

تحلیل خمش یک قطاع حلقوی نازک از جنس ماده هدفمند به روش کانترووچ توسعه یافته

مجتبی شیخی*^(۱) علی محی الدین^(۲)

(۱) مدرس، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد مشهد، گروه مهندسی مکانیک، مشهد، ایران

(۲) مدرس، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد مشهد، گروه مهندسی مکانیک، مشهد، ایران

چکیده معادله حاکم بر تغییر شکل کوچک یک ورق نازک حلقوی ایزوتروپیک و غیر همگن ساخته شده از مواد هدفمند تحت بارگذاری عرضی در دستگاه مختصات استوانه‌ای در نظر گرفته شده است. در این مقاله ضریب پواسون ماده هدفمند ثابت فرض شده، ولی مدول یانگ آن به صورت یک تابع توانی در جهت شعاعی تغییر می‌کند. یک حل بسته با استفاده از تئوری کلاسیک تغییر شکل ورق‌های نازک (تئوری کیرشهف) و روش کانترووچ توسعه یافته برای تحلیل ورق ارائه شده است. اعتبار روش پیشنهادی با مقایسه نتایج سایر مراجع و پاسخ به دست آمده از روش تحلیلی لوی و روش عددی المان محدود ABAQUS تأیید شده و هماهنگی خوبی برای خیز و ممان ورق به دست آمده است.

واژه‌های کلیدی روش کانترووچ توسعه یافته، خمش ورق حلقوی، مواد هدفمند.

*عهده دار مکاتبات

نشانی: دانشگاه آزاد اسلامی واحد مشهد، دانشکده مهندسی، گروه مهندسی مکانیک

پست الکترونیکی: mojtabasheikhi@mshdiau.ac.ir

تلفن: ۰۹۳۶۹۱۳۱۸۲۷

۱- مقدمه

ضخامت [۱۸]، پایداری ورق مستطیلی با ضخامت متغیر خطی [۱۹] و ارتعاش یک ورق دایره‌ای غیرهمگن با ضخامت متغیر به صورت نمایی [۲۰].

در این مقاله یک ورق به شکل قطاع حلقوی ساخته شده از ماده هدفمند و در نتیجه با سختی خمشی متغیر در جهت شعاع در نظر گرفته شده است. هدف، به دست آوردن توابع خیز و ممان به شکل بسته با استفاده روش کانتروویچ توسعه یافته است که بتواند با دقت بالایی پاسخ دقیق معادله حاکم بر خیز ورق تحت بارهای یکنواخت و غیر یکنواخت را تقریب بزند.

به کار بردن هم‌زمان روش کانتروویچ توسعه یافته و روش‌های باقی‌مانده وزنی، باعث تبدیل معادله درجه چهار خیز ورق به دو معادله دیفرانسیل معمولی می‌شود که می‌توان پاسخ آن‌ها را به شکل بسته به دست آورد [۱۵].

برای دستیابی به حل تحلیلی معادلات دیفرانسیل به دست آمده، مدول یانگ ورق به صورت یک تابع توانی بر حسب شعاع در نظر گرفته شده است. مقایسه خیز و ممان به دست آمده در نقاط مختلف ورق با ابعاد و شرایط مرزی مختلف با نتایج دو روش لوی [۲۱] (ضمیمه ۶-ج) و روش المان محدود (ABAQUS) [۲۲] نشان دهنده توافق خوب این دو روش می‌باشد.

۲- فرمول بندی مسأله

معادله خیز یک ورق ایزوتروپیک با خواص متغیر در جهت شعاعی که در شکل (۱) نشان داده شده است بر اساس رابطه (الف-۷) مندرج در ضمیمه به صورت ذیل می‌باشد:

$$\begin{aligned} \psi(w) \equiv D \nabla_r^4 w &+ 2 \left(\frac{D}{r} + D_{,r} \right) w_{,rr} + 2 \frac{D_{,r}}{r^2} w_{,r\theta\theta} \\ &+ \left[-\frac{D}{r^2} + (v+2) \frac{D_{,r}}{r} + D_{,rr} \right] w_{,rr} \\ &+ \left[-\frac{3D_{,r}}{r^3} + v \frac{D_{,rr}}{r^2} \right] w_{,\theta\theta} \\ &+ \left[\frac{D}{r^3} - \frac{D_{,r}}{r^2} + v \frac{D_{,rr}}{r} \right] w_{,r} - q(r, \theta) = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

روش کانتروویچ [۱]، یک روش نیمه تحلیلی باقی‌مانده وزنی است که معادلاتی با مشتقات جزئی را به یک سیستم معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل می‌کند.

