

مدلسازی ساختار دوبعدی میدان الکترومغناطیس به روش تفاضل محدود در مسائل ژئوفیزیکی و محاسبه آمپدانس

محمد ابراهیمی دباغ^۱، میرستار مشین چی اصل^۲، حمیدرضا سیاهکوهی^۳، مرتضی گنج پزان^۴

چکیده

در این تحقیق با شبیه سازی یک محیط معین، سعی می‌شود معادلات ماکسول مورد نیاز برای بررسی امواج الکترومغناطیس با تقریب مناسب به صورت روابط خطی در آیند و با حل این معادلات، مجهولاتی نظیر توزیع میدانهای الکتریکی و مغناطیسی حاصل از میدان الکترومغناطیس در محیط دو بعدی شامل آنومالیهای توده ای محاسبه شود. برای مدلسازی نیازمند محیطی هستیم که ابعاد و جنس مشخصی داشته باشد این محیط در مدلسازی دو بعدی از شبکه ای نقاط تشکیل شده که به صورت منظم اندیس گذاری می‌شود فاصله نقاط و شکل هندسی کاملاً مشخص است. مجهولات مقادیر مولفه‌های میدان الکتریکی و مغناطیسی در تک تک نقاط شبکه است که مقادیر این مولفه‌ها به هندسه و جنس محیط بستگی دارد از این مقادیر نتایج گوناگونی استخراج می‌گردد. جهت حل معادلات تحلیلی مورد نظر از روش تفاضل محدود استفاده گردید. از این روش در دو وضعیت تک بعدی و دو بعدی جهت حل معادلات تحلیلی و محاسبه آمپدانس، تعیین عمق نفوذ استفاده شده است همچنین شرایط مرزی نیز لحاظ شد که در این تحقیق از شرایط مرزی نوین استفاده و نتایج میدانهای الکترومغناطیسی در مرزها بررسی گردید. استفاده از این روش عددی نتایج خوبی همراه داشته، از جمله مواجهه با ساختارهای ناهمگون که یکی از اساسی ترین مسائل اکتشافات ژئوفیزیکی می‌باشد. سیستم مورد نظر در محیط نرم افزار MATLAB شبیه سازی گردید و در چندین ساختار ناهمگون با توجه به شرایط مرزی و تغییر جنس لایه‌های زمین تست شد. استفاده از روش تفاضل محدود نسبت به دیگر روشهای متداول از دقت بیشتری برخوردار بوده و قابلیت انعطاف پذیری بسیار بالایی دارد.

کلید واژه‌ها: آمپدانس، تفاضل محدود، میدان الکترومغناطیسی، معادلات ماکسول

On the Finite-Difference 2-D Modeling of Electro Magnetic Field in the Geophysical Problems and Impedance Calculate

Mohammad Ebrahimi Dabbagh, Dr. Mir-Sattar Meshinchi,
Dr. Hamid-Reza Siahkahi, Dr. Morteza Gachpazan

Abstract

In the present work, we tried to find linear relations with suitable approximation for Maxwell functions needed for the examination of electromagnetic waves by simulation of a specified region. Then, by solving these functions, unknown functions such as distribution of electric and magnetic fields resulted from electromagnetic fields in two dimensional environments including bulk anomalies are prone to be solved. For these modeling, an environment with specific dimensions and nature is needed. This environment is formed

- ۱- دانشجوی دکتری ژئوفیزیک دانشگاه علوم و تحقیقات تهران
- ۲- هیئت علمی دانشگاه علوم و تحقیقات تهران
- ۳- هیئت علمی دانشگاه علوم و تحقیقات تهران
- ۴- هیئت علمی دانشگاه فردوسی مشهد گروه ریاضی کاربردی

from a lattice of points which are indexing regularly in two-dimensional modeling. In this media the distances between points and geometrical structure are completely specified. Therefore, electric and magnetic vectors are the unknown quantities in all points of the lattice and their amounts are dependent to the geometry and nature of the environment. Different results could be deduced from these findings.

FDTD method is used for solving the analytical equations. This method is used for solving analytical equations and calculating impedance in one- and two-dimensional situations. Moreover, Neumann and Dirichlet absorbing boundary conditions were used to discuss electromagnetic field results in these boundaries. This numerical method led us to satisfactory results such as solving the problems existing in abnormal structures which are one of the most important problems in geophysical explorations. Time parameter and determination of linear or non-linear changes occurred in electromagnetic field in the frequency domain are another worry which is solved in our numerical method.

Finally, the simulated results obtained from solving two-dimensional differential Maxwells and wave's equations in homogeneous and abnormal environments by using FD method in one- and two-dimensions were recorded for each sample. Comparison of the results obtained from the two above method, revealed acceptable operation and good behavior of the simulated system

Keywords: FD Method, two dimensional, electromagnetic field, Geophysical exploration

مقدمه

گسسته سازی می‌گردد به طوریکه این روابط قابل اجرا توسط رایانه باشد. عمومی ترین روشهای عددی شامل، روش گشتاور (MOM)، روش عناصر محدود (FEM)، روش شرایط مرزی (BEM) و روش تفاضل محدود (FD) است. در این تحقیق از روش تفاضل محدود استفاده شده که ویژگیهای خاصی دارد. تحقیقات زیادی در زمینه رفتار امواج الکترومغناطیسی در محیط یک بعدی انجام شده ولی این تحقیق به بررسی این امواج در محیطهای دو بعدی که دارای آنومالیهای توده ای با استفاده از روش FD می‌پردازد. تحقیقات زیادی در زمینه پدیده‌های ژئوفیزیکی و روش FD انجام شده است که مختصرا به آن پرداخته می‌شود.

YEE در سال ۱۹۶۶ اساس و پایه تکنیکهای عددی را برای حل معادلات کرل ماکسول به طور مستقیم در حوزه زمانی در شبکه فضایی توصیف

امروزه روش الکترومغناطیس یکی از روشهای بسیار مهم در اکتشافات ژئوفیزیکی است. این امر به دوشکل متداول بوده، استفاده از روشهای تجربی و روشهای مدل‌سازی. روشهای تجربی مشکلات و موانع متعددی دارد از جمله امکانات، هزینه‌ها و خطاهای سیستمی که تقریبا اجتناب ناپذیر است. در روشهای مدل‌سازی به طور کلی روابط تحلیلی با روشهای خاصی به روابط عددی تبدیل می‌گردد و با حداکثر سرعت و کمترین خطا پردازش انجام خواهد شد. اما خود روش مدل‌سازی تحلیل نیز دارای نقاط ضعفی است از جمله این موارد مواجهه با شرایط پیچیده و مشکل بوده که راه حل پیشنهادی استفاده از روشهای عددی می‌باشد. در روشهای عددی پایه و اساس روابط همان روابط تحلیلی است که در آنها روابط انتگرالی و دیفرانسیلی با تقریب خوب

مغناطیسی در سطح کارت پلاستیکی) ایجاد گردید. Hayakawa در سال ۲۰۰۲ مدلسازی FDTD را از موج هدایت شده یون کره ای، کره زمین را برای پدیده فیزیکی یا فرکانس پایین ایجاد نمودند. Kimmo در سال ۲۰۰۳ بررسی یک بعدی میدان الکترومغناطیس در ساختار شبکه ارائه داد.

در بخش اول به بررسی شبیه سازی یک بعدی امواج الکترومغناطیس با استفاده از روش FD پرداخته شده است در بخش دوم استفاده از FD دو بعدی جهت تعیین عمق نفوذ و آمپدانس زمینهایی با ساختارهای مختلف بیان شد در بخش سوم به بررسی معادلات قطبش H و در بخش چهارم به بررسی نتایج و دستاوردهای این تحقیق پرداخته شده است.

شبیه سازی یک بعدی امواج الکترومغناطیس با استفاده از روش FDTD

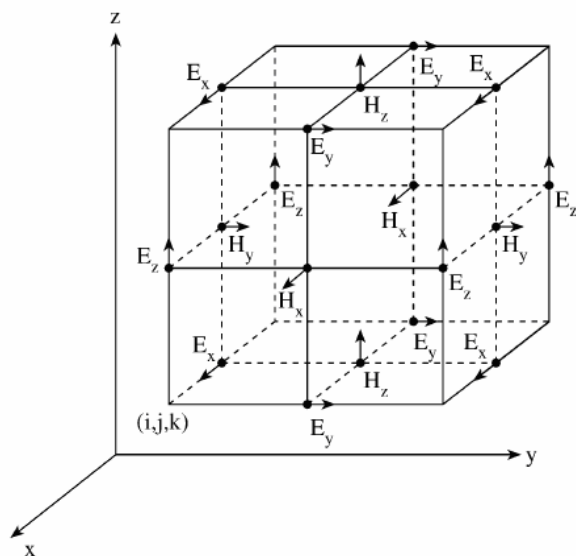
این بخش، معرفی مرحله به مرحله ی روش FDTD است و با ساده ترین مسئله موجود شروع می شود. شبیه سازی پالسی که در فضای آزاد در یک بعد منتشر می شود. ابتدا به تشریح و فرمول سازی فضای آزاد یک بعدی به روش FDTD پرداخته می شود.

