فوتون جرم دار، حلقه اتصال بین تقارن همدیس و پیمانه‌ای در نظریهٔ ویل– دیراک

صدیقه میرابوطالبی، فاطمه احمدی، سیما درویش پور، الهه فریدچهر

چکیده: در این مقاله به معرفی سازوکار برای تعیین جرم میدان های برداری در نظریهٔ ویل- دیراک می پردازیم. این نظریه دارای تقارن های همدیس و پیمانه ای است. نشان می دهیم که در این نظریه فوتون های جرم دار عامل ایجاد ارتباط بین این تقارن ها می باشند. با شکستن این تقارن ها در مقیاس های بزرگ چارچوب همدیس ویژه ای را تعیین می کنیم که می توان در آن خصوصیات بزرگ مقیاس جهان کنونی را توصیف نمود. در این چارچوب جرم فوتون را تخمین می زنیم. در این مقاله با مطرح نمودن یک دیدگاه کلی از نظریه به هدف اصلی طرح مسئله یعنی تخمین جرم فوتون و تعیین ضریب جفت شدگی تقارن های همدیس و پیمانه ای نظریه می پردازیم. نشان می‌دهیم که این امر چگونه بدون نیاز به محاسبه دقیق و تعیین همه میدان‌ها و کمیات، به زیبایی و سادگی میسر است.

واژه های کلیدی: نظریه ویل- دیراک، تقارن همدیس، تقارن پیمانه ای، فوتون جرم دار، الکترومغناطیس و نظریه ی گرانش.

۱– مقدمه

نیروهای الکترومغناطیسی و گرانشی از این نظر که هر دو جزء نیروهای بلند برد هستند، شبیه یکدیگرند. نیروهای گرانشی را می توان با دیدگاهی هندسی با نسبیت عام توصیف نمود. ابزار نظریه نسبیت عام در توصیف پدیده های گرانشی هندسه ی ریمانی است. در این نظریه پتانسیل نیروی گرانش با تانسور متریک $g_{\mu\nu}$ بیان می شود. برای آنکه بطور معادل نیرو های الکترومغناطیسی را نیز بطور هندسی توصیف نمود، باید ارتباط مشابه ای بین پتانسیل های الکترومغناطیسی و تانسور متریک برقرار شود. اما مؤلفه های متریک با استفاده از معادله اینشتین و اعمال شرایط مرزی مناسب کاملاً مشخص می‌شوند. بنابراین به نظر می‌رسد که نمی توان نظریه الکترومغناطیس را با همان هندسه ریمانی توصیف نمود.

در سال ۱۹۱۸ ویل در جهت حل این مسئله به تعمیم هندسه ریمانی پرداخت و هندسه نوینی را پیشنهاد نمود [۲-۱]. در این هندسه جدید درجه آزادی های بیشتری از هندسه ریمانی علاوه بر تانسور متریک به چشم می خورد بطوری که این امکان فراهم می شود که نظریه الکترومغناطیس نیز با ابزار هندسی توصیف شود. با پیدایش هندسه ویل این امید بوجود آمد که بتوان به وحدت نیروهای الکترومغناطیس و گرانش دست یافت.

با وجود انسجام و زیبایی بسیار، هندسه ویل در ابتدا اقبالی نیافت و مورد توجه فیزیک دا نان قرار نگرفت. این امر به دلیل پیچیدگی نظریه و همچنین برخی تناقضات موجود در آن روی داد. در واقع در هندسه

صدیقه میرابوطالبی: (استادیار)، گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه دانشگاه آزاد واحد تهران–شمال، دربند، تهران

فاطمه احمدی: (استادیار)، گروه فیزیک دانشکده علوم دانشگاه شهید رجایی، لویزان، تهران

سیما درویش پور، الهه فریدچهر: دانشجوی کارشناسی ارشدِ فیزیک، دانشکده علوم پایه دانشگاه آزاد واحد تهران–شمال.

ویل مقیاس اندازه گیری طول عملاً در هرنقطه، از فضا- زمان به‌طور دلخواه تعیین می‌شود. این امر درتناقض با نظریه‌های موجود می‌باشد که مقیاس‌های اندازه گیری بطور مطلق و نه دلخواه، در هر نظریه شناخته شده فیزیک وارد می شود.

