

فرآیندهای پخش و برهم‌کنش روی درخت کیلی

لاله فرهنگ متین^۱، حسن فرخ‌پیام^۲، معصومه باقری^۳، بتول قلندری^۴

چکیده: عمومی‌ترین مدل پخش و برهم‌کنش روی درخت کیلی با فرض برهم‌کنش با نزدیک‌ترین همسایگی معرفی و توسط دو دیدگاه بازه خالی و بازه پُر، در دو حالت ایستا و دینامیکی بررسی می‌شود. برای این مدل، ابتدا معادله‌ی تحول زمانی به فرم بسته محاسبه می‌شود. سپس تحول چنین سامانه‌ای با استفاده از این معادله، به صورت تحلیلی و عددی با تقریب تفاضل محدود صریح زمانی مطالعه خواهد شد. در انتها، نتایج حاصل از این حل‌ها بررسی و مقایسه می‌شوند.

واژه‌های کلیدی: فرآیندهای پخش و برهم‌کنش، درخت کیلی، روش بازه خالی و بازه پُر، معادله‌ی تحول، حالت شوک.

۱. مقدمه

دست می‌آوریم. معادله‌ی تحول زمانی بیانگر تغییرات زمانی احتمال حضور یک سامانه‌ی تصادفی در یک حالت معین است که این تغییرات ناشی از گذار این سامانه از یک حالت معین به حالت‌های دیگر است. در این مقاله ابتدا مقدمه‌ای بر فرآیندهای پخش و برهم‌کنش روی درخت کیلی را بیان می‌نماییم، سپس مدل‌های حل‌پذیر توسط روش بازه خالی و در انتها نیز حالت شوک روی درخت کیلی را با روش بازه پُر بررسی می‌کنیم.

فرآیندهای غیرتعادلی در چارچوب مکانیک آماری بررسی می‌شوند، به منظور ساده‌سازی این گونه مسائل، مکانیک آماری از مدل‌های تصادفی استفاده می‌کند. یک گروه از فرآیندهای غیر تعادلی، مدل‌های پخش و برهم‌کنش هستند که این فرآیندها با روش‌های تحلیلی، تقریبی و شبیه‌سازی بررسی می‌شوند [۱-۳]. در مقاله‌ی [۴]، عمومی‌ترین مدل پخش و برهم‌کنش روی درخت کیلی با فرض وجود برهم‌کنش با نزدیک‌ترین همسایگی معرفی و به طور دقیق با روش بازه خالی حل شده است. شوک منفرد نیز به وسیله روش بازه پُر در مقالات [۵-۷] مورد مطالعه قرار گرفته است.

۲. سامانه‌ی پخش و برهم‌کنش روی درخت کیلی

یک دسته از فرآیندهای تصادفی، مدل‌های پخش و برهم‌کنش هستند. به طوری که تعدادی ذره از یک یا چند نوع، روی یک شبکه یا پیوستار حرکت می‌کنند و پخش می‌شوند و به دلیل برهم‌کنش با یکدیگر تعدادشان ممکن است تغییر کند. علاوه بر اینکه وجود برهم‌کنش بین جایگاه‌ها می‌تواند تعداد ذرات را تغییر دهد، ورود و خروج ذره از مرزهای سامانه نیز می‌تواند منجر به تغییر تعداد ذرات شود. در مقاله‌ی حاضر

در مقاله‌ی حاضر فرآیندهای پخش و برهم‌کنش را روی درخت کیلی با دو دیدگاه بازه خالی و بازه پُر بررسی و معادله‌ی تحول زمانی را برای این مدل‌ها به

۱ و ۲) استادیار و هیئت علمی گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران شمال: laleh.matin@alzahra.ac.ir
۳ و ۴) دانشجوی کارشناسی ارشد فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران شمال

از بین ۱۲ نوع برهم کنش مابین دو جایگاه همسایه تنها سه برهم کنش زیر مجاز هستند و معادله تحول را بسته نگه می‌دارند:

$$\bullet \circ \rightarrow \bullet \bullet, R_1$$

$$\circ \circ \rightarrow \circ \bullet, R_2$$

$$\circ \circ \rightarrow \bullet \bullet, R_3$$

شکل عمومی معادله تحول زمانی تابع احتمال عبارت است از:

$$\frac{dP_j(t)}{dt} = \sum_{i \neq j} [W_{ji}P_i(t) - W_{ij}P_j(t)] \quad (2)$$

که در آن، W_{ji} نرخ گذار سامانه‌ی تصادفی از حالت j به i است و P_j احتمال حضور آن سامانه در حالت j است. $\frac{dP_j}{dt}$ ناشی از دو عامل است: اول اینکه سامانه در حالت j باشد و به دلیل گذار به حالت‌های دیگر از حالت مورد نظر خارج شود (چاه). دوم اینکه سامانه در حالت‌هایی به جز j باشد و به دلیل گذار به حالت j بیاید (چشمه).