کر (Kerr) [۲] با معرفی یک روش تکراری (Iterative) به نام روش کانتروویچ توسعه یافته (Extended Kantorovich method) یک پاسخ بسته (Closed form solution) برای حل مسأله پیچش میله‌های منشوری با سطح مقطع مستطیلی ارائه کرد. مزیت روش کانتروویچ توسعه یافته نسبت به سایر روش‌های مبتنی بر باقی‌مانده وزنی، آن است که نتیجه نهایی به حدس اولیه بستگی ندارد. البته انتخاب تابع مناسب می‌تواند تعداد تکرار لازم برای همگرایی را کاهش دهد.

روش کانتروویچ را برای تحلیل مسئله خمش ورق مستطیلی [۳] و مسائل مفادیر ویژه [۴] نیز به کار برد. هم‌چنین کارایی و دقت این روش در مطالعات بعدی شامل تحلیل مسائل ورق با تغییر شکل بزرگ [۵]، کمانش و ارتعاش یک ورق مستطیلی نازک [۶-۸]، خمش ورق ایزوتروپیک [۹ و ۱۰] و ارتوتروپیک مستطیلی ضخیم [۱۱]، ارتعاشات ورق با ضخامت متغیر [۱۲]، کمانش ورق مستطیلی لایه لایه متقارن [۱۳] و هم‌چنین خمش یک ورق نازک حلقوی [۱۴] نشان داده شده است.

نتایج تحقیقات مذکور نشان می‌دهد که این روش از نرخ همگرایی بالایی برخوردار است، به طوری که غالباً دو مرتبه تکرار برای رسیدن به پاسخ کفایت می‌کند.

تحلیل ورق‌ها با سختی خمشی (Flexural rigidity) متغیر مورد توجه بسیاری از محققین قرار گرفته است. از جمله بررسی خمش ورق مستطیلی [۱۵] و ورق ساندریچی دایره‌ای با ضخامت متغیر خطی [۱۶]، کمانش و ارتعاش یک ورق دایره‌ای با فرض تغییر ضخامت به صورت سهموی [۱۷]، کمانش یک ورق ایزوتروپیک نازک با فرض تغییر خطی و غیرخطی

معادله دیفرانسیل (۱) به فرم ضعیف شده (۴) تبدیل می شود:

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \int_{r_i}^{r_o} \psi(w_{ij}) \delta w_{ij} r dr d\theta = 0 \quad (4)$$

α و r_o, r_i در شکل (۱) نشان داده شده است. با در نظر گرفتن یک تابع اولیه برای $(\theta) g_j, \delta w_{ij}$ به صورت ذیل قابل بیان است:

$$\delta w_{ij} = g_j(\theta) \delta f_i \quad (5)$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\int_{r_i}^{r_o} \int_{-\alpha}^{\alpha} [\psi(f_i g_j) g_j d\theta] \delta f_i r dr = 0 \quad (6)$$

بر اساس تئوری حساب تغییرات، معادله (۶) زمانی برقرار خواهد شد که عبارت داخل براکت برابر با صفر گردد:

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \psi(f_i g_j) g_j d\theta = 0 \quad (7)$$

با جای گذاری یک تابع دلخواه برای $(\theta) g_j$ به ازای $z = 0$ در معادله (۷) و به کار بردن معادله (۲) معادله دیفرانسیل ذیل به دست می آید:

$$\begin{aligned} & A_1 r^n f_{i,rrr} + 2A_1 (1+n) r^{n-1} f_{i,rr} \\ & + [-A_1 (1-(2+v)n - (n^2 - n)) + 2A_2] r^{n-2} f_{i,rr} \\ & + [-A_1 (-1+n-v(n^2 - n)) - 2A_2 (1-n)] r^{n-3} f_{i,r} \\ & + [A_2 (4-3n+v(n^2 - n)) + A_3] r^{n-4} f_i = F(r) \end{aligned} \quad (8)$$

به طوری که A_1 و $F(r)$ به صورت روابط (ب-۹) تا (ب-۱۲) تعریف می شوند.