درسال ۱۹۷۳ دیراک مدل ویل را به منظور تصحیح نظریه اینشتین مورد استفاده قرار داد[۳]. هدف او در واقع تبیین نظریه گرانش جدیدی بود که با نظریه اعداد بزرگ او جور در آید. او نشان داد که در قالب هندسه ویل می‌توان فرض نمود که بازه های فضا-زمان که توسط دستگاه های اتمی اندازه گیری می‌شوند و متریکی که در معادله اینشتین وارد می شود مربوط به دو چارچوب همدیس که بطور موضعی متفا وتند، می با شند. به این صورت که ضریب تبدیل بین این دو متریک تابعی از مختصات فضا- زمان است. دیراک با مطرح نمودن چنین تمایزی بین چارچوب‌های یاد شده توانست بطور سازنده ای با ایرادی که به هندسه ویل وارد بود برخوردکند.

علاوه بر آن دیراک مدل ویل را نسبت به حالت اولیه و خام آن ساده تر نمود و بر اساس آن یک نظریه‌ی اسکالر-تانسوری خلق کرد.

در اینجا بر این نکته تأکید می‌کنیم که مدل ویل- دیراک دارای ساختار زیبایی است و این امکان را فراهم می آورد که نظریه ی الکترومغناطیس در چارچوب یک نظریه ی گرانشی دارای تقارن‌های همدیس و پیمانه‌ای مورد مطالعه قرار گیرد. یکی از نکات جالب توجه مدل ویل- دیراک جفت شدگی تقارن های همدیس و پیمانه‌ای نظریه است. پارامتری که نقش مهمی را در این امر ایفا می‌کند جرم فوتون است. هدف ما در این مقاله ضمن معرفی نظریه به عنوان یک نظریه الکترومغناطیسی- گرانشی کار آمد، مطالعه و تحقیق بر روی جرم فوتون از دیدگاه ایجاد ارتباط بین تقارن های یاد شده است. به طور خاص ما به دنبال تعیین یک حد بالا برای جرم فوتون هستیم. تعیین این حد بالا در فاز شکست تقارن همدیس نظریه بروز می کند و بدون نیاز به انجام و محاسبه حل های دقیق نظریه، همانطور که در مقاله قبلی بدست آورده ایم، امکان پذیر است.

ساختار این مقاله بدین شرح می باشد:

ابتدا خلاصه ای از مبانی هندسه ویل ارائه می‌شود. توضیحات مفصل تر در این مورد را می‌توان در مراجع [۴- ۲] یافت. سپس در بخش سوم ضمن معرفی نظریه ویل-دیراک آنرا از نظر تقارن‌های همدیس و پیمانه‌ای مورد تجزیه و تحلیل قرار می‌دهیم. در بخش چهارم به معرفی فاز شکست تقارن نظریه می‌پردازیم. این امر با وارد نمودن یک چشمه جرمی ثابت با واحد مشخص انجام می‌گردد. سپس با توجه به شرایط جهان از دیدگاه کیهان شناسی چارچوب ویژه ای را به عنوان چارچوب کیهان شناسی مشخص می کنیم. در بخش پنجم با اعمال ویژگی‌های مورد لزوم جهان در مقیاس بزرگ به تخمین جرم فوتون اختصاص می یابد.

سیستم واحدهای مورد استفاده سیستم واحدهایی است که غالباً در فیزیک‌ذرات بنیادی در نظر گرفته می شوند، و به صورت $\hbar = c = 1$ تعریف می شود. همچنین علامت متریک به صورت $(+,-,-,-)$ و علامت تانسورریمانی به صورت $R^{\kappa}{}_{\lambda\mu\nu} = -\Gamma^{\kappa}{}_{\mu\lambda,\nu} + \dots$ است [۵]. به منظور آسانی در نگارش مشتق هموردای میدان های اسکالر با زیر نویس مشخص می‌شود.

۲- هندسه ویل

در هندسه ریمانی فرض بر این است که در انتقال یک بردار ξ^{γ} جهت آن تغییر یابد. این تغییر به فرم دیفرانسیلی زیر بیان می شود: .

$$d\xi^{\alpha} = \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma}\, dx^{\beta} \xi^{\gamma} \tag{۱}$$

که در آن $\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma}$ ضرایب الصاق و dx^{β} بردار جابه جایی مکانی ξ^{γ} است. در هندسه ویل فرض می‌شود که طول یـک بردار عـلاوه بر جهت آن در انتقال موازی تغییر کند.

