را برای پارامترهای توزیع پارتوی تعمیم‌یافته مشابه با مدل‌های زمین آمار دیگل و همکاران (۱۹۹۸) در نظر گرفتند. هم‌چنین سانک و گلفند (۲۰۰۹) مدل رگرسیونی فضایی با روی‌کردی سلسله مراتبی را برای توزیع مقدار کرانگین تعمیم‌یافته معرفی کردند که قادر بـه لحاظ کردن وابستگی‌های کوچک مقیاس نیز هست. در واقع

واژه‌های کلیدی: مقادیر کرانگین، توزیع مقدار کرانگین تعمیم‌یافته، تابع مفصل تی، الگوریتم سازواز، پیش‌گویی.
دریافت ۹۰/۹/۱٦ پذیرش ۹۲/٤/۹
*نویسنده مسئول mohsen_m@modares.ac.ir

۱. Block maxima

این مدل می‌تواند وابستگی‌های باقی‌مانده در مانده‌های مدل فضایی را با تعدیل فرض استقلال شرطی مشاهدات در مرحلهٔ اول مدل سلسله مراتبی مدل‌بندی کرده و برآورد و پیش‌گویی‌های دقیق‌تری را به‌واسطهٔ ساخت توزیع چند متغیره با تابع مفصل فراهم سازد. توابع مفصل ابزاری را برای ساخت توزیع توأم بر اساس دانستن توزیع‌های حاشیه‌ای یک متغیره در اختیار می‌گذارد. مزیت اصلی توابع مفصل این است که به‌جای قبول فرض توزیع چند متغیره، توزیع توأم تنها با در اختیار داشتن توابع توزیع حاشیه‌ای و مرتبط کردن آن‌ها به‌دست می‌آید. امیدی و همکاران (۱۳۸۹) و امیدی و محمدزاده (۱۳۹۰) با رهیافت بسامدی و بیزی توابع مفصل متفاوت را در تحلیل خشکسالی به‌کار بردند.

در این مقاله مدل فضایی مشابه مدل سانگ و گلفند (۲۰۰۹) برای تحلیل مقادیر کرانگین فضایی ارائه می‌شود.هم‌چنین به برطرف کردن محدودیت‌های محاسباتی و تسهیل در یافتن برآوردن بیزی پارامترها پرداخته می‌شود. در این رابطه سانگ و گلفند (۲۰۰۹) به مشکلاتی مانند وجود خود همبستگی زیاد و عدم کارایی لازم الگوریتم متروپولیس-هستینگس قدم زدن تصادفی[1] در متغیرهای توصیف کننده وابستگی‌های کوچک مقیاس اشاره کرده‌اند. به‌منظور رفع این مشکل، ابتدا با به‌دست آوردن فرم تابع درست‌نمایی حاصل از تابع مفصل چگالی نیاز نداشتن به‌هنگام‌سازی این متغیرها مشخص می‌شود. ثانیاً استفاده از الگوریتم متروپولیس سازوار[2] رابرت و رزنتال (۲۰۰۹) برای به‌هنگام‌سازی توأم عناصر بردار مرتبط با تغییرات بزرگ مقیاس پیشنهاد می‌شود. نیاز نداشتن به‌میزان‌سازی توزیع نامزد و امکان ساخت توزیع نامزد چند متغیره از جمله مزیت‌های این الگوریتم است. از سوی دیگر به‌دلیل این که مقادیر کرانگین رفتار دم توزیع فرایند بررسی شده را توصیف می‌کنند، به نظر می‌رسد استفاده از تابع مفصل تی با ویژگی‌هایی نظیر داشتن وابستگی دمی[3] (دیمارتا و مکنیل، ۲۰۰۵) و پارامتر درجهٔ آزادی تابع مفصل تی، رفتاری مشابه تابع مفصل گاوسی دارد، در نتیجه حالت کلی‌تری نسبت به تابع مفصل گاوسی دارد. علاوه بر این پیش‌گویی فضایی بیزی برای مدل فضایی با تابع مفصل تی ارائه می‌شود که با روش به‌کار رفته به‌وسیلهٔ سانگ و گلفند (۲۰۰۹) متفاوت است و از این‌که توزیع شرطی یک بردار با توزیع تی، توزیع شرطی تی دارد در آن استفاده می‌شود. ضمناً مدل مناسب در تحلیل داده‌های بارندگی از میان مدل‌های فضایی با تابع مفصل و بدون آن با توجه به ملاک‌های مبتنی بر توان پیش‌گویی و فاکتور بیزی تعیین می‌گردد. در ادامه در بخش ۲ توزیع مجانبی مقادیر کرانگین به اختصار معرفی می‌شود. در بخش ۳ تابع مفصل برای تعدیل فرض استقلال شرطی ارائه می‌شود. تکنیک‌های مونت کارلوی زنجیر مارکوفی به‌همراه پیش‌گویی فضایی بیزی در بخش ۴ شرح داده می‌شود. بخش‌های ۵ و ۶ به نحوهٔ برآورد پارامترها در رهیافت بیزی با بررسی شبیه‌سازی و تحلیل داده‌های بارندگی ایران می‌پردازد. در نهایت بحث و نتیجه‌گیری در بخش ۷ بیان می‌شود.

---

۱. Random Walk Metropolis-Hastings 	۲. Adaptive Metropolis algoritm 	۳. Tail Dependence

مقادیر کرانگین

بر خلاف اکثر روش‌های آماری که در آن رفتار توزیع در اطراف میانگین بررسی می‌شود، نظریهٔ مقادیر کرانگین به تحلیل رفتار دم توزیع‌ها می‌پردازد. در مدل‌بندی حداکثرهای بلوکی مشاهدات، ابتدا بلوک‌های زمانی به‌صورت روزانه، سالانه یا بازه‌های زمانی دیگر تعریف و به حداکثرهای بلوک‌ها توزیع مقدار کرانگین تعمیم‌یافته برازش می‌شود. فرض کنید $\{Y_t\}_{t\geq1}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع با تابع توزیع معلوم $F(y)$ و $M_n = max_{t=1,\dots,n} Y_t$ حداکثر بلوکی باشند. برای تعیین توزیع پارامتری و مجانبی حداکثرها با قبول دو فرض هم‌توزیعی و استقلال، ثابت‌های حقیقی $a_n \geq ۰$ و b_{n} طوری تعیین می‌شود که توزیع $P(\frac{M_{n-b_n}}{a_n} \leq y)$ در صورت n ($n \to \infty$) افزایش به تابع توزیع غیرتباهیده $G(y)$ همگرا شود. قضیه انواع کرانگینی (کلز، ۲۰۰۱) نشان می‌دهد که حداکثرهای دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع با ثابت‌های نرمال کننده، در صورت وجود، از یکی از توزیع‌های گامبل، فرەشه و وایبل پیروی می‌کند. برای رسیدن به مدل واحد با پارامترسازی مجدد، تابع توزیع تجمعی مقدار کرانگین تعمیم‌یافته[۱] (GEV) به‌صورت،

$$G(y) = \exp\left\{-\left[1+\frac{y-\mu}{\sigma}\right]_{+}^{1/\xi}\right\}, \qquad (۱)$$

به‌دست می‌آید، که در آن $[x]_{+} = \max\{0,x\}$ است. تابع توزیع (۱) دارای سه پارامتر مکان $\mu \in \mathrm{R}$ مقیاس $\sigma > ۰$ و شکل ξ است. پارامتر شکل رفتار دم توزیع را توصیف می‌کند، $\xi >۰$ توزیع فرەشه، $\xi <۰$ توزیع وایبل و $\xi =۰$ توزیع گامبل را نتیجه می‌دهد. $\xi >۰$ توزیعی دم کلفت با کاهش‌پذیری چند جمله‌ای، $\xi =۰$ ($\xi \to ۰$) دم متوسط با کاهش‌پذیری نمایی و $\xi <۰$ توزیعی با دم باریک و کران بالایی در نقطه را مشخص می‌کند.