۱-۲- فرمول سازی فضای آزاد یک بعدی:

معادلات وابسته به زمان ماکسول در فضای آزاد بدین صورت است:

کرد [1], Taflove در سال ۱۹۷۵ اولین مدلهای FDTD را از نفوذ امواج الکترومغناطیسی در حالت های ثابت سینوسی به یک محیط فلزی استوانه ای محاسبه کرد [2] Taflove, در سال ۱۹۹۵ تئوری روش تفاضل محدود در حوزه فرکانس با توجه به امواج الکتروالکترو دینامیک انجام دادند [3]. Kans و همکارانش در سال ۱۹۹۳ با استفاده از روش تفاضل محدود در حوزه زمان به بررسی امواج الکترومغناطیس پردازند [4]. Sullivan از یک PML ساده شده در روش تفاضل محدود در حوزه زمان استفاده نمود [5]. اولین مدلهای پراکنندگی امواج الکترومغناطیسی را برای محاسبه میدان های نزدیک و میدان های دور برای ساختارهای با حالت ثابت سینوسی ارائه دادند Huffman در سال ۱۹۸۴ روش الکترومغناطیس را برای مدلهای ناهمگون که شبکه منظمی دارند تعمیم داد و پروفیسور FD Liao را توسعه بخشیدند و آن بر پایه برون یابی فضایی در میدان های مجاور برای محدود کردن شبکه بیرونی می باشد. Gwarek در سال ۱۹۸۵ فرمول مداری معادل توده ای FDTD را ایجاد و معرفی نمود. HoferChoi در سال ۱۹۸۶ اولین شبیه سازی FDTD را از ساختارهای موجی به ثبت رساندند. Umashankar تحقیقات زیادی بین سالهای ۱۹۸۸-۱۹۹۲ انجام دادند تکنیکهای زیر سلولی در مسیر محیطی را ایجاد کرد تا فرصت ایجاد نوسازی سیم های باریک و مجموعه سیمی ایجاد شود و برای نفوذ مدلسازی از طریق شکافها در صفحات جریان راهبردی را ایجاد کرد. Zhang در سال ۱۹۸۸ مدل سازی FDTD از میکرواستریب (لایه های ماده

با $\Delta x k =$ ساخت معادله‌های ۶ و ۵ ثابت می‌شود که میدان‌های E و H هم در فضا و هم در زمان لا به لای هم قرار گرفته‌اند. شکل ۱ تداخل میدان‌های E و H را در فضا و زمان در تشکیل FDTD نشان می‌دهد.



شکل ۱- تداخل میدانهای E و H .

H از آرگومان‌های $(k - \frac{1}{2})$ و $(k + \frac{1}{2})$ استفاده می‌کند تا نشان دهد که کمیت‌های میدان H بین کمیت‌های میدان E واقع شده‌اند. بالانویس $n - \frac{1}{2}$ و $n + \frac{1}{2}$ نشان می‌دهد که آن بترتیب کمی بعد یا قبل از n روی می‌دهد.

معادله (۵) و (۶) را می‌توان در الگوریتم تکراری

دوباره سازی نمود که به صورت زیر می‌باشد:

$$E_x^{n+\frac{1}{2}}(k) = E_x^{n-\frac{1}{2}}(k) - \frac{\Delta t}{\epsilon_0 \Delta x} [H_y^n(k + \frac{1}{2}) - H_y^n(k - \frac{1}{2})] \quad (7)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon_0} \nabla \times H \quad (1)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times E \quad (2)$$

E و H بردارهایی سه بعدی‌اند بنابراین روی هم رفته معادلات ۱ و ۲ نشان دهنده سه معادله‌اند، مدل یک بعدی ساده فقط با استفاده از E_x و H_y شروع می‌شود، بنابراین معادلات ۱ و ۲ به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = -\frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial H_y}{\partial z} \quad (3)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial t} = -\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial E_x}{\partial z} \quad (4)$$

اینها معادلات موج تخت با جهت میدان الکتریکی در جهت x و میدان مغناطیسی در جهت y و حرکت و انتقال در جهت z هستند.

با در نظر گرفتن تقریب‌های تفاضل مرکزی برای هر دو مشتق زمانی و مکانی داریم:

$$\frac{E_x^{n+\frac{1}{2}}(k) - E_x^{n-\frac{1}{2}}(k)}{\Delta t} = -\frac{1}{\epsilon_0} \times \frac{H_y^n(k + \frac{1}{2}) - H_y^n(k - \frac{1}{2})}{\Delta x} \quad (5)$$

$$\frac{H_y^{n+1}(k + \frac{1}{2}) - H_y^n(k + \frac{1}{2})}{\Delta t} = -\frac{1}{\mu_0} \times \frac{E_x^{n+\frac{1}{2}}(k+1) - E_x^{n+\frac{1}{2}}(k)}{\Delta x} \quad (6)$$

در این دو معادله، زمان با بالانویس (توان) n به معنای زمان $t = \Delta t.n$ مشخص شده است. اصطلاح $n+1$ به معنای یک مرحله زمانی جلوتر است. اصطلاحات در پرانتز نشان دهنده مسافت هستند. Z

$$\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \frac{\Delta t}{\Delta x} = c_0 \cdot \frac{\Delta x / 2 \cdot c_0}{\Delta x} = \frac{1}{2} \quad (13)$$

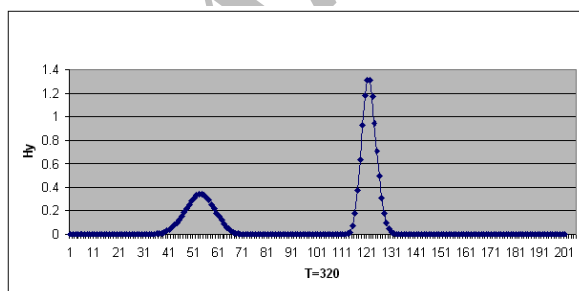
با بازنویسی معادلات (۱۰) و (۱۱) در محیط نرم افزار matlab, c بدست می آید. n و n+1 و $n - \frac{1}{2}$ بصورت توان وجود ندارند. در روش FDTD, زمان ضمنی است.

$$e_x(k) = e_x(k) + 0.5 * (h_y(k-1) - h_y(k)) \quad (14)$$

$$h_y(k) = h_y(k) + 0.5 * (e_x(k) - e_x(k+1)) \quad (15)$$

e_x در طرف راست مساوی با کمیت قبلی در $n - \frac{1}{2}$ و e_x در طرف چپ کمیت جدید $n + \frac{1}{2}$ است که محاسبه شده، با این وجود محل آن مشخص گردیده است. تنها اختلاف این است که در آرایه برنامه مشخص کنند.

در شبیه سازی انجام شده یک پالس گوسی را از گوشه فضای مسئله ایجاد نموده و پالس طبق شکل های (۲) و (۳) منتشر می شود.



شکل ۲- نمودار پالس گوسی H_y پس از ۳۲۰ گام زمانی

$$H_y^{n+1}(k + 1/2) = H_y^n(k + 1/2) - \frac{\Delta t}{\mu_0 \Delta x} [E_x^{n+1/2}(k+1) - E_x^{n+1/2}(k)] \quad (8)$$

باید توجه داشت که محاسبات، هم در فضا و هم در زمان قرار گرفته اند. برای مثال در معادله (۷) کمیت جدید E_x از کمیت قبلی E_x و جدیدترین کمیت H_y محاسبه شده است. این پارادایم بنیادین روش تفاضل محدود حوزه زمان FDTD می باشد. معادلات (۷) و (۸) بسیار مشابه اند اما از آنجاییکه ϵ و μ از نظر درجات بزرگی با هم فرق دارند، E_x و H_y هم از نظر درجات بزرگی باهم متفاوتند. اینکار با ایجاد تغییر زیر در متغیرها انجام می شود:

$$\tilde{E} = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E \quad (9)$$

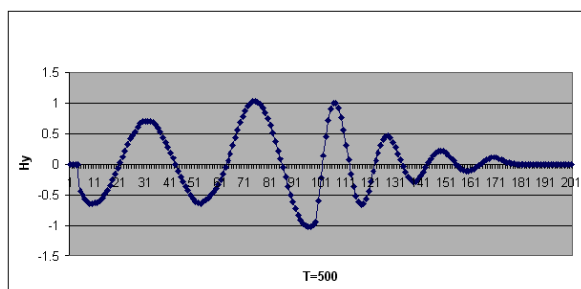
با جایگذاری در معادلات (۷) و (۸) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \tilde{E}_x^{n+1/2}(k) &= \tilde{E}_x^{n-1/2}(k) - \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \frac{\Delta t}{\Delta x} [H_y^n(k + 1/2) - H_y^n(k - 1/2)] \\ H_y^{n+1}(k + 1/2) &= H_y^n(k + 1/2) - \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \frac{\Delta t}{\Delta x} [\tilde{E}_x^{n+1/2}(k+1) - \tilde{E}_x^{n+1/2}(k)] \end{aligned} \quad (10)$$

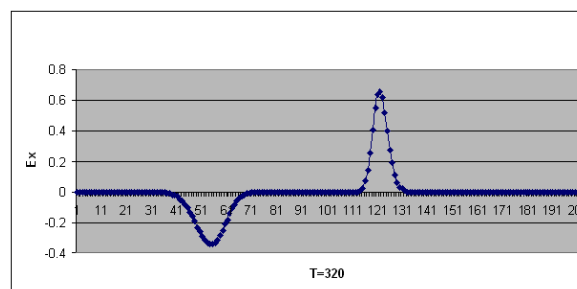
زمانیکه Δx اندازه سلول انتخاب شد آنگاه Δt مرحله زمانی از طریق:

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{2 \cdot c_0} \quad (12)$$

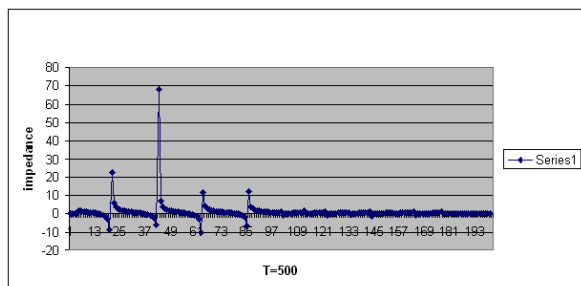
تعیین می شود که در آن c_0 سرعت نور در فضای آزاد (خلاء) است. بنابراین:



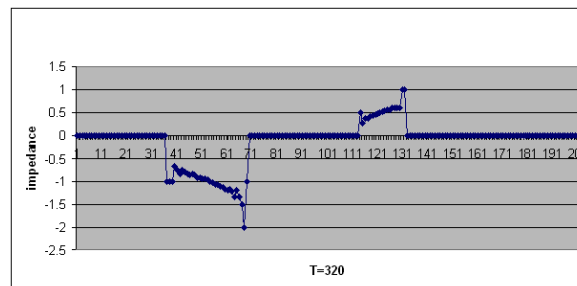
شکل ۶- نمودار پالس سینوسی Hy پس از ۵۰۰ گام زمانی



شکل ۳- نمودار پالس گوسی Ex پس از ۳۲۰ گام زمانی



شکل ۷- نمودار آمپدانس Zx پس از ۵۰۰ گام زمانی



شکل ۴- نمودار آمپدانس Zx پس از ۳۲۰ گام زمانی

شبه‌سازی دو بعدی امواج الکترومغناطیس با

استفاده از روش FDTD

بار دیگر با معادلات نرمالیزه ماکسول که در

بخش ۲ بکار رفته شروع خواهیم کرد.

$$\frac{\partial \tilde{D}}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}} \nabla \times \tilde{H} \quad (16)$$

$$\tilde{D}(\omega) = \epsilon_r^*(\omega) \tilde{E}(\omega) \quad (17)$$

$$\frac{\partial \tilde{H}}{\partial t} = -\frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}} \nabla \times \tilde{E} \quad (18)$$

وقتی به شبیه‌سازی دو بعدی و سه بعدی

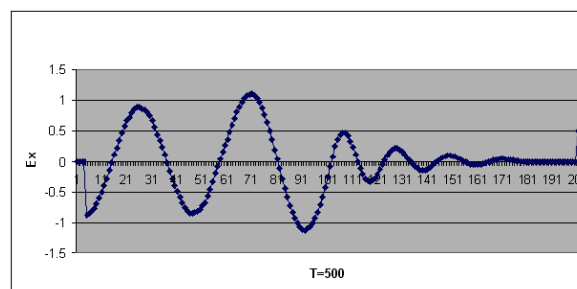
می‌پردازیم، با شش مولفه میدان مختلف مواجه

خواهیم شد که عبارتند از: $E_x, E_y, E_z, H_x, H_y,$

H_z در شبیه‌سازی دو بعدی بین یکی از دو گروه از

هر سه بردار را انتخاب می‌کنیم.

همانطور که ملاحظه می‌شود میدان H_y در هر دو مسیر مثبت است ولی میدان E_x در مسیر چپ منفی است، شکل (۵) و (۶) موج سینوسی را بعد از ۵۰۰ گام زمانی نمایش می‌دهد که در وسط مسیر به یک دی الکتریک کم اتلاف با ثابت الکتریک ۴ و رسانایی ۰/۰۴ برخورد می‌کند و نشاندهنده اینست که موج در داخل رسانا میرا می‌شود و آمپدانس (Z) برای فضای آزاد در شکل (۷) مورد بررسی قرار گرفته است.



شکل ۵- نمودار پالس سینوسی Ex پس از ۵۰۰ گام زمانی

$$\frac{E_z^{n+\frac{1}{2}}(i, j+1) - E_z^{n+\frac{1}{2}}(i, j)}{\Delta y}$$

$$\frac{H_y^{n+1}(i + \frac{1}{2}, j) - H_y^n(i + \frac{1}{2}, j)}{\Delta t}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}} \frac{E_z^{n+\frac{1}{2}}(i+1, j) - E_z^{n+\frac{1}{2}}(i, j)}{\Delta x} \quad (24)$$

با استفاده از نوع مشابه تغییر و تحول مانند بخش دوم شامل:

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{2C_0}$$

معادلات زیر را بدست می آوریم:

$$dz[i][j] = dz[i][j] + 0.5 * (hy[i][j] - hy[i-1][j] - hx[i][j] + hx[i][j-1]) \quad (25)$$

$$ez[i][j] = gaz[i][j] * (dz[i][j] - iz[i][j]) \quad (26)$$

$$iz[i][j] = iz[i][j] + gbz[i][j] * ez[i][j] \quad (27)$$

$$hx[i][j] = hx[i][j] + 0.5 * (ez[i][j] - ez[i][j+1]) \quad (28)$$

$$hy[i][j] = hy[i][j] + 0.5 * (ez[i+1][j] - ez[i][j]) \quad (29)$$

توجه داریم که چه رابطه ای بین E_z و D_z مانند دی الکترونیک ساده با اتلاف در حالت یک بعدی است. آشکارا برای گنجانیدن عبارات وابسته به فرکانس همان اصلاحات را می توان اعمال کرد.

۱-۳- لایه کاملاً منطبق (PML)

تاکنون مسئله شرایط مرز جاذب (ABC_s) را فقط به طور مختصر ذکر شده است. اندازه ناحیه شبیه سازی شده با استفاده از FDTD، از طریق برنامه matlab محدود می شود (۴۰*۴۰). برای مثال در شبیه سازی دوبعدی بخش قبل، برنامه حاوی ماتریس های

(۱) حالت مغناطیسی عرضی TM که متشکل از E_z, H_x, H_y .

(۲) حالت الکتریکی عرضی TE که متشکل از E_x, E_y, H_z .

ابتدا با حالت TM کار می شود.

معادلات (۱۸-۱۶) را باید کاهش داد:

$$\frac{\partial D_z}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}} \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \quad (19)$$

$$D_z(\omega) = \epsilon_r^*(\omega) E_z(\omega) \quad (20)$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}} \frac{\partial E_z}{\partial y} \quad (21)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}} \frac{\partial E_z}{\partial x} \quad (22)$$

مانند شبیه سازی یک بعدی، محاسبه تداخل متقارن میدانها ضروری است. قرار دادن معادلات (۱۹)، (۲۱) و (۲۲) در طرح تفاضل محدود منجر به معادلات تفاضلی زیر می شود:

$$\frac{D_z^{n+\frac{1}{2}}(i, j) - D_z^{n-\frac{1}{2}}(i, j)}{\Delta t} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}} \left(\frac{H_y^n(i + \frac{1}{2}, j) - H_y^n(i - \frac{1}{2}, j)}{\Delta x} \right) - \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}} \left(\frac{H_x^n(i, j + \frac{1}{2}) - H_x^n(i, j - \frac{1}{2})}{\Delta y} \right) \quad (23)$$

$$\frac{H_x^{n+1}(i, j + \frac{1}{2}) - H_x^n(i, j + \frac{1}{2})}{\Delta t} = -\frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}}$$

آنچه مهم است محیطی با اتلاف که پالس قبل از برخورد با محیط از بین برود. اینکار با مختلط در نظر گرفتن ϵ و μ از معادله (۳۱) انجام می‌شود، زیرا قسمت موهومی نشان دهنده ی آن قسمتی است که سبب از بین رفتن موج (هدر) شده است. بنابراین در این مرحله به معادلات (۱۹-۲۲) مراجعه می‌گردد و همه چیز به حوزه فوریه انتقال داده می‌شود. معادلات به حوزه فوریه در زمان نگاشت داده، بنابراین $\frac{d}{dt}$ می‌شود $j\omega$. این مسئله مشتقات مکانی را تحت تاثیر قرار نخواهد داد.

$$j\omega D_z = C_0 \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \quad (32)$$

$$D_z(\omega) = \epsilon_r^*(\omega) E_z(\omega) \quad (33)$$

$$j\omega H_x = -C_0 \frac{\partial E_z}{\partial y} \quad (34)$$

$$j\omega H_y = C_0 \frac{\partial E_z}{\partial x} \quad (35)$$

باید در نظر داشت که ϵ و μ را از مشتقات مکانی در معادلات (۳۲-۳۵) برای واحدهای نرمالیزه حذف شده است. به جای قرار دادن آنها جهت اجرای PML، ثابت‌های دی الکتریکی موهومی و تراپذیری‌های $(\mu_{F_x}^*, \mu_{F_y}^*, \epsilon_{F_z}^*(\omega))$ را افزوده می‌شود.

$$j\omega D_z \epsilon_{F_z}^*(x) \epsilon_{F_z}^*(y) = C_0 \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \quad (36)$$

$$D_z(\omega) = \epsilon_r^*(\omega) E_z(\omega) \quad (37)$$

دوبعدی برای کمیت‌های تمامی میدان‌های h_y, h_x, e_z, dz و همچنین ماتریس‌هایی برای در بر گرفتن پارامترهای gz, iz, gbz و gaz است.