معادله (۸) دارای جوابی به فرم ذیل می باشد:

$$f_i(r) = \sum_{k=1}^4 a_{ik} r^{s_k} + f_i^p(r) \quad (9)$$

اولین عبارت سمت راست در معادله (۹) مربوط به حل همگن آن و عبارت دوم نشان دهنده حل خصوصی معادله می باشد که به بار اعمالی وابسته است.

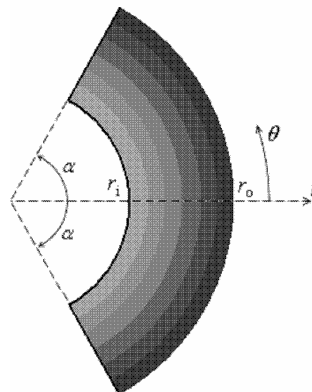
s_k ؛ مقدار ریشه های معادله مشخصه مرتبه

در رابطه فوق، علامت کاما؛ نشان دهنده مشتق جزئی نسبت به یک پارامتر می باشد. w ؛ تغییر شکل عرضی یا همان خیز ورق، D ؛ سختی خمشی ورق و برابر است با $D(r) = E(r)h^3/12(1-\nu^2)$ ؛ ضخامت ورق، $E(r)$ ؛ مدول یانگ، ν ؛ ضریب پواسون و $q(r, \theta)$ ؛ بارگسترده وارد بر ورق می باشد.

برای به دست آوردن پاسخ معادله فوق به شکل بسته باید حل تحلیلی معادلات به دست آمده در هر مرحله از روش کانترویچ امکانپذیر باشد. بر این اساس، تغییرات مدول یانگ ورق به صورت یک تابع توانی مطابق رابطه (۲) در نظر گرفته شده است:

$$E = E_i \left(\frac{r}{r_i} \right)^n \quad (2)$$

که در آن E_i ؛ مدول الاستیسیته ورق در شعاع داخلی $r = r_i$ و n ؛ توان ناهمگنی آن می باشد.



شکل ۱ هندسه قطاع دایروی با خواص متغیر در جهت شعاعی

۳- تحلیل مسأله به روش کانترویچ

بر اساس روش کانترویچ توسعه یافته، خیز ورق به صورت دو تابع مستقل، یکی بر حسب θ و دیگری بر حسب r در نظر گرفته می شود.

$$w(r, \theta) \cong w_{ij}(r, \theta) = f_i(r) g_j(\theta) \quad (3)$$

معادله دیفرانسیل (۱) با جای گذاری رابطه (۳) در آن تبدیل به دو معادله دیفرانسیل معمولی می شود که با حل آنها دو تابع $f_i(r)$ و $g_j(\theta)$ به دست می آید.

با استفاده از روش باقی مانده وزنی گالرکین،

تحلیل خمش یک قطاع حلقوی نازک از جنس ماده هدفمند ...

چهار ذیل می باشد:

$$\eta_1 s^4 + \eta_2 s^3 + \eta_3 s^2 + \eta_4 s + 1 = 0 \quad (10)$$

دست می آید:

η_i از رابطه (ب-۱۳) به دست می آید.

$$g_j(\theta) = \sum_{k=1}^4 b_{jk} \theta^{t_k} + g_j^p(\theta) \quad (19)$$

در معادله فوق، اولین عبارت سمت راست، حل

با اعمال شرایط مرزی مسأله به دست

همگن معادله دیفرانسیل و عبارت دوم حل خصوصی

می آید. شرایط مرزی در حالت کلی به صورت روابط

آن می باشد که به بار اعمالی بستگی دارد. t_k ؛ ریشه های

(۱۱) و (۱۲) هستند.