مدل فضایی با تابع مفصل

فرض کنید $Y = (Y(s_1),\dots,Y(s_n))'$ بردار حداکثرهای بلوکی در n موقعیت دل‌خواه $s_1,\dots,s_n$ متعلق به $D \subseteq R^2$ باشد. مدل سلسله مراتبی مفروض است که در مرحلهٔ اول آن حداکثرهای بلوکی مشروط بر پارامتر مکان توزیع دارای توزیع GEV هستند. در مدل‌بندی پیشامدهای کرانگینی، گاهی فرض استقلال شرطی به‌کار رفته معقول نیست و انحراف از آن در مانده‌های مدل منعکس می‌گردد. برای تعدیل فرض استقلال شرطی در مرحلهٔ اول مدل سلسله مراتبی نیاز به‌دانستن توزیع توأم Y است. شاید راه حلی ساده‌تر با توجه به محدودیت‌های توزیع‌های چندمتغیره کرانگینی استفاده از توزیع یک متغیره GEV و سپس مرتبط کردن آن‌ها با تابع مفصل باشد. بدیهی است که بررسی صحت و نکویی برازش توزیع یک متغیره آسان‌تر از توزیع چند متغیرهٔ فرض شده باشد.

قضیهٔ اسکلار (نلسن، ۲۰۰۶) نشان می‌دهد که تابع مفصلی وجود دارد که توزیع توأم متغیرهای تصادفی را با توزیع‌های حاشیه‌ای آن‌ها مرتبط می‌سازد. پس اگر برای $F_i, i = 1,\dots,n$ تابع توزیع تجمعی $Y(s_i)$ روی R

[۱]. Generalized extreme value

باشد، آن‌گاه تابعی مانند C روی $[0,1]^n$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$F_Y(y_1,\dots,y_n)=C\big(F_1(y_1),\dots,F_n(y_n)\big),\qquad (y_1,\dots,y_n)\in R^n \tag{۲}$$

و اگر توزیع‌های حاشیه‌ای پیوسته باشند، توزیع F_Y در (۲) تابع توزیع توأم با حاشیه‌ای‌های F_i برای $i=1,\dots,n$ است. برای ساخت تابع مفصل با استفاده از توزیع‌های چند متغیره رابطهٔ

$$C(u_1,\dots,u_n)=F_Y\big(F_1^{-1}(u_1),\dots,F_n^{-1}(u_n)\big),$$

به‌کار می‌رود که با توجه به آن تابع مفصل تی به‌صورت

$$C_{\lambda,\Sigma}^{t}=\mathrm{T}_{\lambda,\Sigma}(\mathrm{T}_\lambda^{-1}\left(\mathrm{u}_1,\dots,\mathrm{T}_\lambda^{-1}(\mathrm{u}_n)\right), \tag{۳}$$

به‌دست می‌آید. در (۳)، $C_{\lambda,\Sigma}^{t}$ تابع مفصل تی با درجهٔ آزادی λ و ماتریس مقیاس معین مثبت $\sum$، T_λ تابع توزیع تجمعی توزیع یک متغیرهٔ تی با درجهٔ آزادی λ و $T_{\lambda,\Sigma}$ تابع توزیع تجمعی توزیع n متغیره تی با درجهٔ آزادی λ و ماتریس مقیاس $\sum$ هستند. تابع چگالی به‌دست آمده از $T_{\lambda,\Sigma}$ بدین صورت است:

$$t_{\lambda,\Sigma}(y)=\frac{\Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\lambda}{2}\right)\sqrt{(\Pi\lambda)^n}}|\Sigma|^{-1/2}\left(1+\frac{1}{\lambda}y'^{\Sigma^{-1}}y\right)^{-\frac{\lambda+n}{2}}$$

تابع مفصل تحت مقیاس‌بندی توزیع‌های حاشیه‌ای برای داشتن واریانس یک پایاست. پس مفصل توزیع $t_{\lambda,\Sigma}$ برابر با $t_{\lambda,P}$ بوده که در آن P ماتریس هم‌بستگی به‌دست آمده از $\sum$ است. اگر بردار تصادفیY دارای تابع مفصل $C_{\lambda,\mathrm{P}}^{\mathrm{t}}$ و حاشیه‌ای‌های یک متغیرهٔ تی با درجه آزادی λ باشند، تابع مفصل چگالی همان توزیع چند متغیره با درجهٔ آزادی λ خواهد بود. در غیراین صورت توزیع چند متغیره‌ای برای F_{Y} فراهم می‌شود که فرا توزیع تی[۱] نامیده می‌شود (دیمارتا و مکنیل، ۲۰۰۵). تابع مفصل چگالی تی با مشتق گرفتن از تابع مفصل (۳) به‌صورت

$$c_{\lambda,\Sigma}^{t}(u_1,\dots,u_n)=\frac{\partial^n C_{\lambda,\Sigma}(u_1,\dots,u_n)}{\partial u_{1,\dots,}\partial u_n}=\frac{t_{\lambda,\Sigma}\left(T_\lambda^{-1}(u_1),\dots,T_\lambda^{-1}(u_n)\right)}{\prod_{i=1}^n t_\lambda\left(T_\lambda^{-1}(u_i)\right)}$$

حاصل می‌شود که در آن $t_\lambda(.)$ و $t_{\lambda,\Sigma}(.)$ توابع چگالی به‌دست آمده از $T_\lambda(.)$ و $T_{\lambda,\Sigma}(.)$ هستند. اگر $Y(s)$ حداکثر بلوکی در موقعیت s با تابع توزیع حاشیه‌ای $Y(s)\sim GEV(\mu(s),\sigma,\xi)$ باشد، با توجه به مدل

$$Y(s)=\mu(s)+\frac{\sigma}{\xi}\left(Z(s)^{\xi}-1\right), \tag{۴}$$

تابع چگالی توأم

$$f_{\mathrm{Y}}(\mathrm{y}_1,\dots,\mathrm{y}_n)=\frac{\mathrm{t}_{\lambda,\mathrm{P}}\left(\mathrm{T}_\lambda^{-1}(\mathrm{G}_1(\mathrm{y}_1)),\dots,\mathrm{T}_\lambda^{-1}(\mathrm{G}_n(\mathrm{y}_n))\right)}{\prod_{i=1}^n \mathrm{t}_\lambda\left(\mathrm{T}_\lambda^{-1}(\mathrm{G}_i(\mathrm{y}_i))\right)}\prod_{i=1}^n \mathrm{g}_i(\mathrm{y}_i), \tag{۵}$$