در اینجا تمام برهم‌کنش‌های مناسب و مجاز از نوع چاه هستند. پس معادله تحول زمانی $E_n(t)$ را می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} \frac{dE_n}{dt} = & -R_n r_1 P(\bullet - O_n) - R_n (r_2 + r_3) \\ & * P(O - O_n) - (n-1)(2r_2 + r_3)P(O_n) \end{aligned} \quad (3)$$

R_n تعداد همسایه‌های یک ناحیه خالی متشکل از n جایگاه به هم پیوسته می‌باشد که از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$R_n = n(\xi - 2) + 2 \quad (4)$$

و با در نظر گرفتن روابط زیر:

$$\begin{aligned} P(\bullet - O) + P(O - O) &= P(O_n) \\ P(\bullet - O) &= E_n - E_{n+1} \end{aligned} \quad (5)$$

معادله‌ی تحول زمانی $E_n(t)$ به صورت بسته‌ی زیر در می‌آید:

فرآیندهای پخش و برهم‌کنش را روی درخت کیلی با دو دیدگاه بازه خالی و بازه پُر بررسی خواهیم کرد. درخت کیلی یک گراف همبند، متقارن و بدون دور است که هرگره آن به ξ گرهِ دیگر متصل است (شکل ۱).

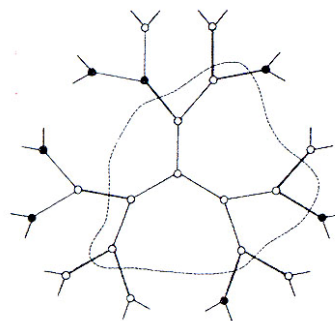
دو جایگاه را همسایه می‌گویند اگر توسط یک یال به هم متصل شده باشند. هر جایگاه ممکن است خالی یا توسط یک ذره پُر شده باشد در اینجا پُر (خالی) با \bullet (\circ) نشان داده می‌شود و برهم‌کنش بین جایگاه‌ها را نیز از نوع نزدیک‌ترین همسایگی در نظر می‌گیریم.

۳. مدل‌های حل‌پذیر توسط روش بازه خالی روی درخت کیلی

در روش بازه خالی تحول زمانی تابع احتمال، $E_n(t)$ (احتمال آنکه در زمان t ، مجموعه‌ی n تایی از جایگاه‌های متصل به هم روی درخت کیلی خالی باشند) را بررسی می‌کنیم. در اینجا فرض می‌کنیم شبکه‌ی کیلی همگن باشد، یعنی $E_n(t)$ به شاخص اضافی که معرف جای این ناحیه خالی است بستگی ندارد. برای مثال خوشه‌ای را در نظر بگیرید که احتمال پُر بودن یک جایگاه در آن است و این احتمال مستقل از حالت‌های دیگر جایگاه‌ها است پس:

$$E_n = (1 - \rho)^n \quad (1)$$

مجموعه‌ی n تایی از جایگاه‌های متصل به هم خالی را با O_n نشان می‌دهیم شکل (۱).



شکل ۱. نمایشی از یک خوشه‌ی خالی روی درخت کیلی با

$$\xi = 3$$

۳-۱-۲. جواب حالت دینامیکی:

در بررسی حالت دینامیکی، به سامانه‌ی تصادفی هامیلتونی نسبت می‌دهیم. سئوالی که مطرح است یافتن طیفی برای هامیلتونی تحول است. که هم ارز یافتن پاسخ‌هایی با وابستگی نمایی است. در نتیجه پاسخ دینامیکی که ارائه می‌دهیم به صورت زیر است:

$$E_n^\varepsilon(t) = E_n^\varepsilon \exp(\varepsilon t) \quad (۹)$$

با جایگذاری رابطه‌ی (۹) در معادله‌ی تحول زمانی خواهیم داشت:

$$-[R_n r_1 + (n-1)(2r_2 + r_3) + \varepsilon] E_n^\varepsilon + R_n (r_1 - r_2 - r_3) E_{n+1}^\varepsilon = 0 \quad (۱۰)$$

از این معادله داریم:

$$E_{n+1}^\varepsilon = J_n E_n^\varepsilon \quad (۱۱)$$

که J_n به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$J_n = \frac{R_n r_1 + (n-1)(2r_2 + r_3) + \varepsilon}{R_n (r_1 - r_2 - r_3)}$$

J_n منفی یا بزرگ‌تر از یک است و با توجه به رابطه‌ی (۱۱) اگر J_n منفی باشد E_n^ε ها مفهوم احتمال را نخواهند داشت و اگر J_n بزرگ‌تر از یک باشد آنگاه E_n^ε ها دیگر نزولی نخواهند بود. در نتیجه J_n باید برای برخی از n های مثبت، صفر شود [۴]، که این شرط روی J_n مقادیر مجاز برای ε را می‌دهد، پس:

$$\varepsilon_k = -\xi r_1 - (k-1)\beta, \quad k \geq 1 \quad (۱۲)$$

k شمارنده است و β بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\beta = (\xi - 2)r_1 + 2r_2 + r_3$$