معادله مشخصه مرتبه چهار ذیل می باشد:

لبه های گیردار:

$$B_1 t^4 + B_2 t^2 + B_3 = 0 \quad (20)$$

$$f_i = f_{i,r} = 0 \quad \text{for } r = r_i, r_o \quad (11)$$

لبه های ساده:

b_{jk} را باید با استفاده از اعمال شرایط مرزی

$$f_i = f_{i,rr} + \frac{v}{r} f_{i,r} = 0 \quad \text{for } r = r_i, r_o \quad (12)$$

مسأله به دست آورد:

به عنوان مثال برای یک بار گسترده یکنواخت

حل خصوصی معادله به صورت ذیل می باشد:

$$f_i^p(r) = cr^{4-n} \quad (13)$$

به طوری که:

$$c = \frac{-P}{2A_1 \vartheta_1 + A_2 \vartheta_2 - A_3},$$

$$\vartheta_1 = vn^2 - 32 + 4n(5-v),$$

$$\vartheta_2 = 7n - 20 + nv(1-n) \quad (14)$$

بعد از به دست آوردن $f_i(r)$ می توان مقدار

δw_{ij} را به صورت ذیل بازنویسی کرد:

$$\delta w_{ij} = f_i(r) \delta g_j \quad (15)$$

در تکرار بعدی، فرم حساب تغییرات معادله خیز

به صورت ذیل خواهد شد:

$$\int_{-\alpha r_i}^{\alpha r_o} \int_{r_i}^{r_o} [\psi(f_i g_j) f_i r dr] \delta g_j d\theta = 0 \quad (16)$$

که نتیجه می دهد:

$$\int_{r_i}^{r_o} \psi(f_i g_j) f_i r dr = 0 \quad (17)$$

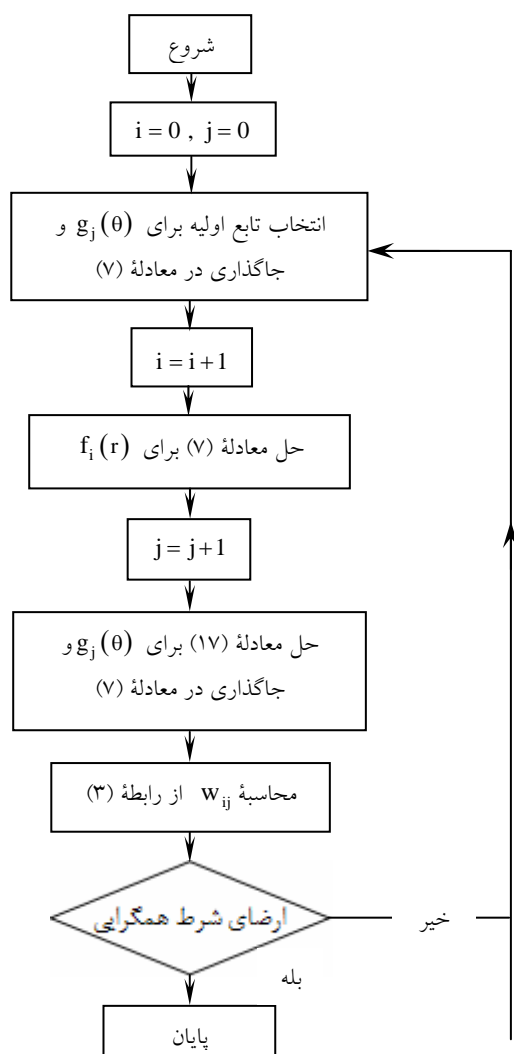
با استفاده از تابع $f_i(r)$ به دست آمده از مرحله

قبل، معادله (۱۷) را می توان به صورت ذیل نوشت:

$$B_1 g_{j,0000} + B_2 g_{j,00} + B_3 g_j + B_4 = 0 \quad (18)$$

در رابطه فوق، مقدار B_i از رابطه (ب-۲۶) تا

(ب-۲۹) به دست می آید.