در مرحلهٔ اول مدل سلسله مراتبی با در نظر گرفتن تابع مفصل چگالی تی برای حداکثرهای بلوکی به‌دست می‌آید، که در آن $g_i(.)$ و $G_i(.)$ به‌ترتیب توابع چگالی و توزیع $GEV(\mu(s_i),\sigma,\xi)$ هستند. در نتیجه مدل (۴) تعدیل در تابع درست‌نمایی را با تعریف $Z(s)$ ها به‌صورت

$$Z(s)=G_F^{-1}\left(T_\lambda\big(Z^*(s)\big)\right), \tag{۶}$$

۱. Meta t_λ *distribution*

ایجاب می‌کند، که در آن $G_{\mathrm{F}}(.)$ تابع توزیع فرهشه استاندارد (GEV۱، ۱، ۱) است. استفاده از توزیع حاشیه‌ای فرهشه استاندارد از این جا ناشی می‌شود که اگر توزیع حاشیه‌ای $Y(s)$ها $GEV(\mu(s),\sigma,\xi)$ باشد، آنگاه $Z(s)=(1+\xi\frac{Y(s)-\mu(s)}{\sigma})^{\frac{1}{\xi}}$ توزیع فرهشه استاندارد دارد. به‌همین سبب، بدون آن‌که به کلیت مسئله خللی وارد شود، در بررسی توزیع مقدار کرانگین چند متغیره توزیع‌های حاشیه‌ای فرهشهٔ استاندارد در نظر گرفته می‌شوند. اکنون اگر $Z^*(s)$ متغیری تصادفی باشد که $\boldsymbol{Z}^*=(Z^*(s_1),\ldots,Z^*(s_n))$ دارای توزیع $t_{\lambda,\mathbf{P}}$ باشد، آن‌گاه $Z(\boldsymbol{s})$ متغیری تصادفی تبدیل شده با توزیع حاشیه‌ای فرهشه است. ماتریس هم‌بستگی $\boldsymbol{P}$ با تابع هم‌بستگی معتبر و هم‌سان‌گرد فضایی $\rho(\|s_i-s_j\|;\phi_z)$ پر می‌شود که در آن $\|\mathrm{s_i}-\mathrm{s_j}\|$ بیان‌گر فاصلهٔ اقلیدسی بین موقعیت‌های s_{i} و s_{j} است (کرسی، ۱۹۹۹).

بنا بر این مراحل مدل سلسله مراتبی به‌این صورت قابل طرح است: در مرحلهٔ اول برای مشاهدات، مدل (۴) در نظر گرفته می‌شود، که در آن $Z(s)$ها توزیع حاشیه‌ای فرهشه دارند. در این صورت $Y(s)$ها توزیع حاشیه‌ای $GEV(\mu(s),\sigma,\xi)$ دارند و این حاشیه‌ای‌ها با تابع مفصل چگالی تی به‌هم مرتبط می‌شوند. در مرحلهٔ دوم مدل سلسله مراتبی، مدل

$$\mu(s)=\boldsymbol{x}'(\boldsymbol{s})\boldsymbol{\beta}+W(\boldsymbol{s}), \tag{۷}$$

برای پارامتر مکان توزیع حاشیه‌ای در نظر گرفته می‌شود که در آن $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{s})$ بردار متغیرهای تبیینی در موقعیت فضایی $\mathbf{s}$، $\boldsymbol{\beta}$ بردار ضرایب رگرسیونی و $\mathrm{W}(.)$ میدان تصادفی گاوسی با میانگین صفر و تابع هم‌بستگی $\rho(\|.\|;\phi_\mu)$ هستند. بر اساس مدل (۷) می‌توان پیشین فضایی $N(\boldsymbol{X\beta},\boldsymbol{V})$ را برای $\boldsymbol{\mu}=(\mu(\mathrm{s}_1),\ldots,\mu(s_n))$ در نظر گرفت، که در آن $\mathbf{V}$ ماتریس کوواریانس فضایی با درایه‌های $\boldsymbol{V}_{ij}=\sigma_\mu^2\rho(\|s_i-s_j\|;\phi_\mu)$ است. اگر تابع کوواریانس نمایی با پارامتر دامنهٔ ϕ_z و ϕ_μ به‌ترتیب برای توابع هم‌بستگی $Z^*(\mathbf{s})$ و $\mu(\mathbf{s})$ انتخاب شوند، برای مجزا کردن وابستگی‌های توصیف شده با دو تابع کوواریانس فضایی پارامتر دامنه آن‌ها باید در شرط $\phi_\mu>\phi_z$ صدق کنند. قابل توجه است که در مدل (۴)، $Z(\boldsymbol{s})$ و $\mu(s)$ که در (۶) و (۷) تعریف شده‌اند به‌ترتیب وابستگی‌های کوچک و بزرگ مقیاس را توصیف می‌کنند.

استنباط و پیش‌گویی

۱. برآورد بیزی پارامترهای مدل

برای برازش مدل با رهیافت بیزی توزیع‌های پیشین در صورت امکان مزدوج، فاقد اطلاع و سره انتخاب می‌شوند. در این صورت توزیع پسین پارامترهای مدل (٤) به‌صورت

$$p(\boldsymbol{\mu},\sigma,\xi,\phi_z,\lambda,\beta,\sigma_\mu^2,\phi_\mu|\boldsymbol{y})\propto f(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{\mu};\sigma,\xi,\phi_z,\lambda)p(\boldsymbol{\mu}|\beta,\sigma_\mu^2,\phi_\mu)p(\sigma_\mu^2)p(\phi_\mu)p(\sigma)p(\xi)p(\phi_z)p(\lambda) \tag{۸}$$

حاصل می‌شود که در آن $\mathrm{f}(.)$ تابع چگالی توأم (۵) است.

برای پارامترهای ثابت توزیع GEV، $\log(\sigma)$ و ξ، توزیع پیشین نرمال با میانگین صفر و واریانس نسبتاً بزرگ انتخاب می‌شود. همچنین برای پارامتر درجهٔ آزادی توزیع پیشین نمایی با میانگین ۱۰ و برای ϕ_z به‌دلیل این‌که باید کوچک‌تر از ϕ_μ باشد، توزیع گاما با ابر پارامترهای مقیاس و شکل برابر با یک فرض می‌شود. انتخاب توزیع پیشین برای پارامترهای σ_μ^2 و ϕ_μ نیاز به دقت خاصی دارد. پیشین‌های ناآگاهی بخش موجب عدم همگرایی یا تأخیر در همگرایی الگوریتم مونت کارلوی زنجیر مارکوفی می‌گردد. در نتیجه به‌جای توزیع پیشین ناآگاهی بخش، توزیع نرمال بریده شده برای پارامتر ϕ_μ و توزیع گامای معکوس مبهم برای σ_μ^2 انتخاب می‌شود. توزیع نرمال بریده شده با $TN_{(\circ,d_{max})}(c,e)$ نمایش داده می‌شود، که در آن c با توجه به قاعده دامنهٔ کاربردی[۱] تعیین می‌گردد. بر اساس این قاعده انتظار می‌رود که در نصف بیش‌ترین فاصله‌های فضایی، d^*، هم‌بستگی فضایی تقریباً صفر شود. همچنین پارامتر مقیاس e برابر مقدار کوچکی در نظر گرفته شده تا توزیع پیشین بر روی c تا اندازه‌ای متمرکز باشد. ثابت d_{max} هم برابر بزرگ‌ترین فاصلهٔ فضایی انتخاب می‌شود. توزیع پیشین گامای معکوس برای σ_μ^2 به‌صورت $IG(a_\mu,b_\mu)$ با ابرپارامترهای شکل کوچک و مقیاس بزرگ فرض می‌شود. تابع چگالی این توزیع متناسب با $x^{-(a_\mu+1)}e^{-x/b_\mu}$ است و به‌گونه‌ای پارامترگذاری شده که

$$E(\sigma_\mu^2)=\frac{1}{b_\mu(a_\mu-1)} \text{ و } Var(\sigma_\mu^2)=\frac{1}{b_\mu^2(a_\mu-1)^2(a_\mu-2)}.$$