در هندسه ویل مشابه رابطه (۱)، تغییر طول به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$dl = l(\ dx^{\beta}k_{\beta}\ ) \tag{۲}$$

که در آن l طول بردار ξ^{γ} و dl تغییر طول است. بطوری که بردارهای هموردای k_{β} نقشی مشابه ضرایب الصاق $\Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma}$ بر عهده دارند. در هندسه ویل k_{β} و تانسور متریک $g_{\mu\nu}$ کمیت های میدان هستند.

حال اجازه دهید یک استاندارد طولی را به‌طور دلخواه بر روی منیفلد تعریف کنیم. فرض کنید که این استاندارد بتواند با یک ضریب تبدیل همدیس که در حالت کلی تابعی از مختصات فضا-زمان است، تغییر کند. در این صورت چنانچه ضریب تبدیل همدیس مورد نظر را $\Omega(x_{\mu})$ بنامیم آنگاه طول l به طول $l' = \Omega(x_{\mu})l$ و طول $l+dl$ به طول $l'+dl'$ تبدیل می شود به طوری که :

$$dl' = l'k'_{\mu}dx^{\mu}, \tag{۳}$$

که درآن

$$k'_{\mu} = k_{\mu} + \beta_{\mu} \tag{۴}$$

و

$$\beta = \log(\Omega(x_{\mu})) \tag{۵}$$

و β_{μ} به صورت $\frac{\partial\beta}{\partial x^{\mu}}$ تعریف شده است. با توجه به رابطه (۲) مشاهده می کنیم که

$$\oint dl = \oint lk_{\mu}dx^{\mu} = lF_{\mu\nu}\delta S^{\mu\nu} \tag{۶}$$

بطوری که :

$$F_{\mu\nu} = k_{\mu,\nu} - k_{\nu,\mu} \tag{۷}$$

و $\delta S^{\mu\nu}$ المان سطح بینهایت کوچکی است، که توسط یک حلقه بینهایت کوچک در بر گرفته شده است. دقت می کنیم که صفر شدن تانسور هندسی $F_{\mu\nu}$ شرط لازم و کافی است برای آنکه طول یک بردار در انتقال موازی در امتداد یک مسیر بسته تغییر پیدا نکند. به این ترتیب با صفر شدن $F_{\mu\nu}$ هندسه ویل تبدیل به هندسه ریمانی می‌شود.

باید به این نکته دقت نمود که تانسور هندسی $F_{\mu\nu}$ مشابه تانسور فیزیکی میدان ماکسول است. به طور متناظر میدان برداری k_{μ} نیز می تواند بعنوان میدان فوتونی در نظر گرفته شود. همچنین تحت تبدیل های موضعی واحدها میدان برداری k_{μ} مطابق (۴) تغییر می‌کند در حالیکه تانسور $F_{\mu\nu}$ بدون تغییر باقی می ماند. این امر نشان می دهد که تبدیل پیما نه‌ای که در نظریه الکترومغناطیس مطرح است از تبدیل موضعی واحدها در هندسه ویل بدست می آید. در سراسر این مقاله میدان برداری k_{μ} به عنوان میدان مربوط به یک فوتون در نظر گرفته می شود.

۳- مدل

کنش ویل- دیراک که به صورت زیر تعریف می شود را درنظر بگیرید [۳]:

$$S[\phi, k_{\mu}] = \frac{1}{2}\int d^4x\sqrt{-g}\left\{\frac{1}{2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - {}^{*}R\phi^2 + \alpha\phi_{*\mu}\phi^{*\mu}\right\} \tag{۸}$$

که در آن α یک پارامتر ثابت بدون بعد است. $\phi_{*\mu}$ مشتق هم- همورداي میدان نرده ای ϕ با مرتبه $n=1$ است که به صورت زیر تعریف می‌شود[۱] :

$$\phi_{*\mu} = \phi_{\mu} + k_{\mu}\phi \tag{۹}$$

و R^{*} نرده‌ای انحناء تعمیم یافته است که به صورت زیر داده شده‌است:

$${}^{*}R = R - 6k^{\mu}{}_{;\mu} + 6k_{\mu}k^{\mu} \tag{۱۱}$$

که در آن R نرده‌ای انحناء می‌باشد.