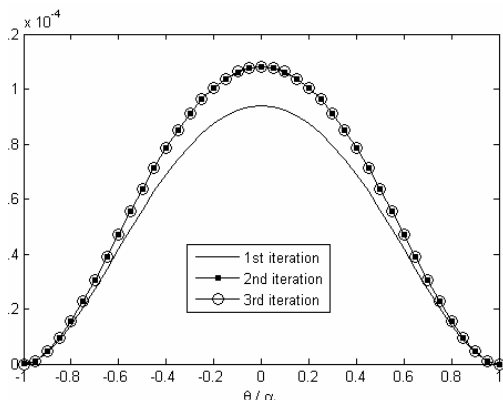


شکل ۲ الگوریتم روش حل تکراری به روش کانتروویچ توسعه یافته

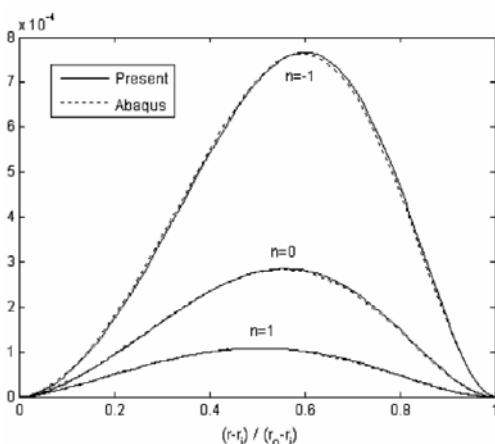
$$w = w_{,\theta} = 0 \quad \text{for } \theta = \pm\alpha,$$

$$w = w_{,r} = 0 \quad \text{for } r = r_i, r_o.$$

به منظور بررسی نرخ همگرایی، سه تکرار اول برای خیز بی بعد ورق $\bar{w} = w(D_i/q_0r_o^4)$ با فرض توان ناهمگنی $n=1$ در امتداد شعاع $r = (r_i + r_o)/2$ در شکل (۳) نشان داده شده است. هم چنین جهت بررسی اعتبار روش مورد استفاده، حداکثر خیز بدون بعد و حداکثر ممان های خمشی بی بعد $(\bar{M}_r, \bar{M}_\theta) = (M_r, M_\theta)/(q_0r_o^2)$ برای ورق همگن با نتایج گزارش شده در مراجع، مقایسه شده و در جدول (۱) ارائه شده اند. نتایج به دست آمده از Ansys به عنوان معیار مقایسه استفاده شده اند. هم چنین تغییرات \bar{w} ، \bar{M}_r و \bar{M}_θ روی خط تقارن $\theta=0$ در شکل های (۴) تا (۶) رسم شده است:



شکل ۳ روند همگرایی خیز بی بعد ورق ذکر شده در مثال (۴-۱) روی خط $r = (r_i + r_o)/2$



شکل ۴ خیز بی بعد ورق ذکر شده در مثال (۴-۱) روی خط $\theta = 0$

شرایط مرزی برای این حالت به صورت روابط (۲۱) و (۲۲) می باشد.

$$g_j = g_{j,0} = 0 \quad \text{for } \theta = \pm\alpha \quad (21)$$

لبه های گیردار:

$$g_j = g_{j,\theta\theta} = 0 \quad \text{for } \theta = \pm\alpha \quad (22)$$

لبه های ساده:

به طور مثال برای یک بار گسترده یکنواخت، حل خصوصی به صورت ذیل به دست می آید:

$$g_j^p(\theta) = -\frac{B_4}{B_3} \quad (23)$$

تکرار اول مسئله با محاسبه $g_1(\theta)$ پایان می یابد. در هر مرتبه تکرار، معادلات (۷) و (۱۷) حل شده و توابع جدید $f_i(r)$ و $g_j(\theta)$ به دست می آیند. با ارضای شرط همگرایی برای تابع خیز ورق، تکرار خاتمه می یابد. پس از تعیین تابع خیز می توان ممان های خمشی و پیچشی را در هر نقطه با استفاده از معادله (الف-۸) محاسبه نمود. الگوریتم روش حل تکراری در شکل (۲) نشان داده شده است.