با انتخاب توزیع نرمال چندمتغیره $N_p(\boldsymbol{\mu}_\beta,\sigma_\mu^2\boldsymbol{\Sigma}_\beta)$، گامای معکوس $IG(a_\mu,b_\mu)$ و نرمال بریده شده به‌ترتیب برای $\beta|\sigma_\mu^2$، σ_μ^2 و ϕ_μ توزیع‌های شرطی کامل آن‌ها به‌صورت

$$\beta|\boldsymbol{\mu},\sigma_\mu^2,\phi_\mu\sim N_p\left(\mathbf{K}\left(\mathbf{X}'\mathbf{H}^{-1}\mu+\Sigma_\beta^{-1}\mu_\beta\right),\sigma_\mu^2\mathbf{K}\right),\qquad \mathbf{K}=(\mathbf{X}'\mathbf{H}^{-1}\mathbf{X}+\Sigma_\beta^{-1})^{-1}$$

$$\sigma_\mu^2\,\Big|\,\boldsymbol{\mu},\beta,\phi_\mu\sim IG(a_\mu^*,b_\mu^*),\qquad a_\mu^*=a_\mu+{(n+p)}/{2},$$

$$b_\mu^*=\left({1}/{b_\mu}+{(\boldsymbol{\mu}-\boldsymbol{X\beta})'\boldsymbol{H}^{-1}(\boldsymbol{\mu}-\boldsymbol{X\beta})}/{2}+{(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\mu_\beta})^{\Sigma_\beta^{-1}}(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\mu_\beta})}/{2}\right)^{-1},$$

$$p(\phi_\mu|\boldsymbol{\mu},\beta,\sigma_\mu^2)\propto\frac{1}{|\boldsymbol{H}|^{1/2}}e^{\frac{-1}{2\sigma_\mu^2}(\boldsymbol{\mu}-\boldsymbol{X\beta})'\boldsymbol{H}^{-1}(\boldsymbol{\mu}-\boldsymbol{X\beta})}p(\phi_\mu), \qquad (۹)$$

است، که در آن‌ها H ماتریس هم‌بستگی فضایی با درایه‌های $H_{ij}=\rho(\|s_i-s_j\|;\phi_\mu)$ است. نمونه‌گیری از دو توزیع شرطی کامل اول با نمونه‌گیر گیبز و از توزیع $\phi_\mu|\mu,\beta,\sigma_\mu^2$ با الگوریتم متروپولیس-هستینگس قدم‌زدن تصادفی انجام می‌شود. به‌همین ترتیب توزیع‌های شرطی کامل پارامترهای σ، ξ، ϕ_z و λ به‌ترتیب از حاصل‌ضرب تابع درست‌نمایی (۵) در توزیع‌های پیشین فروض می‌شوند، که فرم بسته‌ای ندارند. نمونه‌گیری از توزیع شرطی کامل این پارامترها با الگوریتم متروپولیس-هستینگس قدم‌زدن تصادفی انجام می‌گیرد.

برای نمونه‌گیری از توزیع شرطی کامل بردار پارامتر مکان $\mu=(\mu(s_1),\dots,\mu(s_n))$ که وابستگی فضایی بزرگ مقیاس را مدل‌بندی می‌کند، می‌توان از الگوریتم متروپولیس-هستینگس قدم‌زدن تصادفی استفاده کرد

۱. Practical range

به‌همین سبب، توزیع شرطی کامل هر یک از درایه‌های بردار $\boldsymbol{\mu}$ به‌صورت:

$$\begin{aligned} p\left(\mu(s_j)|\mu_{-}, \sigma, \xi, \phi_z, \lambda, \beta, \sigma_\mu^2, \phi_\mu, \boldsymbol{y}\right) &\propto f(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{\mu}; \sigma, \xi, \phi_z, \lambda) p\left(\mu(s_j)|\mu_{-}, \beta, \sigma_\mu^2, \phi_\mu\right) \\ &\propto \frac{t_{\lambda, P\left(T_\lambda^{-1}(G_1(y_1)), \ldots, T_\lambda^{-1}(G_n(y_n))\right)}}{\prod_{i=1}^n t_\lambda\left(T_\lambda^{-1}\left(G_i(y_i)\right)\right)} \prod_{i=1}^n g_i(y_i) \\ &\times \exp\left(-\frac{1}{2s_j^2}\left(\mu(s_j) - m_j\right)^2\right), \ \ j = 1, \ldots, n \end{aligned}$$

به‌دست می‌آید، که در آن μ_{-} نشان‌دهندهٔ تمام درایه‌های μ به‌جز $\mu(s_j)$ است، و m_j و s_j^2 به‌واسطهٔ میانگین و واریانس توزیع شرطی نرمال چندمتغیره قابل حصول است. اما مشکل اصلی الگوریتم متروپولیس-هستسینگس قدم‌زدن تصادفی برای نمونه‌گیری از توزیع شرطی اخیر میزان‌سازی توزیع نامزد برای هر یک از درایه‌هاست. به‌همین دلیل در این مقاله الگوریتم متروپولیس سازوار رابرت و رزنتال (۲۰۰۹) برای نمونه‌گیری از توزیع شرطی کامل μ پیشنهاد می‌شود. در این الگوریتم توزیع نامزد در تکرار زام، $Q_j(\mu,.)$ به‌صورت:

$$Q_j(\mu,.) = (1-\alpha)N_n(\boldsymbol{\mu}, 2/38^2 \boldsymbol{S}_j / n) + N_n(\boldsymbol{\mu}, 0/1 I_n / n), \qquad (۱۰)$$

است که در آن $\boldsymbol{S}_j$ ماتریس کوواریانس نمونه‌ای، I_n ماتریس همانی و $\alpha > ۰$ هستند. ماتریس کوواریانس نمونه‌ای حاصل از نمونه‌های زنجیر تا تکرار زام در رابطهٔ بازگشتی

$$\boldsymbol{S}_j = \frac{j-1}{j}\boldsymbol{S}_{j-1} + \frac{1}{j}\left(\mu_j - \bar{\mu}_{j-1}\right)\left(\mu_j - \bar{\mu}_{j-1}\right)',$$

صدق می‌کند که در آن $\bar{\mu}_{j-1}$ میانگین نمونه‌های شبیه‌سازی شده تا تکرار j-1 است. این رابطهٔ بازگشتی باعث می‌شود محاسبات در به‌دست آوردن برآوردی از وابستگی‌های بین درایه‌های $\boldsymbol{\mu}$ در توزیع پسین، به سادگی انجام شود. ثابت α معمولاً برابر ۰/۰۵ فرض می‌شود که وجود آن در (۱۰) برای اثبات ویژگی‌های ارگودیک زنجیر لازم است.

برای نمونه‌گیری از توزیع‌های شرطی کامل σ، ξ، ϕ_z، λ و ϕ_μ الگوریتم متروپولیس-هستینگس سازوار اتخاذ می‌گردد. در این الگوریتم لگاریتم انحراف معیار توزیع نامزد نرمال مثلاً برای σ در طول اجرا با توجه به رابطهٔ

$$\log(s_{\sigma,k}) = log(s_{\sigma,k}) + \min\left(\frac{0}{01}, j^{-0.5}\right) sgn\left(\frac{0}{56} - \log(s_{\sigma,k})\right),$$

به ازای زامین دسته[1] ۵۰تایی نمونه‌های شبیه‌سازی شده تعدیل می‌شود، که در آن ۰/۵۶نرخ پذیرش تجربی و $\mathrm{sgn}(x)$ برابر ۱ و ۱- است اگر به‌ترتیب $x > 0$ و $x < 0$ باشد (رابرت و رزنتال، ۲۰۰۹).