---

[۱]- در هندسه ویل یک کمیت محلی (تابعی از نقاط متفاوت فضا-زمان) ψ در صورتی که تحت تبدیلات محلی واحدهای اندازه گیری بصورت $\psi' = \Omega^{n}\psi$ تغییر کند یک هم-تانسور (co-tensor) از مرتبه n نامیده می‌شود. همچنین یک مشتق هم-هموردا (co-covariant) یک مشتق همورداي تعمیم یافته است و یک هم-تانسور می‌باشد و برای یک تابع S از مرتبه n بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$S_{*\mu} = S_{\mu} - nk_{\mu}S \tag{۱۰}$$

در کنش اولیه ویل جمله ای به صورت $({}^{*}R)^2$ وجود داشت که موجب پیچیدگی آن می‌گردید. دیراک جمله ${}^{*}R\phi^2$ را جایگزین آن نمود که موجب ساده تر شدن مدل شد.

با استفاده از تعریف‌های (۱۰و۱۱) کنش (۸) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$S[\phi,k_\mu]=\frac{1}{2}\int d^4x\sqrt{-g}\Big\{\frac{1}{2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}-R\phi^2+\alpha\phi_\mu\phi^\mu$$
$$+(\alpha-6)\phi^2k_\mu k^\mu+2(\alpha-6)\phi k^\mu\phi_\mu+6(\phi^2k^\mu)\Big\}_{;\mu} \quad (۱۲)$$

که در آن جمله آخر یعنی $6(\phi^2k^\mu)\sqrt{-g}$ دیفرانسیل کامل بوده و می‌تواند حذف شود.

باید به این نکته دقت نمود که کنش (۱۲) تحت تبدیل موضعی واحدها ناوردا است. در اینجا این نوع تبدیل به صورت ترکیبی از تبدیلات پیما نه ای تعریف شده در رابطه (۴) و تبدیلات همدیس به فرم زیر در نظرگرفته می‌شود:

$$g_{\mu\nu}\to\Omega^2(x_\mu)g_{\mu\nu} \quad (۱۳)$$

$$\phi\to\Omega^{-1}(x_\mu)\phi \quad (۱۴)$$

مشاهده می‌کنیم که تبدیلات پیمانه ای بفرم (۴) به طور بنیادی با تبدیلات (۱۳و۱۴) مرتبط می‌باشد. به طورکلی این دو نوع تبدیل را نمی توان تبدیلات تقارنی مستقلی به حساب‌آورد. در اصل تبدیلات موضعی واحدها از این دو نوع تبدیل تشکیل شده‌است.

این امر حاوی نکته فیزیکی ظریفی در مورد فوتون ویل است. برای توضیح نقشی که دراین مورد فوتون ویل بازی می‌کند، دقت می‌کنیم که جمله $(\alpha-6)\phi^2k_\mu k^\mu$ در کنش (۱۲) در واقع جمله مربوط به جرم فوتون است. این جمله در حالت خاص $\alpha=6$ که کنش (۱۲) به صورت زیر درمی آید ظاهر نمی‌شود:

$$S_{\alpha=6}[\phi,k_\mu]=\frac{1}{2}\int d^4x\sqrt{-g}\left\{\frac{1}{2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}-R\phi^2+6\phi_\mu\phi^\mu\right\} \quad (۱۵)$$

در این کنش جمله‌ای که به طور صریح تابعی از k_μ باشد و جمله ای مبین برهمکنش بین میدان نرده‌ای ϕ و پتانسیل برداری k_μ وجود ندارد. بنابراین این کنش تحت تبدیل پیمانه‌ای (۴) و تبدیلات همدیس (۱۳ و ۱۴) ناوردا است. در حالت خاص $\alpha=6$ که جرم فوتون ویل صفر است تقا رن های همدیس و پیمانه ای بطور مستقل از یکدیگر برقرار هستند. بنابر این تنها در حضور فوتون جرم دار $(\alpha\neq 6)$ تقارن های همدیس و پیمانه به یکدیگر جفت هستند.