راهی برای تشخیص موج واقعی و انعکاس بی ارزش وجود ندارد. به همین علت است که ABC_s امکان استفاده از کاربرد FDTD را می‌دهد. روش‌های مختلفی برای حل این مشکل وجود دارد. یکی از انعطاف پذیرترین و موثرترین شرایط مرزی جذب، (ABC_s) ، لایه منطبقی است که Berenger آنرا شکل داده است. ایده اصلی این است که اگر یک موج در محیط A انتشار یافته و وارد محیط B شده، مقدار انعکاس از طریق مقاومت ظاهری (آمپدانس) دو محیط نشان داده می‌شود.

$$\Gamma = \frac{\eta_A - \eta_B}{\eta_A + \eta_B} \quad (30)$$

که از طریق ثابت‌های دی الکتریک ϵ و تراپذیری‌های μ دو محیط مشخص می‌شود:

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad (31)$$

تا بحال فرض شده که μ ثابت است، بنابراین وقتی پالس انتشار از $\epsilon=1$ به $\epsilon=4$ تبدیل شد، تغییری در آمپدانس دیده می‌شود و بخش انعکاسی پالس بر اساس معادله (۳۰) مشخص می‌شود. با این وجود اگر ϵ و μ به نحوی تغییر یابند که η ثابت بماند Γ صفر خواهد شد و هیچ انعکاسی رخ نمی‌دهد. این مورد هنوز هم مشکل را حل نمی‌کند چرا که پالس، انتشار در محیط جدید را ادامه خواهد داد.

فرض می‌شود که هر یک از کمیات مختلط گروه (مجموعه) به صورت زیر است:

y یا x = m برای:

$$\varepsilon_{Fm}^* = \varepsilon_{Fm} + \frac{\sigma_{Dm}}{j\omega\varepsilon_0} \quad (43)$$

y یا x = m برای:

$$\mu_{Fm}^* = \mu_{Fm} + \frac{\sigma_{Hm}}{j\omega\varepsilon_0} \quad (44)$$

انتخاب پارامترهای ذیل معادلات (۴۱) و (۴۲) را ایفا می‌کند.

$$\varepsilon_{Fm} = \mu_{Fm} = 1 \quad (45)$$

$$\frac{\sigma_{Dm}}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma_{Hm}}{\mu_0} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \quad (46)$$

با جایگزینی معادله (۴۳-۴۴) در معادله (۴۵-۴۶) کمیت معادله (۴۰) به صورت زیر می‌شود:

$$\eta_0 = \eta_m = \sqrt{\frac{\mu_{Fx}^*}{\varepsilon_{Fx}^*}} = \sqrt{\frac{1 + \sigma(x)/j\omega\varepsilon_0}{1 + \sigma(x)/j\omega\varepsilon_0}} = 1$$

این مسئله اولین ملزومات فوق را ایفا می‌کند اگر σ کم کم همزمان با ورود در PML افزایش یابد. معادلات (۳۶)، (۳۸) و (۳۹) سبب دقیق شدن D_z و H_y می‌شود.

با اجرای PML فقط در مسیر x آغاز می‌شود. بنابراین فقط کمیت‌های وابسته به x ε_F^* و μ_F^* در معادله (۳۶-۳۹) را حفظ می‌کنیم.

$$j\omega D_z \cdot \varepsilon_{Fz}^*(x) = C_0 \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right)$$

$$j\omega H_x \cdot \mu_{Fx}^*(x) = -C_0 \frac{\partial E_z}{\partial y}$$

$$j\omega H_x \mu_{Fx}^*(x) \mu_{Fy}^*(y) = -C_0 \frac{\partial E_z}{\partial y} \quad (38)$$

$$j\omega H_y \mu_{Fy}^*(x) \mu_{Fx}^*(y) = C_0 \frac{\partial E_z}{\partial x} \quad (39)$$

چندین موضوع شایان توجه است. ابتدا کمیت ε_F به همراه چگالش شار D است، نه میدان الکتریکی E. دوم، دو کمیت را هر یک به ε_F در معادله (۳۶) و μ_F را در معادلات (۳۸) و (۳۹) افزوده شده است، یکی برای مسیر x و دیگری مسیر y. در پایان چیزی به معادله (۳۷) اضافه نشد. این کمیت‌های موهومی برای اجرای PML کاری با کمیت‌های حقیقی $\varepsilon_r^*(\omega)$ که محیط را مشخص می‌کنند ندارند.

Sacks و همکارانش نشان دادند [13] که برای تشکیل PML دو شرط وجود دارد:

۱- آمپدانس گذرا از محیط زمینه به PML باید ثابت باشد.

$$\eta_0 = \eta_m = \sqrt{\frac{\mu_{Fx}^*}{\varepsilon_{Fx}^*}} = 1 \quad (40)$$

آمپدانس به علت واحدهای نرمالیزه ما، ۱ است. ۲- جهت عمود بر مرز (برای مثال مسیر x) ثابت دی الکتریک نسبی و تراوایی نسبی، باید بر عکس سایر جهت‌ها باشند.

$$\varepsilon_{Fy}^* = \frac{1}{\varepsilon_{Fy}^*} \quad (41)$$

$$\mu_{Fx}^* = \frac{1}{\mu_{Fy}^*} \quad (42)$$

$$\frac{D_z^{n+1/2}(i, j) + D_z^{n-1/2}(i, j)}{2} = D_z^{n+1/2}(i, j)^*$$

$$\frac{1}{\Delta t} \left[1 + \frac{\sigma_D(i)\Delta t}{2\varepsilon_0} \right] - D_z^{n-1/2}(i, j) \cdot \frac{1}{\Delta t} \left[1 - \frac{\sigma_D(i)\Delta t}{2\varepsilon_0} \right]$$

اگر آنرا در معادله (۴۷) به همراه مشتقات مکانی قرار داده شود فرمول زیر بدست می آید:

$$D_z^{n+1/2}(i, j) = gi3(i) \cdot D_z^{n-1/2}(i, j) + gi2(i) \cdot 0.5 [H_y^n(i + \frac{1}{2}, j) - H_y^n(i - \frac{1}{2}, j) - H_x^n(i, j + \frac{1}{2}) - H_x^n(i, j - \frac{1}{2})] \quad (50)$$

بار دیگر از این حقیقت استفاده شده که:

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} C_0 = \frac{\Delta x / (2 \cdot C_0)}{\Delta x} C_0 = \frac{1}{2}$$

پارامترهای جدید $gi2$ و $gi3$ از طریق زیر بدست آمده اند:

$$gi2(i) = \frac{1}{1 + \sigma_D(i)\Delta t / (2 \cdot \varepsilon_0)} \quad (51)$$

$$gi3(i) = \frac{1 - \sigma_D(i)\Delta t / (2 \cdot \varepsilon_0)}{1 + \sigma_D(i)\Delta t / (2 \cdot \varepsilon_0)} \quad (52)$$

و تقریباً روش یکسان معادله (۴۷) را بدست می دهد.

$$H_y^{n+1}(i + \frac{1}{2}, j) = fi3(i + \frac{1}{2}) \cdot H_y^n(i + \frac{1}{2}, j) + fi2(i + \frac{1}{2}) \cdot 0.5$$

$$[E_z^{n+1/2}(i+1, j) - E_z^{n+1/2}(i, j)] \quad (53)$$

بطوریکه:

$$fi2(i + \frac{1}{2}) = \frac{1}{1 + \sigma_D(i + \frac{1}{2}) \cdot \Delta t / 2 \cdot \varepsilon_0}$$

$$j\omega H_y \cdot \mu_{Fy}^*(x) = C_0 \frac{\partial E_z}{\partial x}$$

و از کمیت های معادله (۴۳-۴۴) و (۴۵-۴۶) استفاده می شود:

$$j\omega(1 + \frac{\sigma_D(x)}{j\omega\varepsilon_0})D_z = C_0(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}) \quad (47)$$

$$j\omega(1 + \frac{\sigma_D(x)}{j\omega\varepsilon_0})^{-1}H_x = -C_0 \frac{\partial E_z}{\partial y} \quad (48)$$

$$j\omega(1 + \frac{\sigma_D(x)}{j\omega\varepsilon_0})H_y = C_0 \frac{\partial E_z}{\partial x} \quad (49)$$

باید توجه داشت که تراوانی H_x در معادله (۴۸)، معکوس H_y در معادله (۴۹) در هماهنگی با معادله (۴۲) است. بنابراین دومین شرط PML را هم ایفا می شود. معادله (۴۱) برای حالت دوبعدی نامرتب است، زیرا فقط میدان E را در مسیر Z داریم که عمود بر x و y مسیرهای انتشار است. حال معادلات (۴۷-۴۹) را در فرمول سازی FDTD وارد می شود. ابتدا به طرف چپ معادله (۴۷) نگاه می شود.

$$j\omega(1 + \frac{\sigma_D(x)}{j\omega\varepsilon_0})D_z = j\omega D_z + \frac{\sigma_D(x)}{\varepsilon_0} D_z$$