پیش‌گویی فضایی بیزی

فرض کنید پیش‌گویی مقدار کرانگین در موقعیت $s_0 \in D$ مورد نظر باشد. در رهیافت بیزی پیش‌گویی فضایی بر اساس توزیع پیش‌گوی

$$p(Y(s_\circ)|\boldsymbol{y}) = \int p(Y(s_\circ)|\boldsymbol{\Theta},\boldsymbol{y})\, p(\boldsymbol{\Theta}|\boldsymbol{y}) d\boldsymbol{\Theta},$$

امکان‌پذیر می‌گردد که در آن محاسبهٔ انتگرال اغلب غیرممکن یا با دشواری‌هایی همراه است. اگر نمونه‌های مونت کارلوی زنجیر مارکوفی از $p(\boldsymbol{\Theta}|\boldsymbol{y})$ در اختیار باشد، می‌توان با تولید نمونه از توزیع $(Y(s_\circ)|\boldsymbol{\Theta},\boldsymbol{y})$ این انتگرال را با مجموع تقریب زد. نمونه‌گیری از توزیع پیش‌گوی $Y(s_\circ)$ با این گام‌ها انجام می‌گیرد:

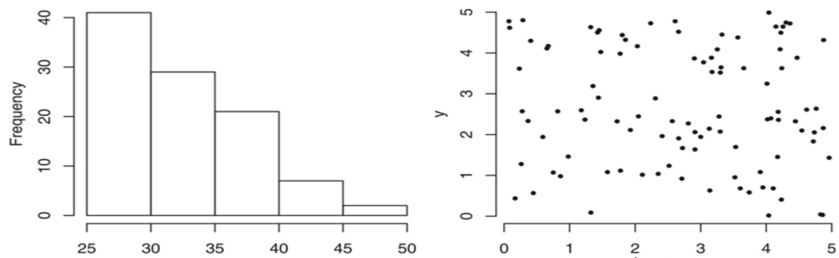
- تولید $\Theta = (\mu,\sigma,\xi,\phi_z,\lambda,\beta,\sigma_\mu^2,\phi_\mu)$ از $p(\boldsymbol{\Theta}|\boldsymbol{y})$ با تکنیک‌های مونت‌کارلوی زنجیر مارکوفی بیان شده در زیر بخش ۱،۳.
- پیش‌گویی $\mu(s_\circ)$ که به راحتی با توجه به گاوسی بودن میدان تصادفی W(.) و رابطهٔ (۷) قابل محاسبه است (دیگل و همکاران، ۱۹۹۸).
- با در اختیار داشتن $\mu(s_\circ)$ و نمونه‌های مونت کارلوی زنجیر مارکوفی سایر پارامترها، $Y(s_\circ)$ از توزیع $p(Y(s_\circ)|\boldsymbol{\Theta},\boldsymbol{y})$ شبیه‌سازی می‌شود. چون تابع مفصل بر اساس توزیع چند متغیره تی ساخته شده است، تولید نمونه از $p(Y(s_\circ)|\boldsymbol{\Theta},\boldsymbol{y})$ با تولید نمونه $Z^*(s_\circ)$ از توزیع شرطی تی و محاسبهٔ $Y(s_\circ) = G^{-1}(T_\lambda(Z^*(s_\circ)))$ همراه است، که در آن G(.) تابع توزیع $GEV(\mu(s_\circ),\sigma,\xi)$ است.

در گام آخر توزیع شرطی تی به‌این صورت به‌دست می‌آید. فرض کنید $\mathbf{x}$ یک بردار T بعدی از توزیع تی چند متغیره با درجهٔ آزادی λ، ماتریس مقیاس $\boldsymbol{\Sigma}$ و بردار پارامتر مکان با عناصر صفر باشد. حال اگر افرازهای

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{x_1} \\ \mathbf{x_2} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma'_{12} & \Sigma_{22} \end{pmatrix}$$

در نظر گرفته شود که در آن x_1 یک بردار n بعدی است. به راحتی می‌توان نشان داد که توزیع شرطی $x_2|\mathrm{x}_1$ نیز یک توزیع تی با پارامترهای زیر است:

$$\mu^* = \sigma'_{12}\Sigma_{11}^{-1}\sigma_{12},\ \ \Sigma^* = \frac{\lambda + x'^{\Sigma_{11}^{-1}}x}{\lambda + n}(\Sigma_{22} - \sigma'_{12}\Sigma_{11}^{-1}\sigma_{12}), \lambda^* = \lambda + n$$



شکل۱. بافت‌نگار حداکثرها و نمودار پراکنش موقعیت‌های فضایی

جدول۱. برآورد بیزی پارامترهای مدل

پارامتر	مقدار واقعی	برآورد بیزی	فاصله باور ۹۵%
	۳	۳/۶۳	(۲/۳۶ ،۵/۷۱)
	۰/۳	۰/۲۷	(۰/۰۲ ،۰/۸۳)
	۰/۱	۰/۱۰	(۰/۰۳ ،۰/۱۹)
	۵	۵/۲۰	(۲/۲۷ ،۲۶/۳)
	۳۰	۲۹/۷۸	(۲۸/۲۸ ،۳۱/۳۵)
	۰/۵	۰/۸۹	(۰/۱۱ ،۱/۶٤)
	۱	۰/۹۲	(۰/۱٤ ،۱/۷۲)
	۱	۰/۷۸	(۰/۵۵ ،۱/۰٤)
	۲	۲/۵۱	(۱/۲٤ ،٤/۱۵)

۱. batch

بررسی شبیه‌سازی

برای بررسی مدل فضایی (۴) با تابع مفصل تی و ارزیابی گام‌های مونت کارلوی زنجیر مارکوفی بررسی شبیه‌سازی انجام گرفت. برای این منظور ۱۰۰ مشاهده در شبکه [۰،۵]×[۰،۵] به‌طور نامنظم با مقادیر پارامتری ۳= σ، ۰/۳= ξ، ۰/۱= ϕ_z، ۵= λ، $\beta = $ (۳۰ ,۰/۵ ,۱)′، ۱ = σ_μ^2، ۲ = ϕ_μ و توابع کوواریانس نمایی برای تابع مفصل و میدان تصادفی مرتبط با μ شبیه‌سازی شدند. شکل ۱ بافت‌نگار حداکثرهای تصادفی انتخاب شده به‌همراه نمودار پراکنش موقعیت‌های فضایی را نشان می‌دهد. توزیع‌های پیشین

$$\log(\sigma), \xi \sim N(0, 10^4), \quad \phi_z \sim G(1,1), \quad \lambda \sim EXP(10),$$

$$\beta_0, \beta_1, \beta_2 \sim \mathrm{N}(0, 10^8), \qquad \sigma_\mu^2 \sim IG(0.1, 10^8), \quad \phi_\mu \sim TN_{(0,6.74)}(1.12,1) \qquad (۱۱)$$

برای پارامترها در نظر گرفته شد. قابل توجه است که میانگین توزیع نرمال بریده شده از رابطهٔ