به منظور وارد نمودن میدان های مادی در نظریه، کنش مادی S_m را به کنش (۱۲) اضافه می‌کنیم . می توانیم فرض کنیم که S_m به طور معمول، تشکیل شده است از میدان‌های مادی که به گرانش جفت شده‌اند.

با گرفتن وردش از کنش کل $S_m+S[\phi,k_\mu]$ نسبت به $g_{\mu\nu}$، ϕ و k_μ به ترتیب خواهیم داشت:

$$G_{\mu\nu}=-\phi^{-2}[T_{\mu\nu}+E_{\mu\nu}+\Theta_{\mu\nu}+\Sigma_{\mu\nu}] \quad (۱۶)$$

$$\alpha\phi^\mu{}_{;\mu}+R\phi-(\alpha-6)\phi[k_\mu k^\mu-k^\mu{}_{;\mu}]=0 \quad (۱۷)$$

$$-(F^{\nu\mu})_{;\mu}+(\alpha-6)(\phi^2k^\nu+\phi\phi^\nu)+J^\nu=0 \quad (۱۸)$$

در این معادله ها $G_{\mu\nu}=R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$ تانسور اینشتین است و

$$T_{\mu\nu}[\phi]=(-2+\frac{\alpha}{2})g_{\mu\nu}\phi^\alpha\phi_\alpha+(2-\alpha)\phi_\mu\phi_\nu$$
$$-2g_{\mu\nu}\phi(\phi^\alpha)_{;\alpha}+2\phi\phi_{\mu;\nu} \quad (۱۹)$$

$$E_{\mu\nu}=\frac{1}{4}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}g_{\mu\nu}-F_{\mu\alpha}F_{\nu\beta}g^{\alpha\beta} \quad (۲۰)$$

$$\Theta_{\mu\nu}=(\alpha-6)[\phi^2(-k_\mu k_\nu+\frac{1}{2}g_{\mu\nu}k^\alpha k_\alpha) \quad (۲۱)$$

و $\Sigma_{\mu\nu}$ تانسور انرژی تکانه میدان های مادی است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Sigma_{\mu\nu}=-\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_m}{\delta g^{\mu\nu}} \quad (۲۲)$$

و J^{μ} بردار جریان به صورت زیر است:

$$J^{\mu}=\frac{\delta S_m}{\delta k_{\mu}} \tag{۲۳}$$

استفاده از ناوردا بودن کنش‌کل $S_m + S[\phi, k_{\mu}]$ تحت تبدیل مختصات و با اعمال معادله‌های میدان داریم:

$$\Sigma^{;\mu}{}_{\mu\nu}=0 \tag{۲۴}$$

این اتحاد را می‌توان به طور معادل از روابط (۱۶-۲۲) بدست آورد. رابطه (۲۴) نشان می‌دهد که $\Sigma_{\mu\nu}$ یک تانسور انرژی تکانه بقادار است.

قانون بقا داشتن جریان با توجه به رابطه (۱۸) به صورت زیر در می آید:

$$(\alpha-6)(\phi^2 k^{\mu}+\phi\phi^{\mu})_{;\mu}+J^{\mu}{}_{;\mu}=0 \tag{۲۵}$$

باید به این نکته دقت داشته باشیم که رابطه های (۱۶-۱۸) از یکدیگر مستقل نیستند. با گرفتن تریس از رابطه (۱۶) و استفاده از تعریف های (۱۹-۲۱) و مقایسه نتایج با (۱۷) و (۱۸) به رابطه زیر می‌رسیم :

$$\Sigma^{\mu}{}_{\mu}=g_{\mu\nu}\Sigma^{\mu\nu}=0 \tag{۲۶}$$

رابطه اخیر به این معنی است که فقط میدان های مادی که دارای تانسور انرژی تکانه صفر هستند می توانند به طور سازگاری به نظریه جفت شوند. این امر ناشی از تقارن همدیس نظریه است.