با حرکت به حوزه زمانی و سپس در نظر گرفتن تقریب های تفاضل محدود معادلات زیر را بدست می آید:

$$\frac{\partial D_z}{\partial t} + \frac{\sigma_D(i)}{\varepsilon_0} D_z \approx$$

$$\frac{D_z^{n+1/2}(i, j) - D_z^{n-1/2}(i, j)}{\Delta t} + \frac{\sigma_D(i)}{\varepsilon_0}$$

$$H_y^{n+1}(i, j + \frac{1}{2}) = H_x^n(i, j + \frac{1}{2}) + \frac{C_0 \Delta t}{\Delta x} \text{curl}_- e$$

$$+ \frac{\Delta t \cdot C_0}{\Delta x} \frac{\sigma_D(x) \cdot \Delta t}{\epsilon_0} I_{H_x}^{n+\frac{1}{2}}(i, j + \frac{1}{2}) =$$

$$H_x^n(i, j + \frac{1}{2}) + \frac{C_0 \Delta t}{\Delta x} \text{curl}_- e + \frac{\sigma_D(x) \cdot \Delta t}{2\epsilon_0}$$

$$* I_{H_x}^{n+\frac{1}{2}}(i, j + \frac{1}{2})$$

معادله (۴۸) به صورت سری معادلات زیر انجام

می‌شود:

$$\text{curl}_- e = \left[E_z^{n+\frac{1}{2}}(i, j) - E_z^{n+\frac{1}{2}}(i, j + 1) \right] \quad (۵۴)$$

$$I_{H_x}^{n+\frac{1}{2}}(i, j + \frac{1}{2}) = I_{H_x}^{n-\frac{1}{2}}(i, j + \frac{1}{2}) + \text{curl}_- e \quad (۵۵)$$

$$H_x^{n+1}(i, j + \frac{1}{2}) = H_x^n(i, j + \frac{1}{2}) + 0.5 \text{curl}_- e$$

$$+ \text{fil}(i) \cdot I_{H_x}^{n+\frac{1}{2}}(i, j + \frac{1}{2}) \quad (۵۶)$$

$$\text{fil}(i) = \frac{\sigma(i) \Delta t}{2\epsilon_0} \quad (۵۷)$$

در محاسبه پارامترهای g و f تغییر حقیقی قابلیت رسانایی‌ها لازم نیست، در عوض پارامتر کمکی را محاسبه می‌شود:

$$Xn = \frac{\sigma \Delta t}{2 \epsilon_0}$$

که همزمان با ورود به PML افزایش می‌یابد.

سپس پارامترهای g و f را محاسبه می‌شود:

$$Xn(i) = 0.333 * \left(\frac{i}{\text{Length} - Pml} \right)^3$$

$$i = 1, 2, \dots, \text{Length} - Pml \quad (۵۸)$$

$$\text{fil}(i) = Xn(i) \quad (۵۹)$$

$$\text{fil}(i + \frac{1}{2}) = \frac{1 - \sigma_D(i + \frac{1}{2}) \cdot \Delta t / 2 \cdot \epsilon_0}{1 + \sigma_D(i + \frac{1}{2}) \cdot \Delta t / 2 \cdot \epsilon_0}$$

توجه شود که این پارامترها در $i + \frac{1}{2}$ بعلت موقعیت H_y در شبکه FDTD محاسبه شده‌اند. معادله (۴۸) نیازمند روش تا حدی متفاوت تر از دوتای دیگر است. با بازنویسی آن به صورت زیر آغاز می‌شود:

$$j\omega H_x = -C_0 \left[\frac{\partial E_z}{\partial y} + \frac{\sigma_D(x)}{\epsilon_0} \frac{1}{j\omega} \frac{\partial E_z}{\partial y} \right]$$

به یاد داشته باشید که $j\omega$ را می‌توان به صورت اپراتور ادغام در طی زمان و $j\omega$ را بعنوان مشتق در طول زمان در نظر گرفت. مشتق مکانی را بصورت زیر می‌شود:

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} \approx \frac{E_z^{n+\frac{1}{2}}(i, j + 1) - E_z^{n+\frac{1}{2}}(i, j)}{\Delta x} = \frac{-\text{curl}_- e}{\Delta x}$$

با اجرای آن در فرمول FDTD:

$$\frac{H_x^{n+1}(i, j + \frac{1}{2}) - H_x^n(i, j + \frac{1}{2})}{\Delta x} =$$

$$-C_0 \left[-\frac{\text{curl}_- e}{\Delta x} - \frac{\sigma_D(x)}{\epsilon_0} \Delta t \sum \frac{\text{curl}_- e}{\Delta x} \right]$$

$$I_{H_x}^{n+\frac{1}{2}}(i, j + \frac{1}{2}) = \sum \text{curl}_- e$$

به Δt اضافی در مقابل جمع، توجه شود. آن، بخشی از تقریب انتگرال حوزه زمانی است. در پایان بدست می‌آید:

$$j\omega(1 + \frac{\sigma_D(x)}{j\omega\epsilon_0})(1 + \frac{\sigma_D(y)}{j\omega\epsilon_0})^{-1} H_y = C_0 \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \quad (64)$$

با استفاده از همان روش قبلی موارد ذیل را در معادله (۵۰) جایگزین می‌شود:

$$D_z^{n+1/2}(i, j) = gi3(i) \cdot gj3(j) \cdot D_z^{n-1/2}(i) + gi2(i) \cdot gj2(j) \cdot 0.5 \cdot [H_y^n(i + \frac{1}{2}, j) - H_y^n(i - \frac{1}{2}, j) - H_x^n(i, j + \frac{1}{2}) + H_x^n(i, j - \frac{1}{2})]$$

در جهت y ، H_y نیازمند اجرایی مشابه اجرای بکار رفته برای H_x در مسیر x است که می‌دهد:

$$curl_e = \left[E_z^{n+1/2}(i+1, j) - E_z^{n+1/2}(i, j) \right] \quad (65)$$

$$I_{H_y}^{n+1/2}(i + \frac{1}{2}, j) = I_{H_y}^{n-1/2}(i + \frac{1}{2}, j) + curl_e \quad (66)$$

$$H_y^{n+1}(i + \frac{1}{2}, j) = fi3(i + \frac{1}{2}) \cdot H_y^n(i + \frac{1}{2}, j) - fi2(i + \frac{1}{2}) \cdot 0.5 curl_e + ff1(j) \cdot I_{H_y}^{n+1/2}(i + \frac{1}{2}, j) \quad (67)$$

در پایان H_x در مسیر x می‌شود:

$$curl_e = \left[E_z^{n+1/2}(i, j) - E_z^{n+1/2}(i, j+1) \right]$$

$$I_{H_x}^{n+1/2}(i, j + \frac{1}{2}) = I_{H_x}^{n-1/2}(i, j + \frac{1}{2}) + curl_e$$

$$H_x^{n+1/2}(i, j + \frac{1}{2}) = ff3(j + \frac{1}{2}) \cdot H_x^n(i, j + \frac{1}{2}) + ff2(j + \frac{1}{2}) \cdot 0.5 curl_e + ff1(i) \cdot I_{H_x}^{n+1/2}(i, j + \frac{1}{2})$$

$$gi2(i) = \left(\frac{1}{1 + xn(i)} \right) \quad (60)$$

$$gi3(i) = \left(\frac{1 - xn(i)}{1 + xn(i)} \right) \quad (61)$$

توجه داشته باشید که کمیت داخل پرانتزها در معادله (۵۸) در محدوده صفر تا یک قرار دارد. فاکتور ۰/۳۳۳ به صورت تجربی بزرگترین عددی است که ثابت می‌ماند. به طور مشابه فاکتور مکعبی در معادله (۵۸) از نظر تجربی موثرترین تنوع است. $gi3$ و $gi2$ فقط از آن جهت متفاوتند که در نیمه بازه‌ها محاسبه می‌شوند، $i + \frac{1}{2}$. پارامترها به طریق زیر فرق می‌کنند:

$fi1(i)$ from 0 تا 0.333

$gi2(i)$ from 1 تا 0.75

$gi3(i)$ from 1 تا 0.5

در سراسر فضای اصلی مسئله $fi1$ صفر است در حالیکه $gi2$ و $gi3$ یک هستند. بنابراین تبدیلی یکنواخت از بخش اصلی برنامه به PML وجود دارد.

تا بحال اجرای PML را در مسیر x نشان دادیم. آشکارا همچنین بایستی آنرا در مسیر y هم انجام داد. بنابراین باید برگردیم و عبارات وایسته به y را از معادله (۳۶-۳۹) افزوده شود که کنار گذاشته می‌شوند. بنابراین بجای معادلات (۴۷-۴۹) داریم:

$$j\omega(1 + \frac{\sigma_D(x)}{j\omega\epsilon_0})(1 + \frac{\sigma_D(y)}{j\omega\epsilon_0}) D_z = C_0 \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \quad (62)$$

$$j\omega(1 + \frac{\sigma_D(x)}{j\omega\epsilon_0})^{-1} (1 + \frac{\sigma_D(y)}{j\omega\epsilon_0}) H_x = C_0 \left(-\frac{\partial E_z}{\partial y} \right) \quad (63)$$

```

For      (j = ja ; j < jb ; j++) {
For      (i = ia ; i < ib ; i++)
X dist = (ic - i);
Y dist = (jc - j);
dist = sqrt(pow(xdist,2.) + pow(ydist,2.))
If (dist <= radius) {
ga[i][j] = 1/(epsilon + (sigma * dt/epsz))
gb[i][j] = sigma * dt/epsz

```

البته فرض می‌شود که فضای مسئله تا فضای باز راه‌اندازی شده است. برای هر سلول، فاصله تا مرکز فضای مسئله محاسبه شده و اگر فاصله کمتر از شعاع سیلندر باشد، ثابت دی‌الکتریک و رسانایی به ترتیب با ϵ و σ مشخص می‌شوند.