ε_k ها معرف طیف انرژی هستند و گسسته می‌باشند و یک گاف انرژی بین بزرگ‌ترین مقدار ویژه و صفر وجود دارد. این بدان معنی است که سامانه با زمان واهلش مشخصی به سمت پایای خودش می‌رود:

$$\tau = \frac{1}{\xi r_1} \quad (۱۳)$$

$$\frac{dE_n}{dt} = R_n \{-r_1(E_n - E_{n+1}) - (r_2 + r_3)E_{n+1}\} - (n-1)(2r_2 + r_3)E_n \quad (۶)$$

در این مقاله فرض شده است که $\Gamma_3, \Gamma_2, \Gamma_1$ غیر صفرند.

۳-۱-۱. حل معادله‌ی تحول تابع احتمال

$$E_n(t)$$

۳-۱-۱-۱. جواب حالت ایستا:

در حل پایا، مشتق زمانی E_n صفر در نظر گرفته می‌شود. بنابراین:

$$R_n [-r_1(E_n^s - E_{n+1}^s) - (r_2 + r_3)E_{n+1}^s] - (n-1)(2r_2 + r_3)E_n^s = 0 \quad (۷)$$

E_n ها معرف احتمال هستند، در نتیجه غیر منفی هستند و چنانچه خوشه‌ی $(n+1)$ تایی خالی داشته باشیم، خوشه‌ی n تایی خالی نیز خواهیم داشت. پس E_n ها نسبت به n نزولی هستند یعنی احتمال آنکه مجموعه‌ی n تایی خالی باشد بیشتر از احتمال خالی بودن مجموعه $(n+1)$ تایی است و به شرطی معادله فوق برقرار است که همه‌ی E_n^s ها صفر باشند زیرا از این معادله نتیجه می‌شود که:

$$\frac{E_{n+1}^s}{E_n^s} = \frac{R_n r_1 + (n-1)(2r_2 + r_3)}{R_n (r_1 - r_2 - r_3)} \quad (۸)$$

چنانچه $r_1 > r_2 + r_3$ باشد کسر $\frac{E_{n+1}^s}{E_n^s}$ بزرگ‌تر از یک است که در این حالت E_n ها نزولی نیستند و اگر $r_1 < r_2 + r_3$ باشد کسر $\frac{E_{n+1}^s}{E_n^s}$ منفی است و E_n ها مفهوم احتمال را ندارند. پس تنها حل ممکن معادله‌ی (۷) به صورت زیر است:

$$E_n^s = 0$$

بدین معنی که تمام جایگاه‌ها در حالت پایا اشغال می‌شوند و این نتیجه قابل قبول است زیرا در همه‌ی واکنش‌های مجاز، ذرات خلق می‌شوند.

$$\frac{E_n^{t+\Delta t} - E_n^t}{\Delta t} = R_n[-r_1(E_n^t - E_{n+1}^t) - (r_2 + r_3)E_{n+1}^t - (n-1)(2r_2 + r_3)E_n^t] \quad (19)$$

با مرتب کردن رابطه‌ی (۱۹) می‌توان $E_n^{t+\Delta t}$ را برحسب جملاتی از E_n^t و E_{n+1}^t بیان کرد. پس تابع احتمال $E_n^{t+\Delta t}$ ، به صورت بسته‌ی زیر در می‌آید:

$$E_n^{t+\Delta t} = E_n^t[1 - \Delta t(r_1 R_n + (n-1)(2r_2 + r_3))] + E_{n+1}^t \cdot \Delta t \cdot R_n[r_1 - (r_2 + r_3)] \quad (20)$$

در رابطه (۲۰) ضرایب باید مثبت باشند، که نتیجه حاصله را شرط پایداری و همگرایی حل عددی می‌نامیم: شرایط پایداری این معادله عبارتند از:

$$r_1 \geq r_2 + r_3$$

$$\Delta t \leq \frac{1}{r_1 R_n + (n-1)(2r_2 + r_3)} \quad (21)$$

در این حل عددی، $E_n^{t+\Delta t}$ در زمان‌های طولانی به سمت صفر همگرا می‌شود و شرایط پایداری که در رابطه (۲۱) نشان دادیم این همگرایی را ارضا می‌کند.

۳-۲. مقایسه حل‌های تحلیلی و عددی

معادله تحول $E_n(t)$:

بعد از ارائه روش‌های عددی و تحلیلی در حل معادله‌ی تحول $E_n(t)$ و بدست آوردن پاسخ این معادلات، به مقایسه این پاسخ‌ها می‌پردازیم. برای این منظور یک شبکه با تعداد جایگاه‌های محدود در نظر می‌گیریم، تعداد جایگاه‌ها را n_{\max} می‌نامیم یعنی شبکه کراندار است. سپس E_n (احتمال خالی بودن n جایگاه به هم پیوسته است) را در دو نمایش عددی و جواب خاص بررسی می‌کنیم.