۴- شکستن تقارن همدیس

به منظور شکستن تقارن همدیس و در نظرگرفتن کنش مادی با تریس غیر صفر، می توانیم کنش به فرم زیر را به کنش کل اضافه کنیم:

$$-\frac{1}{2}\int d^4x\sqrt{-g}\,\mu^2\phi^2 \tag{۲۷}$$

که در آن μ یک پارامتر جرمی ثابت است. در این حالت معادله های (۱۶) و (۱۷) به صورت زیر تغییر می‌کنند:

$$G_{\mu\nu}-\frac{\mu^2}{2}g_{\mu\nu}=-\phi^{-2}[T_{\mu\nu}+E_{\mu\nu}+\Theta_{\mu\nu}+\Sigma_{\mu\nu}] \tag{۲۸}$$

$$\alpha\phi^{\mu}{}_{;\mu}+R\phi-(\alpha-6)\phi[k_{\mu}k^{\mu}-k^{\mu}{}_{;\mu}]+\mu^2\phi=0 \tag{۲۹}$$

و معادله (۱۸) بدون تغییر باقی می ماند. به این ترتیب معادله (۲۶) به صورت زیر در می‌آید:

$$\Sigma^{\mu}{}_{\mu}=\phi^2 \tag{۳۰}$$

حال شکست تقارن اعمال شده را به صورت یک اثر کیهانی در نظر می‌گیریم. یعنی مقیاس طولی μ^{-1} از درجه بزرگی شعاع جهان یعنی R_0 و $\Sigma^{\mu}{}_{\mu}$ را معادل چگالی انرژی متوسط ماده توزیع شده در مقیاس بزرگ، به صورت $\Sigma^{\mu}{}_{\mu}\sim M R_0^{-3}$ فرض‌کنیم، که در آن M جرم جهان می‌باشد. با این انتخاب ها، از رابطه (۳۰) می‌توان مقدار زمینه ثابت زیر را برای میدان ϕ بدست آورد:

$$\phi^{-2}\sim R_0^{-2}\left(\frac{M}{R^3{}_0}\right)^{-1}\sim\frac{R_0}{M}\sim G \tag{۳۱}$$

که در آن G ثابت کوپلاژ نیوتن است و همچنین از رابطه تجربی $\frac{GM}{R_0}\sim 1$ استفاده شده‌است. با قرار دادن این مقدار ثابت برای میدان ϕ در معادله (۲۸) به نتیجه زیر می‌رسیم :

$$G_{\mu\nu}-g_{\mu\nu}\Lambda\approx-8\pi G[T_{\mu\nu}+E_{\mu\nu}]+h_{\mu\nu} \tag{۳۲}$$

$$h_{\mu\nu}=(\alpha-6)(k_{\mu}k_{\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}k^{\alpha}k_{\alpha}) \tag{۳۳}$$

به طوری که $\Lambda=\frac{\mu^2}{2}$ عبارت است از یک ثابت کیهان شناسی مؤثر از درجه R_0^{-2} است. معادله (۱۸) نیز به صورت زیر درمی‌آید:

$$-(F^{\nu\mu})_{;\mu}+\frac{(\alpha-6)}{8\pi G}k^{\nu}+J^{\nu}=0 \tag{۳۴}$$

از معادله اخیر در حالت ($\alpha\neq 6$) و در ناحیه خالی از جریان خواهیم داشت:

$$K^{\mu}{}_{;\mu}=0 \tag{۳۵}$$

همچنین معادله (۳۴) به صورت زیر در می‌آید:

$$k^{\nu;\mu}{}_{;\mu} + R^{\nu}{}_{\mu}k^{\mu} + \frac{(6-\alpha)}{8\pi G}k^{\nu} = 0 \qquad (۳۶)$$

برای یک تانسور ریسی $R_{\mu\nu}$ کوچک معادله (۳۶) معادله‌ی *پروکا* برای یک فوتون جرم داراست [۶]. اما با جمله $R_{\mu\nu}$ معادله (۳۶)، همان معادلهٔ اینشتین-پروکا برای یک فوتون جرم دار خواهد شد [۷]. در واقع در چارچوب کیهان شناسی میدان برداری k_μ شبیه یک میدان برداری فوتون جرم‌دار با جرم معادل

$$m^2{}_{\gamma} \approx \frac{(6-\alpha)}{8\pi G} \qquad (۳۷)$$

عمل می‌کند. متذکر می‌گردد که علامت جمله جرم فوتون در (۳۶) صحیح است، علامت متریک (۲-) است. همچنین معادله (۲۹) به صورت زیر در می‌آید:

$$R-(\alpha-6)k_\mu k^\mu + 2\Lambda = 0 \qquad (۳۸)$$

باید به این نکته اشاره شود که منبع با بعد ماده استفاده شده برای شکستن تقارن همدیس به صورت یک ثابت کیهان شناسی ظاهر شده است. همچنین در چارچوب ارجح که با شرایط $\phi^2 \sim G^{-1}$ و $\mu^2 \sim \Lambda$ معین شده، ثابتِ جفت‌شدگی ماده کیهانی به گرانش مقدار درستی یافته است. همچنین میدان برداری k_μ که در هندسه ویل کمیتی هندسی بحساب می آید به صورت یک میدان مزونی با جرم $\sqrt{\frac{(6-\alpha)}{8\pi G}}$ ظاهر شده است. برای مقادیر اندک، از درجه بزرگی جرم فوتون، این میدان مزونی k_μ از میدان مربوط به یک فوتون غیر قابل تمایز می شود. بخش آینده به تخمین این مقدار جرم با توجه به مشخصه های عالم در مقیاس بزرگ اختصاص می یابد.

۵- تخمین جرم فوتون

ابتدا اجازه‌دهید که فرض‌کنیم جهان در مقیاس‌های بزرگ همگن و همسانگرد است. دقت می‌کنیم که در فضا-زمانی با چنین فرض هایی میدان تانسوری $F_{\mu\nu}$ شکل ساده ای می‌یابد. در واقع $F_{\mu\nu}$ تانسوری پاد متقارن با ۳ درجه آزادی است. اما با فرض های تقارنی همسانگردی و همگنی تنها یک درجه آزادی باقی می- ماند که آن هم به مختصه زمان بستگی می‌یابد. در اصل مؤلفه های تانسور میدان $F_{\mu\nu}$ را می توان به صورت زیر نوشت:

$$F_{\mu\nu} = f(t)\varepsilon_{\mu\nu} \qquad (۳۹)$$

که در آن $f(t)$ تابعی از زمان و $\varepsilon_{\mu\nu}$ یک تانسور ثابت پاد متقارن است. با توجه به اینکه:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu k_\nu - \partial_\nu k_\mu \qquad (۴۰)$$

داریم:

$$f(t) = \partial_t k = \dot{k} \qquad (۴۱)$$

با

$$k_1 = k_2 = k_3 = k(t) \qquad (۴۰)$$

به طوری که علامت نقطه مشتق گیری نسبت به زمان است و به دلیل همگنی و همسانگردی مؤلفه صفرم پتانسیل برداری k_0 تابعی از زمان شده است.

حال اجازه دهید که $\Sigma_{\mu\nu}$ را به صورت یک مایع کامل بدون فشار با چگالی ρ در نظر بگیریم. با توجه به فرم گفته شده برای $F_{\mu\nu}$ و با احتساب متریک فرید من-رابرتسون والکر:

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2(dx^2+dy^2+dz^2) \qquad (۴۳)$$

که در آن $a(t)$ تابعی دلخواه از زمان است، مؤلفه‌های زمانی و مکانی معادله (۳۶) به صورت زیر درمی آید:

$$k_0 = 0 \qquad (۴۴)$$

$$\ddot{k} + H\dot{k} + \frac{(6-\alpha)}{8\pi G}k = 0 \qquad (۴۵)$$

در آن $H = \frac{\dot{a}}{a}$ پارامتر هابل است. همچنین رابطهٔ (۳۸) به صورت زیر در می آید:

$$\frac{(\alpha-6)}{2}\frac{k^2}{a^2} + \dot{H} + 2H^2 + \frac{\Lambda}{3} = 0 \qquad (۴۶)$$

حال می توانیم از رابطه اخیر مقدار α را تخمین بزنیم. در دوره کنونی از تحول جهان داریم $H \sim H_0$ که در آن H_0 مقدار کنونی ثابت هابل به صورت $H_0 \sim \frac{1}{R_0}$

است [۴، ۵]. همچنین ثابت کیهان شناسی Λ را می توانیم به صورت $\Lambda \sim \frac{1}{R_0^{\ 2}}$ در نظر بگیریم. حال با استفاده از رابطه (۴۶) داریم:

$$k^2 \sim \frac{2a^2}{6-\alpha}\Lambda \qquad (۴۷)$$

با قرار دادن (۴۷) در (۴۵)، داریم:

$$6-\alpha \sim 8\pi G\Lambda \qquad (۴۸)$$

حال با توجه به معادله (۳۷) جرم فوتون به صورت $\sqrt{\frac{(6-\alpha)}{8\pi G}}$ داده شده که با استفاده از رابطه (۴۸) به صورت زیر در می آید:

$$m \sim \sqrt{\frac{(6-\alpha)}{8\pi G}} \sim \sqrt{\Lambda} \sim \frac{1}{R_0} \qquad (۴۹)$$