نقطه ضعف این روش مشخص است، از آنجاییکه ویژگی‌ها را از طریق یک روش ساده (داخل یا خارج) مشخص شده با پلکان در لبه محیط باقی می‌ماند. بنابراین بهتر است راهی برای تبدیل یکنواخت از یک محیط به محیط دیگری را داشته باشد. یک روش، تقسیم هر سلول FDTD به سلول‌های فرعی است، پس میانگین مشخصه‌های دی‌الکتریک را طبق تعداد سلول‌های فرعی در یک محیط و تعداد ریز سلول‌ها در دیگری مشخص می‌شود. قانون زیر چنین روندی را اجرا می‌کند. توانایی مدل‌سازی برای چندین لایه ی مختلف هم در نظر گرفته شده است. هر سلول به کمیت‌های $\epsilon[0]$ و $\sigma[0]$ راه‌اندازی شده است. حلقه‌های درونی که با پارامترهای ii و jj تکرار می‌شوند هر یک فاصله $\frac{1}{3}$ طول سلول را تغییر می‌دهند. بنابراین سلول به ۹ سلول ریز تقسیم می‌شود. همچنین با قرار گرفتن سلول فرعی در

$$+ f1(i) \cdot I_{H_x}^{n+\frac{1}{2}}(i, j + \frac{1}{2})$$

حال مجموعه پارامترهای توام با PML مانند ذیل

هستند:

$f1(i) \& f1(j)$ from 0 تا 0.333
 $f2(i) \cdot gi2(i) \cdot f2(j) \& gj2(j)$ from 1 تا 0.75
 $f3(i) \cdot gi3(i) \cdot f3(j) \& gj3(j)$ from 1 تا 0.5

توجه شود که صرفاً PML را بخش اصلی فضای مسئله با تعیین صفر بودن $f1$ و $g1$ و یک بودن سایر پارامترها، خاموش یا متوقف می‌شود.

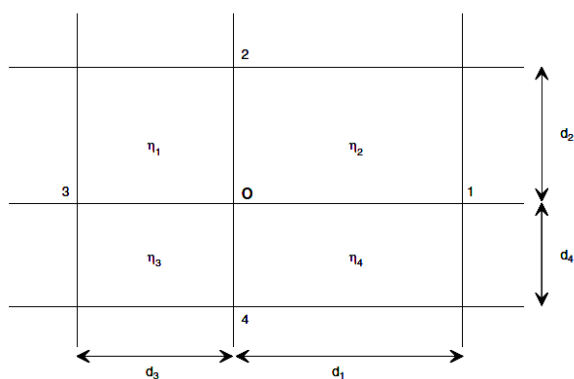
آنها فقط پارامترهای یک بعدی هستند، بنابراین آنها چیز بسیار کمی را به ملزومات حافظه می‌افزایند. با این حال I_{H_y} و I_{H_x} پارامترهای دوبعدی هستند. اگرچه ملزومات حافظه، مسئله اصلی نیستند، آنها در 2D قرار دارند. پیش از معرفی دو پارامتر جدیدی که در سراسر فضای مسئله تعریف شده‌اند، فقط بخش جزئی از فضا را نیاز است.

۱-۳-۱- موج تخت برخوردکننده با محیط دی‌الکتریک

برای شبیه‌سازی موج تخت واکنش دهنده با یک شیئی باید شیئی را طبق مشخصه‌های الکترومغناطیسی اش تعیین شود. (ثابت دی‌الکتریک و رسانایی اش) به عنوان مثال شبیه‌سازی موج تختی که با محیط دی‌الکتریک سیلندرمانندی به قطر ۲۰ سانتی‌متر برخورد کرده و ثابت دی‌الکتریک دارد که از طریق پارامتر ϵ و رسانایی از طریق پارامتر σ مشخص می‌شود. محیط را با کد زیر شبیه‌سازی می‌گردد:

$$\nabla^2 f + i\nabla^2 g = i\eta^2 f - \eta^2 g \rightarrow \begin{cases} \nabla^2 f = -\eta^2 g \\ \nabla^2 g = \eta^2 f \end{cases}$$

روش درگیر شدن برای حل معادلات مناسب تفاضل محدود در طول مش از نقاط شبکه، بوسیله روش تکراری گاوس-سایدل مورد بررسی قرار می‌گیرد. معادله (۷۱) باید در کلیه محدوده‌ها حل شود. اگر یک محدوده کوچک از مش، مانند شکل زیر را در نظر گرفته می‌شود:



شکل ۸- بخش کوچکی از فضای مش بندی شده

معادلات (۷۳-۷۴) باید در هر نقطه دارای جواب باشند و در حالت خاص در نقطه O، چهار رسانا، چهار طرف نقطه O را احاطه کرده‌اند پس معادلات (۷۳-۷۴) در نقطه O به صورت زیر در خواهند آمد:

$$d_1 \neq d_2 \neq d_3 \neq d_4$$

$$(\nabla^2 f)_0 = (-\eta^2 g)_0 \quad (73)$$

$$(\nabla^2 g)_0 = (\eta^2 f)_0 \quad (74)$$

معادلات (۷۳-۷۴) مشتقات فضا هستند و می‌توانند با معادلات تفاضل محدود با کمک یک بسط سری تیلور جایگزین شوند.

شعاع سیلندر دی الکتریک، سهم آن به $\epsilon[n]$ کامل افزوده می‌شود. در جائیکه از $\epsilon[n-1]$ قبلی کسر می‌شود، کد فوق برای تعداد لایه‌های اختیاری در محیط معتبر است که با numcy1 مشخص می‌شود.

بیان ریاضی تفاضل محدود برای قطبش H:

معادله موج حاکم برای قطبش H عبارت است از:

$$\frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} = i\eta^2 H_x \quad (68)$$

$$\eta^2 = \omega\mu\sigma$$

$$\nabla^2 H = i\eta^2 H \quad (69)$$

که $\eta^2 = \mu\sigma\omega$ می‌باشد این معادله در هر محدوده ای با رسانایی مناسب وارد شده و با شرایط

مرزی مناسب قابل حل است. از آنجائیکه H_x تنها مولفه ما می‌باشد اندیس در معادله (۶۸) و تمامی عبارات پس از آن حذف می‌شود. میدان مغناطیسی یک کمیت مختلط است بنابراین آن را می‌توان با یک مولفه حقیقی و یک مولفه موهومی به صورت زیر نمایش داد:

$$H = f + ig \quad (70)$$

معادله (۷۰) را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 H = i\eta^2 H \\ H = f + ig \end{aligned} \right\} \Rightarrow \nabla^2 (f + ig) = i\eta^2 (f + ig) \quad (71)$$

از آنجائیکه معادله (۷۱) خطی است مولفه‌های حقیقی و موهومی را تفکیک می‌کنیم تا داشته باشیم:

$$f_0 \left(\sum_{i=1}^4 \frac{1}{d_i^2} \right) - \eta^2 g_0 = f_1 D_1 + f_2 D_2 + f_3 D_3 + f_4 D_4 \quad (76)$$

و به طور مشابه برای مولفه‌های موهومی میدان g خواهیم داشت:

$$g_0 \left(\frac{1}{d_1^2} + \frac{1}{d_2^2} + \frac{1}{d_3^2} + \frac{1}{d_4^2} \right) - \eta^2 f_0 = g_1 \left[\frac{1}{d_1^2} + \frac{1}{(d_1+d_3)} \left(\frac{1}{d_3} - \frac{1}{d_1} \right) \right] + g_2 \left[\frac{1}{d_2^2} + \frac{1}{(d_2+d_4)} \left(\frac{1}{d_4} - \frac{1}{d_2} \right) \right] + g_3 \left[\frac{1}{d_3^2} + \frac{1}{(d_1+d_3)} \left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_3} \right) \right] + g_4 \left[\frac{1}{d_4^2} + \frac{1}{(d_2+d_4)} \left(\frac{1}{d_2} - \frac{1}{d_4} \right) \right]$$

و باز بطور خلاصه خواهیم داشت:

$$g_0 \left(\sum_{i=1}^4 \frac{1}{d_i^2} \right) + \eta^2 f_0 = g_1 D_1 + g_2 D_2 + g_3 D_3 + g_4 D_4 \quad (77)$$

معادلات (۷۶-۷۷) می‌بایست در نقطه درونی در هر منطقه حل شوند، مخصوصاً این دو معادله می‌توانند در یک زمان در نقطه O برای g_0 و f_0 که مقادیر f_i و g_i که از تکرارهای قبلی بدست می‌آیند، حل می‌شوند.

معادلات (۷۶-۷۷) می‌بایست برای مناطق محصور شده در نظر گرفته شوند که می‌توان به صورت زیر اختیار شوند.

$$f_{10} \left(\sum_{i=1}^4 \frac{1}{d_i^2} \right) - \eta_1^2 g_{10} = f_{11} D_1 + f_{12} D_2 + f_{13} D_3 + f_{14} D_4 \quad (78)$$

حال بخش‌های حقیقی و موهومی را بترتیب به صورت f_1, f_2, f_3, f_4 و g_1, g_2, g_3, g_4 در نظر می‌گیریم این میدان‌ها در مبدا O بر حسب میدان f_0 به صورت زیر تقریب می‌شوند.

$$f_1 = f_0 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_0 d_1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)_0 d_1^2 + \dots$$

$$f_2 = f_0 + \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)_0 d_2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \right)_0 d_2^2 + \dots$$

$$f_3 = f_0 - \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_0 d_3 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)_0 d_3^2 + \dots$$

$$f_4 = f_0 - \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)_0 d_4 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \right)_0 d_4^2 + \dots \quad (75)$$

به طور مشابه مولفه‌های موهومی g_1, g_2, g_3, g_4 را می‌توان در جملاتی بر حسب g_0 برای مبدا بیان کرد.