الف: ابتدا شبکه‌ای با ۳ جایگاه یعنی $n_{\max} = 3$ در نظر می‌گیریم، در این حالت E_1 ، E_2 و E_3 به دست آمده را در هر دو نمایش (عددی و جواب خاص) در شکل زیر می‌بینیم.

حل عمومی برای معادله‌ی تحول در حالت دینامیکی به شرح زیر است:

$$E_n(t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k E_n^k \exp(\varepsilon_k t) \quad (14)$$

که در آن C_k ها با شرط اولیه مشخص می‌شوند. حل خاصی که برای این حالت ارائه می‌دهیم عبارت است از:

$$E_n(t) = E_1(t)[b(t)]^{n-1} \quad (15)$$

با جایگذاری رابطه‌ی (۱۵) در معادله‌ی (۶) و مرتب‌سازی جملات داریم:

$$b(t) = \frac{b(0)\exp(-\beta t)}{1 + ab(0)[1 - \exp(-\beta t)]} \quad (16)$$

$$E_n(t) = E_1(0)\exp(-\xi r_1 t) \left\{ \frac{1}{1 + ab(0)\{1 - \exp(-\beta t)\}} \right\}^{\frac{\xi}{(\xi-2)}} \quad (17)$$

با جایگذاری این روابط در جواب خاص، معادله‌ی (۱۵) نتیجه می‌شود:

$$E_n(t) = E_1(0)\exp(-\xi r_1 t - (n-1)\beta t) \left\{ \frac{1}{1 + ab(0)\{1 - \exp(-\beta t)\}} \right\}^{\frac{\xi}{(\xi-2)} + n-1} \quad (18)$$

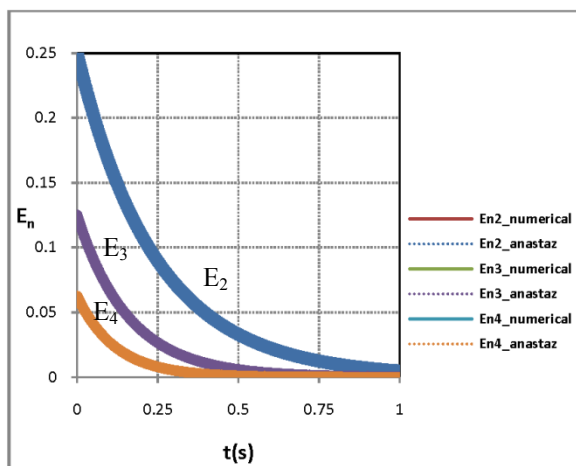
که در آن در زمان اولیه‌ی $t=0$ فرض می‌کنیم:

$$E_n(0) = (1 - \rho)^n$$

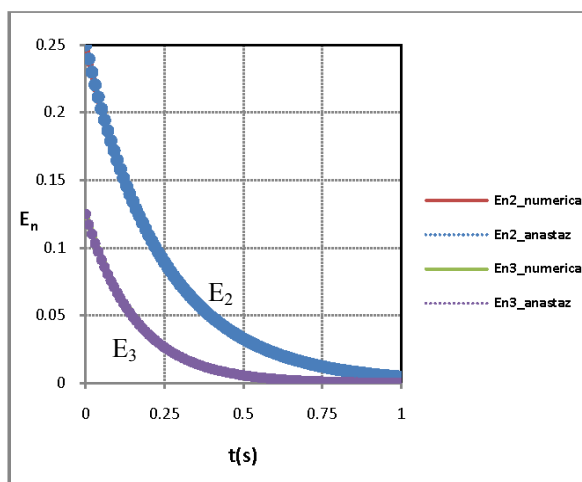
۳-۱-۳. حل عددی معادله تحول $E_n(t)$ با

روش تفاضل محدود صریح زمانی:

در این بخش، معادله تحول را به صورت عددی با روش تفاضل محدود صریح زمانی بررسی می‌کنیم. معادله‌ی تحول زمانی $E_n(t)$ ، طبق تعریف مشتق به صورت جبری زیر در می‌آید:



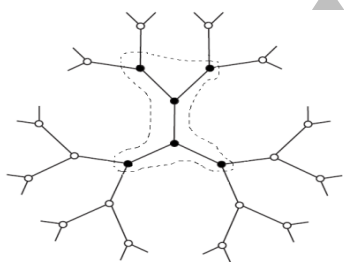
شکل ۴. نمایش E_2 ، E_3 و E_4 به صورت عددی و تحلیلی در سامانه‌ای با $n_{Max} = 40$.



شکل ۲. نمایش E_2 و E_3 به صورت عددی و تحلیلی خاص در سامانه‌ای با $n_{Max} = 3$.