۴- نتایج عددی

در این بخش، سه مثال با شرایط مرزی و بارگذاری مختلف در نظر گرفته شده و توسط روش های مختلف حل شده اند.

۴-۱- ورق به شکل قطاع حلقوی با تکیه گاه های گیردار تحت بارگذاری یکنواخت

ورقی با مشخصات هندسی $r_i = 0.25\text{m}$ و $r_o = 1\text{m}$ و $E_i = 100\text{GPa}$ و $\nu = 0.25$ و خواص مکانیکی $\alpha = 30^\circ$ تحت بار $q(r, \theta) = q_0 = 100\text{ kPa}$ در نظر گرفته شده است. برای $g_0(\theta)$ حدس اولیه ای به صورت ذیل فرض می شود:

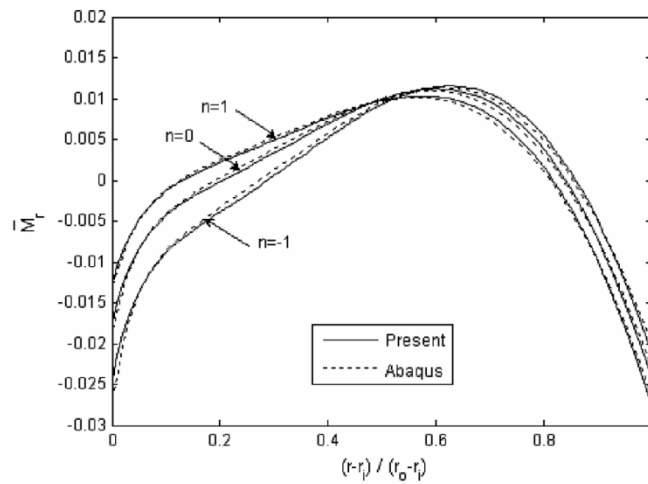
$$g_0(\theta) = \frac{\theta}{\alpha} \sin\left(\frac{\pi\theta}{\alpha}\right)$$

شرایط مرزی مسئله به صورت ذیل است:

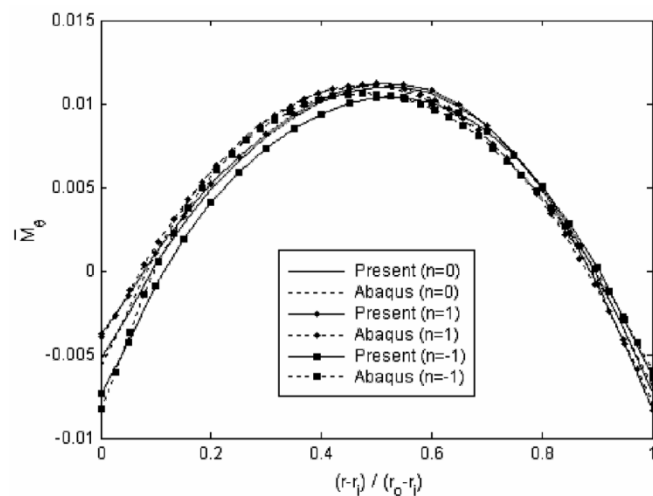
تحلیل خمشی یک قطاع حلقوی نازک از جنس ماده هدفمند ...

جدول ۱ بیشترین مقدار خیز و ممان‌های خمشی بی بعد مربوط به ورق همگن

	r_1/r_0	روش حاضر	[۲۳]	[۲۴]	[۲۵]	Ansys
\bar{w}	0.25	0.000285	0.000341	0.000310	0.000301	0.000284
	0.5	0.000141	0.000174	0.000155	0.000154	0.000141
	0.75	1.02e-5	1.25e-5	1.09e-5	9.83e-6	1.03e-5
\bar{M}_r	0.25	0.011191	0.011420	0.011120	0.011640	0.011028
	0.5	0.009288	0.009688	0.009531	0.010173	0.009412
	0.75	0.002569	0.002686	0.002686	0.002912	0.002622
\bar{M}_θ	0.25	0.011042	0.011300	0.011460	0.012640	0.011123
	0.5	0.004915	0.005092	0.005249	0.006203	0.005007
	0.75	0.001141	0.000815	0.000815	0.000907	0.001184