$$g_1 = g_0 + \left(\frac{\partial g}{\partial y} \right)_0 d_1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \right)_0 d_1^2 + \dots$$

$$g_2 = g_0 + \dots$$

$$g_3 = g_0 - \left(\frac{\partial g}{\partial y} \right)_0 d_3 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \right)_0 d_3^2 + \dots$$

$$g_4 = g_0 - \left(\frac{\partial g}{\partial y} \right)_0 d_4 + \dots$$

اگر شرایط دستور فوق را اعمال شود می‌توان معادلات (۷۳-۷۴) را بعنوان معادلات تفاضل محدود بیان نمود:

$$f_{10} \left(\frac{1}{d_1^2} + \frac{1}{d_2^2} + \frac{1}{d_3^2} + \frac{1}{d_4^2} \right) - \eta^2 g_{10} = f_{11} \left[\frac{1}{d_1^2} + \frac{1}{(d_1+d_3)} \left(\frac{1}{d_3} - \frac{1}{d_1} \right) \right] + f_{12} \left[\frac{1}{d_2^2} + \frac{1}{(d_2+d_4)} \left(\frac{1}{d_4} - \frac{1}{d_2} \right) \right] + f_{13} \left[\frac{1}{d_3^2} + \frac{1}{(d_1+d_3)} \left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_3} \right) \right] + f_{14} \left[\frac{1}{d_4^2} + \frac{1}{(d_2+d_4)} \left(\frac{1}{d_2} - \frac{1}{d_4} \right) \right]$$

می‌توان به طور خلاصه در نظر گرفت:

مقادیری که زیر آنها خط کشیده شده است مقادیر مجهول هستند شرایط مرزی برای فضای رابط این اجازه را می دهند که این مقادیر بر حسب مقادیر معلوم بیان شوند.

پیوستگی مولفه های مماسی E این اجازه را به ما می دهد تا مقادیر مجهول معادلات بر حسب مولفه های معلوم بیان گردند با استفاده از مولفه های میدان الکتریکی می توان نوشت:

با فرض $\mu = 1$ در حالت نرمالیزه خواهیم داشت:

$$\omega\sigma\eta^2 =$$

$$\Rightarrow \eta^2 = \omega\sigma \rightarrow \sigma = \frac{\eta^2}{\omega}$$

با استفاده از معادلات دیفرانسیل حاکم بر قطبش

H داشتیم:

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} - \sigma E_y = 0 \Rightarrow E_y = \frac{1}{\sigma} \frac{\partial H_x}{\partial z} \Rightarrow E_y = \frac{\omega}{\eta^2} \frac{\partial H_x}{\partial z}$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} + \sigma E_z = 0 \Rightarrow E_z = -\frac{1}{\sigma} \frac{\partial H_x}{\partial z} \Rightarrow E_z = -\frac{\omega}{\eta^2} \frac{\partial H_x}{\partial z}$$

چون:

$$H_x = f + ig$$

پس خواهیم داشت:

$$E_y = \frac{\omega}{\eta^2} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) + i \frac{\omega}{\eta^2} \left(\frac{\partial g}{\partial z} \right)$$

$$E_z = -\frac{\omega}{\eta^2} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) - i \frac{\omega}{\eta^2} \left(\frac{\partial g}{\partial z} \right)$$

شرط مولفه مماسی E که می بایست پیوسته باشند

از معادلات تفاضل محدود زیر که برای f بدست

می آیند مورد کاربرد قرار می گیرد.

$$f_{20} \left(\sum_{i=1}^4 \frac{1}{d_i^2} \right) - \eta_2^2 g_{20} =$$

$$\underline{f_{21}} D_1 + \underline{f_{22}} D_2 + \underline{f_{23}} D_3 + \underline{f_{24}} D_4$$

(۷۹)

$$f_{30} \left(\sum_{i=1}^4 \frac{1}{d_i^2} \right) - \eta_3^2 g_{30} =$$

$$\underline{f_{31}} D_1 + \underline{f_{32}} D_2 + \underline{f_{33}} D_3 + \underline{f_{34}} D_4$$

(۸۰)

$$f_{40} \left(\sum_{i=1}^4 \frac{1}{d_i^2} \right) - \eta_4^2 g_{40} =$$

$$\underline{f_{41}} D_1 + \underline{f_{42}} D_2 + \underline{f_{43}} D_3 + \underline{f_{44}} D_4$$

(۸۱)

$$g_{10} \left(\sum_{i=1}^4 \frac{1}{d_i^2} \right) + \eta_1^2 f_{10} =$$

$$\underline{g_{11}} D_1 + \underline{g_{12}} D_2 + \underline{g_{13}} D_3 + \underline{g_{14}} D_4$$

(۸۲)

$$g_{20} \left(\sum_{i=1}^4 \frac{1}{d_i^2} \right) + \eta_2^2 f_{20} =$$

$$\underline{g_{21}} D_1 + \underline{g_{22}} D_2 + \underline{g_{23}} D_3 + \underline{g_{24}} D_4$$

(۸۳)

$$g_{30} \left(\sum_{i=1}^4 \frac{1}{d_i^2} \right) + \eta_3^2 f_{30} =$$

$$\underline{g_{31}} D_1 + \underline{g_{32}} D_2 + \underline{g_{33}} D_3 + \underline{g_{34}} D_4$$

(۸۴)

$$g_{40} \left(\sum_{i=1}^4 \frac{1}{d_i^2} \right) + \eta_4^2 f_{40} =$$

$$\underline{g_{41}} D_1 + \underline{g_{42}} D_2 + \underline{g_{43}} D_3 + \underline{g_{44}} D_4$$

(۸۵)

$$B = -(\eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2 + \eta_4^2)$$

$$C_1 = D_1 \left(2 + \frac{\eta_2^2}{\eta_1^2} + \frac{\eta_3^2}{\eta_4^2} \right)$$

$$C_2 = D_2 \left(2 + \frac{\eta_3^2}{\eta_2^2} + \frac{\eta_4^2}{\eta_1^2} \right)$$

$$C_3 = D_3 \left(2 + \frac{\eta_4^2}{\eta_3^2} + \frac{\eta_1^2}{\eta_2^2} \right)$$

$$C_4 = D_4 \left(2 + \frac{\eta_1^2}{\eta_4^2} + \frac{\eta_2^2}{\eta_3^2} \right)$$

D_1, D_2, D_3, D_4 همان مقادیری هستند که در قبل به آنها اشاره شد.

شرح برنامه کامپیوتری و نتایج:

جهت شبیه سازی معادلات فوق از نرم افزار Matlab که یکی از قویترین نرم افزارهای شبیه سازی فنی و مهندسی، استفاده شده است. جهت مدیریت جامع نرم افزار از ساختار کلاسها و امکانات مربوطه از جمله ارث بری و کپسوله سازی بهره برده شد. در ابتدا بایستی ساختار زمین مورد نظر را شبیه سازی نمود که از یک ماتریس با ابعاد ثابت (۴۱*۴۱) استفاده و لایه ها همچنین رسانایی هر لایه از ورودی دریافت می گردد. شکل زیر یک نمونه ساختار زمین شبیه سازی شده می باشد. هر لایه با یک سمبل (A, B, ..., F) نشان داده می شود. و مقدار رسانایی هر لایه از ورودی خوانده می شود. یک موج سینوسی به زمین مورد نظر ارسال و در هر گره با استفاده از FD پارامترهای میدان مغناطیسی و الکتریکی محاسبه می گردد. از تقسیم این پارامترها آمپدانس هر لایه محاسبه می شود.

$$\underline{f_{13}} - f_{10} = \frac{\eta_1^2}{\eta_2^2} (f_{23} - f_{20})$$

$$\underline{f_{14}} - f_{10} = \frac{\eta_1^2}{\eta_4^2} (f_{44} - f_{40})$$

$$\underline{f_{21}} - f_{20} = \frac{\eta_2^2}{\eta_1^2} (f_{11} - f_{10})$$

$$\underline{f_{24}} - f_{20} = \frac{\eta_2^2}{\eta_3^2} (f_{34} - f_{30})$$

$$\underline{f_{31}} - f_{30} = \frac{\eta_3^2}{\eta_4^2} (f_{41} - f_{40})$$

$$\underline{f_{32}} - f_{30} = \frac{\eta_3^2}{\eta_2^2} (f_{22} - f_{20})$$

$$\underline{f_{43}} - f_{40} = \frac{\eta_4^2}{\eta_3^2} (f_{33} - f_{30})$$

$$\underline{f_{42}} - f_{40} = \frac{\eta_4^2}{\eta_1^2} (f_{12} - f_{10})$$

برای بدست آوردن g نیز از یک ست مشابه استفاده می شود.