۴-۱. حالت شوک روی درخت کیلی

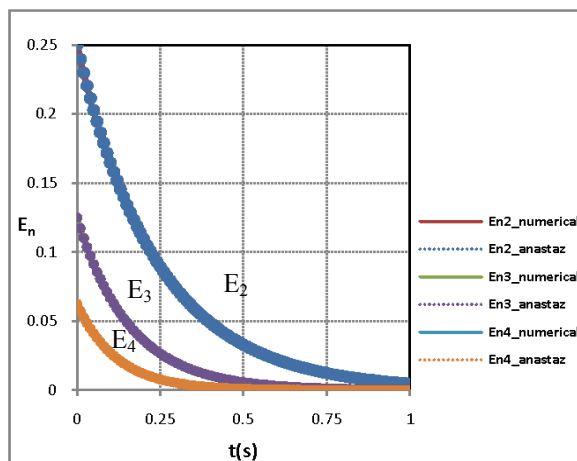
درخت کیلی با عدد $\xi \geq 3$ در نظر بگیرید. چنانچه یک خوشه‌ی n تایی از جایگاه‌های متصل به هم، روی این درخت با احتمال ρ پر و بقیه جایگاه‌ها خالی باشند آنگاه به این آرایش خاص روی درخت کیلی، حالت شوک می‌گویند به طور مثال برای $\xi = 3$ به شکل (۵) توجه کنید:



شکل ۵. نمایشی از درخت کیلی با $\xi=3$ و خوشه $n=6$.

به طور کلی تغییرات ناپیوسته‌ی چگالی، حالت شوک نامیده می‌شود. تابع احتمال وابسته به زمان $P_n(t)$ ، معرف احتمال آن است که یک خوشه‌ی n جایگاهی در زمان t روی درخت کیلی پر و بقیه شبکه خالی باشد. احتمال پر بودن یک جایگاه روی درخت کیلی ρ می‌باشد که به حالت جایگاه‌های دیگر وابسته نیست. در حالت کلی احتمال داشتن یک

ب: حال شبکه‌ای با ۱۵ جایگاه در نظر می‌گیریم، در این حالت نیز E_1 ، E_2 و E_3 به دست آمده را در هر دو نمایش (عددی و جواب خاص) در شکل ۳ می‌بینیم.



شکل ۳. نمایش E_2 ، E_3 و E_4 به صورت عددی و تحلیلی در سامانه‌ای با $n_{Max} = 15$.

ج: در انتها، شبکه ای با ۴۰ جایگاه در نظر می‌گیریم. در این حالت E_1 ، E_2 و E_3 به دست آمده را در هر دو نمایش (عددی و جواب خاص) در شکل زیر می‌بینیم.

می‌بینیم هر چه کران شبکه بته یعنی n_{Max} ، بزرگتر اختیار شود، پاسخ عددی و جواب خاص به یکدیگر نزدیکتر می‌شوند.

$$\frac{dP_n}{dt} = -r_1 R_n P(\bullet_n) + r_1 R_{n-1} P(\bullet_{n-1}) \quad (23)$$

R_n تعداد همسایگی های متصل به یک خوشه ی n جایگاهی پُر می باشد که از رابطه زیر به دست می آید:

$$R_n = n(\xi - 2) + 2$$

در نتیجه معادله تحول زمانی $P_n(t)$ به شکل زیر در می آید:

$$\begin{aligned} \frac{dP_1(t)}{dt} &= -r_1 \xi P_1(t) ; n=1 \\ \frac{dP_n(t)}{dt} &= -r_1 R_n P_n(t) + r_1 R_{n-1} P_{n-1}(t); n > 1 \end{aligned} \quad (24)$$

در رابطه فوق $r_1 \neq 0$ است.

۳-۴. حل معادله تحول تابع احتمال $P_n(t)$

۱-۳-۴. جواب حالت ایستا

ابتدا حل ایستای معادله تحول زمانی $P_n(t)$ بررسی خواهد شد، به طوری که:

$$\frac{dP_n^s}{dt} = 0, \quad (25)$$

در نتیجه:

$$\begin{aligned} R_{n-1} P_{n-1}^s - R_n P_n^s &= 0 ; n > 1 \\ P_n^s &= \frac{R_{n-1}}{R_n} P_{n-1}^s ; n > 1 \end{aligned} \quad (26)$$

می بینیم در حالت ایستا احتمال داشتن یک خوشه-ی n جایگاهی پُر به احتمال داشتن یک خوشه ی $(n-1)$ جایگاهی وابسته است، بنابراین ابتدا حالت $n=1$ را بررسی می نماییم:

$$\begin{aligned} \frac{dP_1^s}{dt} &= 0, \\ (-r_1 \xi P_1^s) &= 0, \\ P_1^s &= 0. \end{aligned} \quad (27)$$

با استفاده از رابطه فوق به وضوح می بینیم تنها جواب قابل قبول برای چنین شبکه ای در حالت ایستا به صورت زیر است:

$$P_n^s = 0. \quad (28)$$

خوشه ی پُر n جایگاهی روی درخت کیلی با رابطه زیر داده می شود:

$$P_n = \rho^n \quad (22)$$

یک مجموعه n تایی از جایگاه های متصل به هم پُر را با \bullet_n نشان می دهیم.