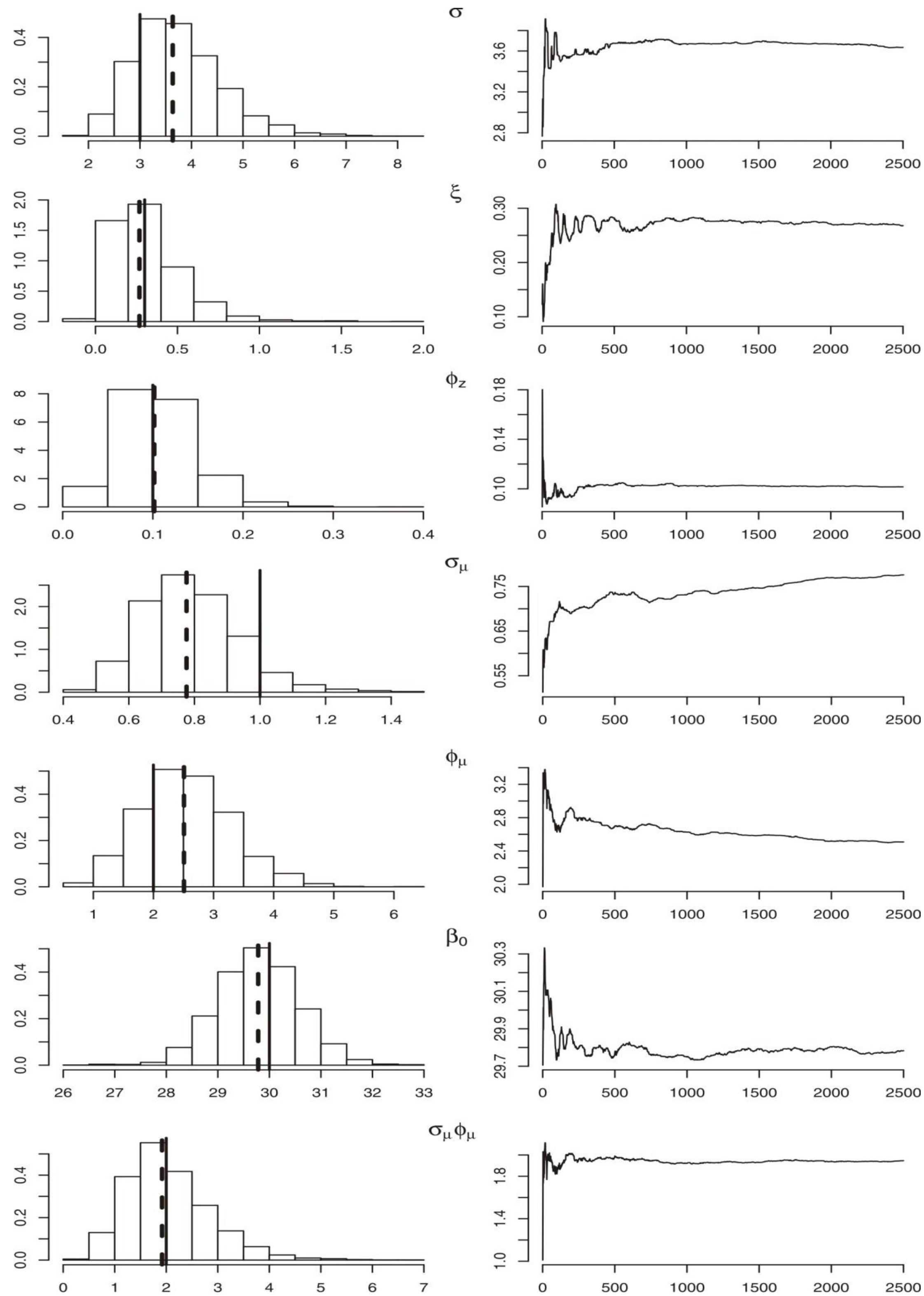
$\exp\left(-{d^*}/{\phi_\mu}\right) \approx 0.05$ با $d^* = \max\{\|s_l - s_k\|\}/2 = 1.12$ برای $l, k = 1, \dots, 100$

به‌دست آمده است. بردار ضرایب رگرسیونی $\boldsymbol{\beta} = (\beta_0, \beta_1, \beta_2)$ *متناظر با* $\boldsymbol{X} = (e, x, y)$ است، که در آن e بردار یکه، $\mathbf{x}$ و $\mathbf{y}$ نیز بردارهایی از مختصات موقعیت‌های فضایی هستند. استنباط بیزی بر اساس نمونه‌ای تصادفی با حجم ۲۵۰۰ است که از اجرای گام‌های الگوریتم مونت کارلوی زنجیر مارکوفی برای ۳۰۰۰۰۰ تکرار و مرحلهٔ داغیدن ۲۰۰۰۰۰ و از تأخیر چهلم به‌دست آمده است. بافت‌نگار و نمودار ترتیبی میانهٔ نمونه‌های تولید شده بعضی از پارامترها در شکل ۲ آمده است. بافت‌نگار توزیع نمونه‌های شبیه‌سازی شده را نمایش می‌دهد، که در آن‌ها خط پر و خطچین عمودی به‌ترتیب مقدار واقعی و برآورد بیزی پارامتر مربوط را با میانهٔ توزیع پسین نشان می‌دهد. نمودار ترتیبی میانهٔ نمونه‌های تولید شده از توزیع‌های شرطی کامل پارامترها بیان‌گر هم‌گرایی این نمونه‌هاست. نمودار ترتیبی میانهٔ نمونه‌های تولید شده از توزیع‌های شرطی کامل پارامترهای σ_μ و ϕ_μ دارای روندی در خلاف جهت یک‌دیگر هستند و به حالت مانایی نرسیده‌اند. این رفتار پارامترهای واریانس و دامنهٔ میدان مشابه با نتیجه به‌دست آمده به‌وسیلهٔ اشتاین (۱۹۹۹) است. در واقع اشتاین نشان داد که پیش‌گوهای فضایی به تک تک پارامترهای σ_μ و ϕ_μ بستگی نداشته و تحت تأثیر حاصل‌ضرب آن‌ها است. در جدول ۱ اطلاعات نموداری شکل ۲ با محاسبهٔ برآورد بیزی (میانه توزیع پسین) و فاصلهٔ باور ۹۵% کمی شده است. نتایج بیان‌گر آن است که برآوردهای مناسبی در مقایسه با مقدار واقعی حاصل شده است.

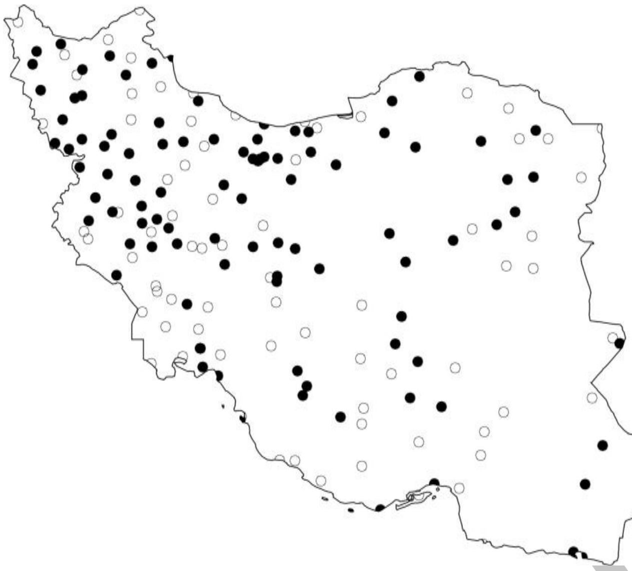
کرانگین‌های بارندگی ایران

داده‌هایی که در این تحقیق تحلیل می‌شوند، بیش‌ترین مقدار بارندگی سال ۱۳۸۶ با واحد میلی‌متر برای ۱۷۶ ایستگاه سینوپتیک هواشناسی در ایران است. شکل ۳ موقعیت قرار گرفتن این ایستگاه‌ها و شکل ۴ بافت‌نگار حداکثرهای سالانهٔ بارندگی و نمودار پراکنش حداکثرها در مقابل طول و عرض جغرافیایی مختصات مکانی ایستگاه‌ها را نشان می‌دهد. برای انجام استنباط از میان ایستگاه‌ها ۱۰۰ ایستگاه با نمونه‌گیری تصادفی ساده

انتخاب و ۷۶ ایستگاه باقی‌مانده برای انتخاب مدل به‌کار رفتند. این ایستگاه در شکل ۳ به‌ترتیب با ● و ○ مشخص شده‌اند.