این معادلات این اجازه را می دهد تا مقادیر مجهول معادلات (۷۸-۸۵) را برحسب مقادیر معلوم بیان کنیم. با جمع کردن معادلات (۷۸-۸۱) بدست می آید:

$$Af_0 + Bg_0 = f_1 C_1 + f_2 C_2 + f_3 C_3 + f_4 C_4 \quad (۸۶)$$

با جمع کردن معادلات (۸۲-۸۵) به دست می آید:

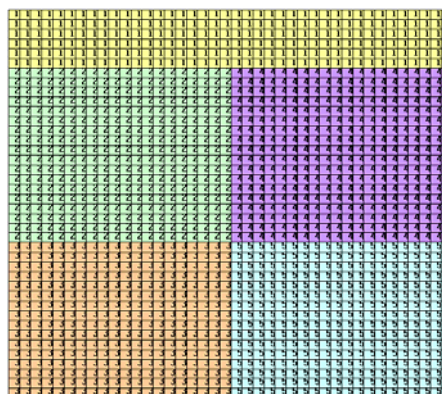
$$-Bf_0 + Ag_0 = g_1 C_1 + g_2 C_2 + g_3 C_3 + g_4 C_4 \quad (۸۷)$$

که این دو معادلات به صورت زیر خواهند شد:

$$A = \frac{4}{d_1^2} + D_1 \left(\frac{\eta_2^2}{\eta_1^2} + \frac{\eta_3^2}{\eta_4^2} - 2 \right) + \frac{4}{d_2^2} + D_2 \left(\frac{\eta_3^2}{\eta_2^2} + \frac{\eta_4^2}{\eta_1^2} - 2 \right) + \frac{4}{d_3^2} + D_3 \left(\frac{\eta_4^2}{\eta_3^2} + \frac{\eta_1^2}{\eta_2^2} - 2 \right) + \frac{4}{d_4^2} + D_4 \left(\frac{\eta_1^2}{\eta_4^2} + \frac{\eta_2^2}{\eta_3^2} - 2 \right)$$

جدول ۳- H polarization

j	Amh	Amev	Amez	Amevh
2	1	1	0	7.7e+002
3	1	1	0	7.7e+002
4	1	1	0	7.7e+002
5	1	1	0	7.7e+002
6	1	1	0	7.7e+002
7	1	1	0	7.7e+002
8	1	1	0	7.7e+002
9	1	1	0	7.7e+002
10	1	1	0	7.7e+002
11	1	1	0	7.7e+002
12	1	1	0	7.7e+002
13	1	1	0	7.7e+002
14	1	1	0	7.7e+002
15	1	1	0	7.7e+002
16	1	1	0	7.7e+002
17	1	1	0	7.7e+002
18	1	1	0	7.7e+002
19	1	1	0	7.7e+002
20	1	1	0	7.8e+002
21	1	1.2	0	9e+002
22	1	1.3	0	1e+003
23	1	1.3	0	1e+003
24	1	1.3	0	1e+003
25	1	1.3	0	1e+003
26	1	1.3	0	1e+003
27	1	1.3	0	1e+003
28	1	1.3	0	1e+003
29	1	1.3	0	1e+003
30	1	1.3	0	1e+003
31	1	1.3	0	1e+003
32	1	1.3	0	1e+003
33	1	1.3	0	1e+003
34	1	1.3	0	1e+003
35	1	1.3	0	1e+003
36	1	1.3	0	1e+003
37	1	1.3	0	1e+003
38	1	1.3	0	1e+003
39	1	1.3	0	1e+003
40	1	1.3	0	1e+003



شکل ۹- نمایی از زمین شبیه سازی شده

رسانایی در هر لایه مقداری ثابتی است که در جدول زیر آمده است.

جدول ۱- میزان رسانایی لایه‌های مختلف

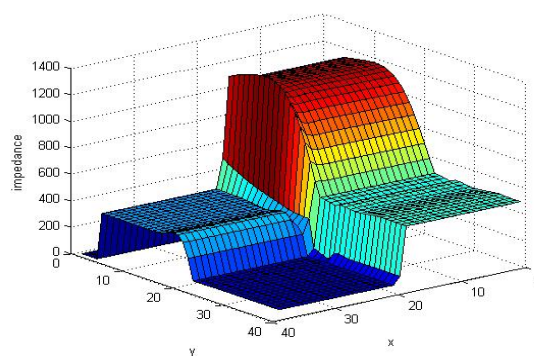
لایه	اول	دوم	سوم	چهارم
رسانایی	0	0.1000E-09	0.5000E-09	0.1000E-08

مقدار Ameyh در هر نقطه محاسبه می‌شود. جدول

زیر گوشه ای از این ماتریس ۴۰ در ۴۰ است.

جدول ۲- مقادیر Ameyh

0	0
770.992	673.519
1137.43	1083.87
355.839	351.771



شکل ۱۰- آمپدانس زمین شبیه سازی شده

مقادیر $scale = 1e+005$ $freq = 0.00025$ است.

مقادیر Amh; Amey; Amez; Ameyh در جدول

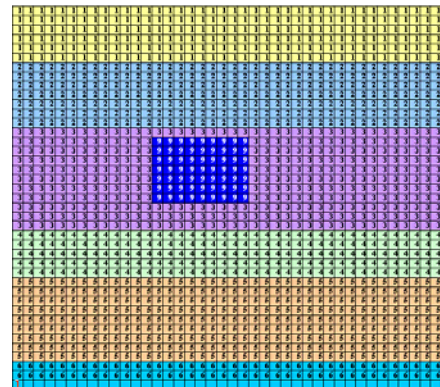
زیر موجود است.

نتیجه گیری

در این تحقیق به بررسی معادلات ماکسول و معادله موج هلمهولتز به روش تفاضل محدود پرداخته شد و با حل این معادلات و بررسی مولفه های میدان الکتریکی و میدان مغناطیسی ناشی از امواج الکترومغناطیسی در محیط های یک بعدی و دو بعدی دی الکتریک و رسانا و محاسبه آمپدانس محیط با استفاده از شرایط مرزی لازم بررسی گردید سپس در کار تکمیلی که موضوع اساسی تحقیق می باشد یک ساختار دو بعدی به صورت یک شبکه ماتریسی 41×41 با صورتهای متفاوت در نظر گرفته و به کمک یک میدان الکترومغناطیسی صادر شده درون ساختار را مطالعه شد. در ابتدا فرض شد این میدان یک موج تخت است که این یک میدان مغناطیسی یکنواخت را ایجاد می کند و یک میدان افقی است. اگر محیط ایزوترپ باشد در نتیجه میدان مغناطیسی یکنواخت افقی، یک میدان الکتریکی افقی خواهد بود که در محیط های رسانا تولید جریانهای الکتریکی نموده که این جریانهای القایی میدان ثانویه ایجاد می نمایند اینها پاسخ های محیط هستند.

مسئله را برای قطبش H میدان الکترومغناطیسی مورد بررسی و حل قرار گرفته شد. زیرا اینگونه موجها وقتی وارد محیط می شوند محیط را قطبیده می کنند یعنی قطبش خطی داریم در نتیجه میدان مغناطیسی را بصورت یک کمیت مختلط که دارای یک مولفه حقیقی و یک مولفه موهومی است نمایش داده شد. ساختار دو بعدی را به صورت یک شبکه

یک مثال دیگر از سیستم مورد نظر:



شکل ۱۱- نمایی از زمین شبیه سازی شده

زمین مورد نظر از هفت لایه تشکیل شده که رسانایی هر یک در جدول زیر آمده است.

جدول ۴- میزان رسانایی لایه های مختلف

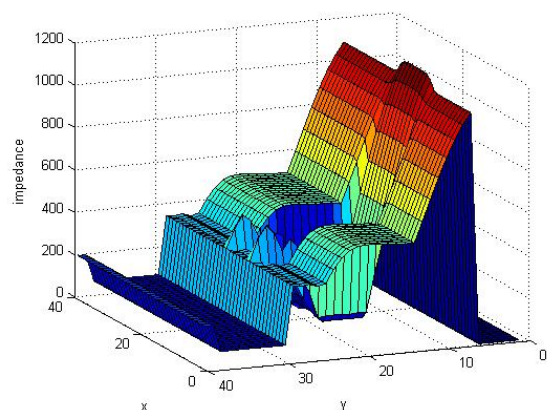
لایه ها	لایه ۱	لایه ۲	لایه ۳
رسانایی	0	0.1000E-09	0.5000E-09
لایه ۴	لایه ۵	لایه ۶	لایه ۷
0.1000E-08	0.2000E-07	0.3000E-08	0.7000E-07

مقدار Ameyh در هر نقطه محاسبه می شود. جدول

زیر گوشه ای از این ماتریس 40×40 در ۴۰ است.

جدول ۵- مقادیر Ameyh

0	0
770.992	575.521
1083.87	1013.02
722.103	591.478
355.839	351.771			



شکل ۱۲- آمپدانس زمین شبیه سازی شده

IEEE Tran, Antennas and propagate., vol, 17, pp: 585-589.

مش‌بندی منظم در نظر گرفته و معادلات تفاضل محدود به کمک یک بسط سری تیلور جایگزین گردید. با استفاده از روش تکراری گاوس-سایدل و با استفاده از شرایط مرزی نویمان و دریشله مجهولاتی را که در نقاط مختلف شبکه مش‌بندی ظاهر می‌شوند محاسبه شده است.

استفاده از آن روش می‌تواند در تعیین ساختارهای ساده و پیچیده و همگن و ناهمگن درون زمین بسیار مفید واقع گردد و در زمانی کوتاه و هزینه‌های کم در اکتشاف منابع زیرزمینی اعم از فلزی و غیرفلزی به کار رود. نتایج حاصل از این تحقیق که با داده‌های فرضی به دست آمده است در شرایط واقعی قابل تعمیم و استفاده می‌باشد.

مراجع

- Kunz, K. S, R. J. luebbers,1993, The finite differencetis. time domain method for electromagnetic.pp:234-278
- Sullivan,D.M.,1996, A simplified PML for use with the FDTD method, IEEE Microwave and guided wave letters, vol. 6, pp: 97-99
- Taflove, A. M. Brodwin, M., 1975, Numerical solution of steady state electromagnetic scattering problems using the time dependent Maxwell's equation, IEEE Trans, Microwave theory tech, vol 23, pp: 623,730.
- Taflove, A., 1995, computational electrodynamics': the finite difference time domain method. Boston: Artech House.pp:123-156
- Yee, K.S.,1996, Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media,