۲-۴. مدل های حل پذیر توسط روش بازه پُر

روی درخت کیلی

در اینجا تحول زمانی تابع احتمال وابسته به زمان $P_n(t)$ بررسی خواهد شد. همانطور که گفتیم، $P_n(t)$ معرف احتمال آن است که یک خوشه ی پُر n جایگاهی در زمان t روی درخت کیلی پُر و بقیه شبکه خالی باشد به عبارت دیگر شوک همانند خوشه در درخت کیلی است. برای بررسی تحول خوشه ابتدا باید معادله تحول زمانی مربوط به چنین آرایشی نوشته شود. معادله تحول به شرط آنکه کلیه جملات این معادله را بتوان بر حسب P_n ها بیان نمود بسته خواهد بود. تعدادی از برهم کنش ها، معادله تحول را بسته نگه نخواهند داشت. بسته بودن معادله تحول نیاز دارد تا نرخ هایی را که یک جایگاه خالی روی درخت ایجاد می کند صفر در نظر بگیریم، زیرا چنین برهم کنش هایی تنها با ایجاد یک جایگاه خالی باعث می شوند یک خوشه n تایی کاملاً پُر به هم پیوسته را به دو خوشه پُر کوچک تر تفکیک کنند و باعث نقض تعریف شوک شوند. زیرا شوک در شبکه ای قابل تعریف می باشد که یک ناحیه با چگالی ρ پُر و بقیه شبکه خالی باشد. برای نوشتن معادله تحول زمانی $P_n(t)$ باید برهم کنش هایی را انتخاب کنیم که یک مجموعه ی کاملاً پُر را به یک مجموعه ی پُر بزرگ تر یا کوچک تر تبدیل کند. با توجه به این تعریف تنها برهم کنش مجاز به شرح زیر است:



در نتیجه معادله تحول زمانی خوشه روی درخت کیلی به صورت زیر است:

$$P_n(t) = \sum_{j=1}^n A_{n,j} e^{-r_1 R_j t} \quad (33)$$

با جایگذاری معادله‌ی فوق در معادله‌ی تحول خواهیم داشت:

$$A_{n,j} = \frac{R_{n-1}}{R_n - R_j} A_{n-1,j} \quad ; j < n$$

$$A_{n,n} = \rho^n - \sum_{j=1}^{n-1} A_{n,j} ,$$

$$A_{1,1} = \rho .$$

۳-۳-۴. حل عددی معادله تحول با روش

تفاضل محدود صریح زمانی

در این بخش معادله تحول را به صورت عددی با روش تفاضل محدود صریح زمانی بررسی می‌کنیم. برای این منظور معادله‌ی تحول را به صورت جبری زیر می‌نویسیم:

$$\frac{P_n^{t+\Delta t} - P_n^t}{\Delta t} = -r_1 R_n P_n^t + r_1 R_{n-1} P_{n-1}^t$$

برای مرتب کردن این معادله، $P_n^{t+\Delta t}$ را بر حسب عبارت‌های P_n^t و P_{n-1}^t می‌نویسیم. پس تابع احتمال به صورت بسته‌ی زیر در می‌آید:

$$P_n^{t+\Delta t} = P_n^t [1 - r_1 R_n \Delta t] + P_{n-1}^t [r_1 R_{n-1} \Delta t] \quad (34)$$

در رابطه فوق P_n^t یک تابع احتمال و مثبت می‌باشد، لذا شرط پایداری این معادله به صورت زیر است:

$$1 - r_1 R_n \Delta t \geq 0 \quad \Delta t \leq \frac{1}{r_1 R_n} \quad (35)$$

حال برای $n=1$ معادله تحول را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\frac{dP_1(t)}{dt} = -r_1 \xi P_1(t) , \quad n = 1$$

از حل معادله فوق، رابطه زیر حاصل می‌شود:

این نتیجه با توجه به شرطی که روی نرخ‌ها بود، قابل قبول می‌باشد به این معنی که احتمال پُر بودن هر مجموعه n تایی محدود صفر است و کل شبکه پُر می‌باشد زیرا در تنها برهم کنش مجاز، ذره خلق می‌گردد.