شکل۲. بافت‌نگار و نمودار ترتیبی میانهٔ نمونه‌های تولید شده از توزیع‌های شرطی کامل بعضی از پارامترهای مدل. خط پر و خطچین عمودی در بافت‌نگار به‌ترتیب مقدار واقعی و برآورد بیزی هستند



شکل۳. موقعیت فضایی ایستگاه‌های سینوپتیک هواشناسی ● و○ به‌ترتیب ایستگاه‌های به‌کار رفته در استنباط و انتخاب مدل هستند

چنان‌که در شکل ۴ ملاحظه می‌شود، حداکثرهای بارندگی توزیع دم کلفتی دارند. ضرایب چولگی و کشیدگی برای این داده‌ها به‌ترتیب برابر با ۱٫۴۹ و ۵٫۷۷ هستند که از مقادیر ۰ و ۳ برای توزیع نرمال بزرگ‌ترند. این امر دم کلفت‌تر بودن توزیع داده‌ها نسبت به توزیع نرمال و استفاده از تابع مفصل تی را تا اندازه‌ای توجیح می‌کند. همچنین مشاهدات دارای روند خطی واضحی در برابر طول و عرض جغرافیایی نیستند. با وجود این، از آن‌ها به‌عنوان متغیرهای تبیینی در روند چندجمله‌ای درجه دو به‌صورت

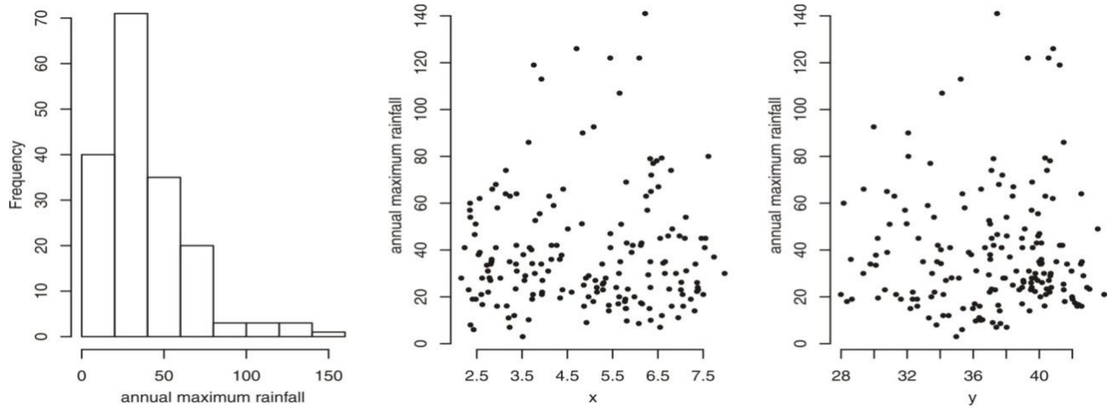
$$\boldsymbol{x}'\boldsymbol{\beta} = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 xy + \beta_4 x^2 + \beta_3 y^2,$$

استفاده شد. با در نظر گرفتن توزیع‌های پیشین به شکل (۱۱) برای پارامترهای $\log(\sigma)$، ζ، ϕ_z، λ، β، σ^2_μ و انتخاب توزیع پیشین $TN_{(0,15.2)}(c = 2.53, e = 1)$ برای ϕ_μ استنباط بیزی بر اساس نمونهٔ تصادفی به حجم ۲۵۰۰ با تعداد تکرارها، مرحلهٔ داغیدن و تأخیر مشابه با مثال شبیه‌سازی انجام گرفت.علاوه بر مدل فضایی با تابع مفصل تی مدل‌ها با تابع مفصل گاوسی و بدون تابع مفصل نیز به داده‌های بارندگی برازش شدند. استنباط بیزی برای این مدل‌ها با تعداد تکرار، مرحلهٔ داغیدن و از تأخیر یکسان اما با اندکی تغییر در توزیع‌های شرطی کامل اجرا گردید. به‌منظور مقایسهٔ مدل‌های فضایی بدون تابع مفصل و با توابع مفصل گاوسی و تی بر اساس توان پیش‌گویی‌شان، از ملاک متوسط قدر مطلق خطاهای پیش‌گویی[1] (AAPE) استفاده شد. این ملاک به‌صورت

$$AAPE = \frac{1}{n^*}\sum_{i=1}^{n}\left|\hat{Y}_i - Y_i\right|$$

تعریف می‌شود که در آن $n^* =$ ۷۶، Y_i حداکثر سالانهٔ بارندگی در i امین ایستگاه از ۷۶ ایستگاه کنار گذاشته شده برای انتخاب مدل و $\hat{Y}$ پیش‌گویی حداکثر بارندگی در ایستگاه مورد نظر است. همچنین فاکتور بیزی (کاس و رفتری، ۱۹۹۵) به صورت نسبتی از درستنمایی‌های مدل، $B_{12} = \frac{p(\mathbf{Y}|M_1)}{p(\mathbf{Y}|M_2)}$ ، برای مقایسهٔ مدل‌های رقیب استفاده شد که در آن M_1 و M_2 دو مدل رقیب و $p(\boldsymbol{Y}|M_i)$ برای i=1,2 درست‌نمایی (حاشیه‌ای) مدل هستند.

[1] Averaged absolute prediction errors



شکل۴. بافت‌نگار و نمودار پراکنش حداکثرهای سالانهٔ بارندگی در برابر طول و عرض جغرافیایی

درست‌نمایی حاشیه‌ای به‌صورت

$$p(\boldsymbol{Y}\Big|M_i) = \int f(Y|\boldsymbol{\Theta}_i, M_i)p(\boldsymbol{\Theta}_i|M_i)\,\mathrm{d}\boldsymbol{\Theta}_i$$

محاسبه می‌شود که در آن $\boldsymbol{\Theta}_i$ پارامترهای مرتبط با مدل M_i است. روش‌های متفاوتی برای تقریب انتگرال اخیر وجود دارد. این پژوهش با استفاده از نمونه‌های شبیه‌سازی شده پسینی، دو برآوردگر میانگین همساز[1] (HM) و نقاط مهم معکوس[2] (RI) به‌کار می‌رود (نیوتن و رفتری، ۱۹۹۴ و گلفند و دی، ۱۹۹۴). فاکتور بیزی برای مقایسهٔ مدل‌های M_1 و M_2 به‌صورت

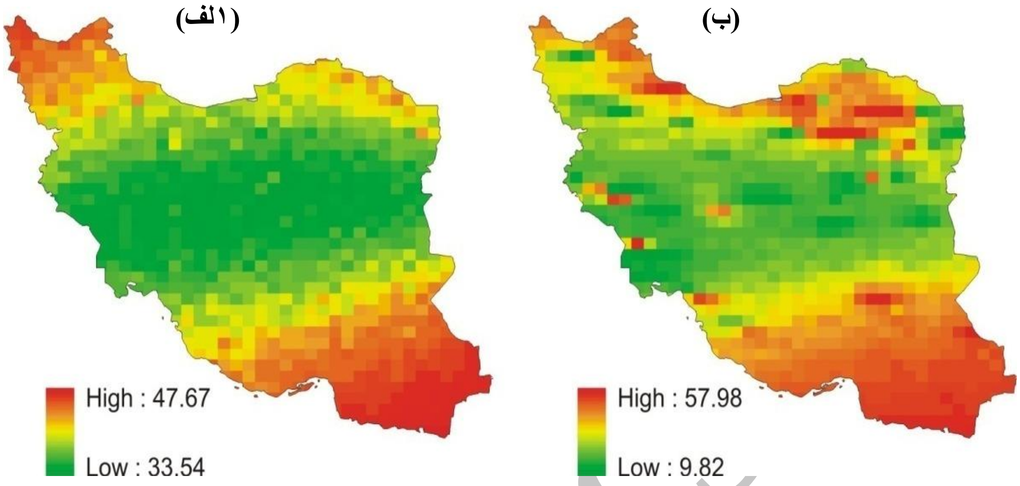
$$B_{12} = \exp\left(\log\left(\hat{\mathrm{p}}_{\mathrm{HM}}(\mathrm{Y}|\mathrm{M}_1)\right) - \log\left(\hat{\mathrm{p}}_{\mathrm{HM}}(\mathrm{Y}|\mathrm{M}_2)\right)\right)$$
$$B_{12} = \exp\left(\log\left(\hat{\mathrm{p}}_{RI}(\mathrm{Y}|\mathrm{M}_1)\right) - \log\left(\hat{\mathrm{p}}_{\mathrm{RI}}(\mathrm{Y}|\mathrm{M}_2)\right)\right)$$