رابطه اخیر نشان می دهد که در یک جهان نامحدود جرم فوتون صفر است . اما در یک جهان محدود میدان برداری k^μ دارای جرم هرچند اندکی می‌شود. از این نظر این میدان برداری می‌تواند منسوب به یک فوتون باشد.

۶- نتیجه گیری

ما در این مقاله چارچوب همدیس ویژه ای را مشخص نمودیم که دربرگیرندۀ خواص ماده کیهانی موجود در یک جهان محدود است. در اینجا بر این نکته تأکید می کنیم که این مقاله از مقاله قبلی ما متفاوت می باشد [۱]. در این مقاله هدف ما در واقع تنها تخمین جرم فوتون و در نتیجه ثابت جفت شدگی α که حلقه اتصال بین تقارن همدیس و پیمانه‌ای نظریه می‌باشد بوده است. در این رهیافت نیازی به بدست آوردن حل های دقیق از مسئله نیست و پاسخ ها بدون بستگی خاصی به جواب های دقیق بدست می آیند. از این نظر رهیافت مورد استفاده ارزشمند است.

مقدار جرمی که برای فوتون بدست آمده از همان درجه بزرگی است که از دیگر روش های نظری بدست آمده است. از جمله این روش ها می توان به روش عدم قطعیت هایزنبرگ در جهانی با عمر محدود [۸] و رابطه دوبروی که با در نظرگرفتن کیهان شناسی *دوسیته* بدست آمده [۹]، یاد نمود. همچنین مقدار تخمینی جرم فوتون بدست آمده با مقادیر تجربی آن سازگار است. بنابراین می‌توان گفت که مزون ویل در مدل مورد استفاده ما از یک میدان فوتونی قابل تفکیک نیست.

در چارچوب کیهان شناسی مشخص شده، پارامتر α که ارتباط بین تقارن همدیس و پیمانه ای را در نظریۀ ویل-دیراک برقرار میسازد، را می توان تخمین زد. مقدار تقریبی آن با استفاده از رابطه (۴۸) و در واحد های قراردادی به صورت زیر است:

$$(6-\alpha) \approx \frac{\hbar}{c^5}(8\pi G) \approx \frac{\hbar}{c^5}\left(\frac{8\pi G}{R^2{}_0}\right) \approx 2.5\times10^{-121} \qquad (۵۰)$$

این مقدار بسیار کوچک بر دو نکته فیزیکی اشاره دارد. اول آنکه نظریۀ ویل-دیراک با تقریب خوبی به نظریۀ اینشتین-ماکسول قابل تبدیل است. دوم آنکه تقارن‌های همدیس و پیمانه‌ای تقریباً از هم مجزا هستند.

مراجع

[1] Mirabotalebi S., Ahmad F., i, Gen. Relativ. Gravit., 40 و2008, pp. 8192.

[2] Wey H., A., *New Extension of Relativity Theory*, Ann. Phys. (Leipzig) 59, 1919, pp. 101.

[3] Dirac P. A. M., Long Range Forces and Broken Symmetries, Proc. Roy. Soc. London A 333, 1973, pp. 403.

[4] Adler, Bazin and Schiffer, *Introduction to General Relativity*, 1956.

[5] Misner C. W., Thorne K. S. and J. A. Wheeler, *Gravitation* (Freeman, San Francisco, 1973.

[6] Proca A. L., J. Phy. Radium 7, 1936, pp. 347.

[7] Obukhov, Y.N., Vlachynsky, E. J.: Ann. Phys. 8, 1999, pp. 497510.

[8] Barrow J. D., Burman R. R, *New Light on Heavy Light*, Nature (London) 307, 1984, pp. 14.

[9] de Broglie, *Th´eorie G´en´erale des Particules `a Spin*, (Gauthier-Villars, Paris) 2nd. ed., 1954, pp. 190