۲-۳-۴. جواب حالت دینامیکی

برای بررسی معادله تحول به صورت دینامیکی، ابتدا حالت $n=1$ را در نظر می‌گیریم:

$$\frac{dP_1(t)}{dt} = -r_1 \xi P_1(t) \quad ; n=1 \quad (29)$$

جواب این معادله به صورت نمایی زیر می‌باشد:

$$P_1(t) = P_1(0) e^{-r_1 \xi t} , \quad (30)$$

حال معادله تحول را به ازای $n=2$ بررسی می‌نماییم:

$$\frac{dP_2(t)}{dt} = -r_1 R_2 P_2(t) + r_1 R_1 P_1(t) \quad (31)$$

برای محاسبه پاسخ این حالت، باید معادله زیر را حل کنیم:

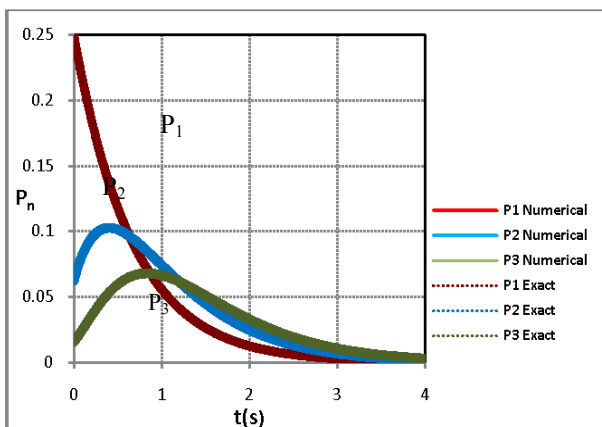
$$\frac{dP_2(t)}{dt} + r_1 R_2 P_2(t) = r_1 R_1 P_1(0) e^{-r_1 \xi t}$$

از حل معادله فوق $P_2(t)$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$P_2(t) = \left\{ \frac{R_1}{R_2 - \xi} P_1(0) \right\} e^{-r_1 \xi t} + \left\{ P_2(0) - \frac{R_1}{R_2 - \xi} P_1(0) \right\} e^{-r_1 R_2 t} , \quad (32)$$

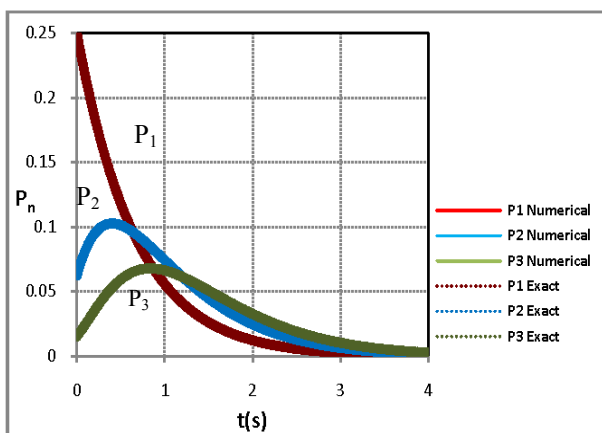
اما همانطور که دیدیم یافتن مراتب بالاتر $P_n(t)$ به دلیل حجم زیاد محاسبات، پیچیده می‌باشد، از این رو به دست آوردن یک پاسخ عمومی برای حل معادله تحول مفید می‌باشد. جوابی که به فرم بسته برای حل دقیق حالت دینامیکی معادله تحول پیش‌بینی می‌شود به صورت زیر است:

ب: شبکه ای با ۱۵ جایگاه در نظر می‌گیریم، در این حالت نیز P_1 ، P_2 و P_3 به دست آمده را در هر دو نمایش (عددی و جواب دقیق) در شکل ۷ می‌بینیم:



شکل ۷. نمایش P_1 ، P_2 و P_3 به صورت عددی و تحلیلی در خوشه‌ای با $n_{Max} = 15$

ج: خوشه‌ای ۴۰ جایگاهی در نظر می‌گیریم، در این حالت نیز P_1 ، P_2 و P_3 شبیه سازی شده در هر دو نمایش (عددی و جواب دقیق) در شکل ۸ آمده است:



شکل ۸. نمایش P_1 ، P_2 و P_3 به صورت عددی و تحلیلی در خوشه‌ای با $n_{Max} = 40$

با توجه به نمودارهای ۶، ۷، و ۸، می‌بینیم هر چه کران شبکه یعنی n_{Max} ، بزرگ‌تر اختیار شود، پاسخ‌های عددی و جواب دقیق به یکدیگر نزدیک‌تر می‌شوند. یعنی پاسخ‌های ارائه شده برای سامانه‌هایی با ابعاد بزرگ‌تر، دقیق‌تر می‌باشند.

$$P_1^{t+\Delta t} = P_1^t [1 - r_1 \xi \Delta t] \quad (36)$$

شرط پایداری رابطه فوق نیز به صورت زیر است:

$$\Delta t' \leq \frac{1}{r_1 \xi} \quad (37)$$

از آنجایی که در رابطه (۳۴) همواره $n > 1$ می‌باشد و نیز از مقایسه روابط (۳۵) و (۳۷) به وضوح می‌بینیم که:

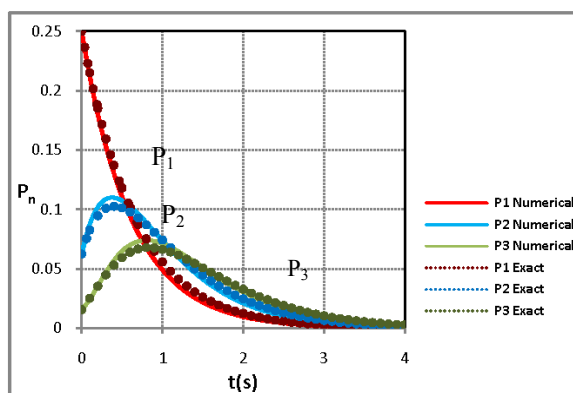
$$\Delta t < \Delta t' \quad (38)$$

که این رابطه، شرط پایداری حل عددی را نیز ارضاء می‌نماید.

۴-۴. مقایسه حل‌های تحلیلی و عددی معادله تحول

در این بخش نیز بعد از ارائه روش‌های تحلیلی و عددی حل معادله تحول و به دست آوردن پاسخ این معادلات، به مقایسه این پاسخ‌ها می‌پردازیم. برای بررسی عددی این روش‌ها، ابتدا یک شبکه با تعداد جایگاه‌های محدود را در نظر می‌گیریم، تعداد کل جایگاه‌ها را n_{Max} می‌نامیم. در این حالت شبکه (درخت کیلی) کراندار است. سپس به مقایسه نتایج حاصل از حل عددی و جواب دقیق می‌پردازیم.

الف: در حالت اول یک درخت کیلی با $n_{Max} = 3$ اختیار می‌کنیم، در این حالت P_1 ، P_2 و P_3 به دست آمده را در هر دو نمایش (عددی و جواب دقیق) بررسی می‌کنیم. نتایج حاصل از شبیه‌سازی چنین سامانه‌ای به صورت طرح وار در شکل زیر آمده است:



شکل ۹. نمایش P_1 ، P_2 و P_3 به صورت عددی و تحلیلی در خوشه‌ای با $n_{Max} = 3$

۵. نتیجه گیری

عمومی‌ترین مدل پخش و برهم‌کنش روی درخت کیلی با فرض برهم‌کنش با نزدیک‌ترین همسایگی مورد بررسی قرار گرفت. این مدل توسط دو دیدگاه بازه خالی و بازه پُر، به صورت تحلیلی و عددی با تقریب تفاضل محدود صریح زمانی بررسی شد. برای چنین مدل‌هایی ابتدا معادله‌ی تحول به فرم بسته محاسبه شد. سپس با استفاده از این معادله، تحول سامانه در بازه‌ی زمانی طولانی بررسی و نشان داده شد که در روش بازه خالی در حالت پایا همه‌ی جایگاه‌ها پر می‌باشند و همچنین طیف مربوط به هامیلتونی تحول در حالت دینامیکی گسسته است. در روش بازه پُر تحول شوک منفرد روی درخت کیلی در دو حالت پایا و دینامیکی بررسی شد و نشان داده شد که در زمان‌های طولانی پاسخ حالت دینامیکی تبدیل به حالت ایستا می‌شود یعنی در این دو حالت، احتمال پر بودن هر مجموعه‌ی n تایی محدود صفر است و کل شبکه پر می‌باشد. در انتها، با استفاده از ترسیم نمودارهای حاصل از حل‌های تحلیلی و عددی و مقایسه‌ی آن‌ها، نتایج چنین مدلی بررسی و اثبات شد.

مراجع

- [1] Schutz G. M., *Exactly solvable models for many-body systems far from equilibrium in Phase transitions and critical phenomenon*, vol. 19, Domb C. & Lebowitz J. (eds.), Academic Press, London, 2000
- [2] Schrechenberg M., Schadschneider A., Nagel k., *Discrete Stochastic Models for Traffic Flow*, Phys. Rev. E51, 1995, PP.193-198.
- [3] Ben-Avraham D., *Nonequilibrium Statistical Mechanics in One Dimension*, Privman V. (ed.), Cambridge University press, 1997, pp. 29-50.
- [4] Matin L. F., Aghamohammadi M., Khorrani M., *Exactly solvable reaction diffusion models on a Cayley tree*, Eur. Phys. J. B 56, 2007, pp.243-246.
- [5] Jafarpour F. H., *Shock in a Branching-Coalescing Model with Reflecting Boundaries*, Physics Letters, A 326, 2004, pp.14-19.
- [۶] فرهنگ‌متین لاله، « مطالعه حالت شوک روی درخت کیلی به وسیله روش بازه پُر»، مجله پژوهش فیزیک ایران، جلد ۸، شماره ۱، ۱۳۸۶.
- [7] Ferrari P. A., *Shocks in one-dimensional processes with a drift in: Probability and Phase Transition*, Ed. G. Grimmett (Dordrecht: Kluwer), 1994.