با برآوردگرهای HM و RI از درست‌نمایی مدل، حاصل می‌شود. شایان ذکر است که $B_{12} >$ ۱۰ ($B_{12} <$ ۰/۱) نشان‌دهندهٔ شواهد قوی در تأیید مدل M_1 (M_2) است. جدول ۲ مقدارهای به‌دست آمده از این ملاک‌ها را نشان می‌دهد. ملاک AAPE توان پیش‌گویی مناسب مدل فضایی با تابع مفصل را نشان می‌دهد که مفصل تی در مقایسه با مفصل گاوسی پیش‌گویی‌های به واقعیت نزدیک‌تری دارد. با توجه به اطلاعات جدول ۲ فاکتور بیزی برابر با exp(۱۹/۵۲) با استفاده از برآوردگر HM برای مقایسهٔ مدل فضایی با توابع مفصل گاوسی و تی نشان‌دهندهٔ آن است که اضافه شدن پارامتر درجهٔ آزادی در تابع مفصل تی از نظر استنباطی مقرون به‌صرفه نیست. لازم به ذکر است که فاکتور بیزی با برآوردگر RI از درست‌نمایی‌های مدل نتایج یکسانی را موجب می‌شود. به همین سبب، با توجه به مقادیر ملاک‌های انتخاب مدل می‌توان نتیجه گرفت که اگر پیش‌گویی مقدار کرانگین مورد توجه باشد آن‌گاه مدل فضایی با تابع مفصل تی عمل‌کرد بهتری دارد و اگر مسئلهٔ برازش بیزی مدل با پارامترهای کم‌تر موردنظر باشد آن‌گاه تابع مفصل گاوسی مناسب‌تر است. شکل ۵ پهنه‌بندی مقادیر کرانگین بارندگی ایران را برای مدل فضایی بدون تابع مفصل و با تابع مفصل تی نشان می‌دهد.

این پهنه‌بندی بر اساس پیش‌گویی مقدار کرانگین بارندگی در ۱۶۰۰ نقطه (شبکه منظم ۴۰×۴۰) با تکنیک‌های زیربخش ۲،۴ به‌دست آمده است. واضح است که در آن پهنه‌بندی مقادیر کرانگین با مدل فضایی حاوی تابع مفصل تی از تغییرپذیری فضایی بیش‌تری برخوردار است

جدول۲. AAPE و برآورد درست‌نمایی حاشیه‌ای برای مدل‌های فضایی

مدل	l	lc	AAPE
بدون تابع مفصل	-۱۲۷/۵۳	-۱۵۴/۱۹	۲۰/۱۳
با تابع مفصل گاوسی	-۳/۶۵	-۲۲/۷۱	۱۹/۵۸
با تابع مفصل تی	-۲۳/۱۷	-۴۱/۷۳	۱۹/۱۲



شکل۵. پهنه‌بندی مقدار کرانگین بارندگی با مدل فضایی، الف) بدون تابع مفصل، ب) با تابع مفصل تی

بحث و نتیجه‌گیری

مدل فضایی با تابع مفصل برای مقادیر کرانگین معرفی شد که شامل میدان تصادفی برای پارامتر مکان و مؤلفهٔ خطایی برای مدل‌بندی تغییرات مقیاس کوچک با تعدیل فرض استقلال شرطی است. برای ساختن توزیع توأم مناسب از توزیع‌های حاشیه‌ای مقدار کرانگین تعمیم‌یافته، استفاده از تابع مفصل تی در مدل سانگ و گلفند (۲۰۰۹) پیشنهاد شد. از آن‌جا که تابع مفصل تی دارای وابستگی دمی است و تابع چگالی آن دم‌های کلفت‌تری نسبت به توزیع گاوسی دارد، چارچوب استواری را برای انجام استنباط و پیش‌گویی کرانگینی فراهم آورد. هم‌چنین الگوریتم مونت کارلوی زنجیر مارکوفی استفاده شده مشکلات همگرایی پارامترهای مدل را رفع کرد. مدل‌بندی فضایی-زمانی مقادیر کرانگین و پیش‌گویی مقدار کرانگین یکی از مسائل جالب در موقعیت فضایی و زمان دل‌خواه است. این امر با توجه به بزرگ بودن حجم داده‌های فضایی-زمانی به تعدیل الگوریتم مونت کارلوی زنجیر مارکوفی یا به‌کارگیری روش دیگری در برازش مدل با رهیافت بیزی نیاز دازد.

قدردانی و تشکر

نویسندگان مقاله از پیشنهادها و نظرات داوران محترم که در بهبود مقاله مؤثر واقع شد و نیز از قطب داده‌های ترتیبی و فضایی دانشگاه فردوسی مشهد برای حمایت مالی، تقدیر و تشکر می‌کنند.

منابع

۱. م. امیدی، م. محمدزاده، س. مرید، *تحلیل احتمالاتی شدت مدت خشکسالی در استان تهران با استفاده از توابع مفصل*، مجلهٔ تحقیقات آب و خاک ایران، جلد ۴۱، شماره ۱ (۱۳۸۹)۹۵- ۱۰۱.

۲. م. امیدی، م. محمدزاده، *مدل‌بندی درست‌نمایی و بیز تجربی خشکسالی با استفاده از تابع مفصل*، نشریه علوم دانشگاه تربیت معلم، جلد ۱۰، شماره ۱ (۱۳۹۰) ٦٤٣-٦٤٥.

3. E. Casson, S. Coles, "Spatial Regression Models for Sample Extremes, Extremes", 1 (1999) 449-468.

4. S. G. Coles, "An Introduction to Statistical Modeling of Extreme Values", Springer-Verlag, London (2001).

5. D. Cooley, D. Nychka, P. Naveau, "Bayesian Spatial Modeling of Extreme Precipitation Return Levels", Journal of the American Statistical Association, 102 (2007) 824-840.

6. N. Cressie, "Statistical for Spatial Data", Wiley, New York (1993).

7. S. Demarta, A. J. McNeil, "The t Copula and Related Copulas", International Statistical Review, 73 (2005) 111-129.

8. P. J. Diggle, J. A. Tawn, R. A. Moyeed, "Model-based Geostatistics", Applied Statistics, 47, (1998) 299-350.

9. A. Gelfand, D. Dey, "Bayesian Model Choice: Asymptotic and Exact Calculations", Journal of the Royal Statistical Society, Series B, 56 (1994) 501-514.

10. R. Kass, A. Raftery, "Bayesian Factor", Journal of the American Statistical Association, 90, (1995) 773-792.

11. R. B. Nelsen, "An Introduction to Copulas", Springer-Verlag, New York (2006).

12. M. Newton, A. Raftery, "Approximate Bayesian Inference by Weighted Likelihood Bootstrap", Journal of the Royal Society, Series B, 56 (1994) 1-48.

13. G. O. Roberts, J. S. Rosenthal, "Examples of Adaptive MCMC", Journal of Computational and Graphical Statistics, 18 (2009) 349-367.

14. H. Sang, A. Gelfand, "Continious Spatial Process Models for Spatial Extreme Values", Journal of Agricaltural, Biological, and Environmental Statistical Statistics, 15 (2009) 49-65.

15. M. Stein, "Interpolation of Spatial Data: Some Theory for Kriging, Springer-Verlag, New York (1999).