شکل ۵ ممان خمشی شعاعی بی بعد ورق ذکر شده در مثال (۱-۴) روی خط $\theta = 0$



شکل ۶ ممان خمشی محیطی بی بعد ورق ذکر شده در مثال (۱-۴) روی خط $\theta = 0$

۲-۴- ورق به شکل قطاع حلقوی با تکیه‌گاه‌های

ساده و گیردار تحت بارگذاری یکنواخت

یک ورق حلقوی با خواص مشابه مثال قبل و شعاع داخلی دلخواه در نظر گرفته شده است. شرایط مرزی مسأله به صورت ذیل می‌باشد:

$$w = w_{,\theta\theta} = 0 \quad \text{for } \theta = \pm\alpha,$$

$$w = w_{,r} = 0 \quad \text{for } r = r_1, r_0.$$

حدس اولیه برای تابع $g_0(\theta)$ همانند مثال قبلی در نظر گرفته شده است. مقادیر حداکثر \bar{w} ، \bar{M}_r و \bar{M}_θ با نتایج به دست آمده از روش لوی (شامل ۲۰ جمله اول) و المان محدود (ABAQUS) به ازای مقادیر مختلف r_1/r_0 و توان ناهمگنی n در جدول (۱) مقایسه شده است. جدول (۲) موقعیت نقاطی که خیز ورق و ممان‌های خمشی، بیشترین مقدار را دارند نشان می‌دهد.

جدول ۲ بیشترین مقدار خیز و ممان‌های خمشی بی بعد مربوط به ورق ذکر شده در مثال (۲-۴)

n	r_1/r_0	روش حل	\bar{w}	\bar{M}_r	\bar{M}_θ
-1	0.25	کانتروویچ	0.00130761	0.0649894	0.0134370
		لوی	0.00131094	0.0661226	0.0137473
		ABAQUS	0.00131358	0.0671341	0.0137937
	0.5	کانتروویچ	0.00023322	0.0291437	0.0087431
		لوی	0.00023374	0.0288343	0.0086503
		ABAQUS	0.00023365	0.0290633	0.0087734
	0.75	کانتروویچ	0.00001186	0.0059846	0.0017954
		لوی	0.00001188	0.0058956	0.0017687
		ABAQUS	0.00001189	0.0059052	0.0017082
0	0.25	کانتروویچ	0.00051460	0.0441180	0.0145267
		لوی	0.00051356	0.0442546	0.0146555
		ABAQUS	0.00051373	0.0441733	0.0146632
	0.5	کانتروویچ	0.00015754	0.0249432	0.0074829
		لوی	0.00015764	0.0245596	0.0073679
		ABAQUS	0.00015777	0.0244405	0.0073800
	0.75	کانتروویچ	0.00001020	0.0056371	0.0016979
		لوی	0.00001022	0.0055502	0.0016747
		ABAQUS	0.00001023	0.0055427	0.0015925
1	0.25	کانتروویچ	0.00020394	0.0294503	0.0147150
		لوی	0.00020413	0.0294391	0.0147934
		ABAQUS	0.00020439	0.0284589	0.0146248
	0.5	کانتروویچ	0.00010659	0.0212356	0.0063707
		لوی	0.00010697	0.0208366	0.0062510
		ABAQUS	0.00010699	0.0204753	0.0061853
	0.75	کانتروویچ	0.00000878	0.0053065	0.0015919
		لوی	0.00000880	0.0052217	0.0015752
		ABAQUS	0.00000881	0.0051893	0.0014917

تحلیل خمشی یک قطاع حلقوی نازک از جنس ماده هدفمند ...

جدول ۳ مختصات شعاعی نقاط دارای بیشترین مقدار خیز و ممان‌های خمشی در ورق ذکر شده در مثال (۴-۲)

n	r _i / r _o	روش حل	مختصات (r, θ) بر حسب (m, deg)		
			\bar{w}	\bar{M}_r	\bar{M}_θ
-1	0.25	کانتررویچ	0.67, 0	0.25, 0	0.60, 0
		لوی	0.66, 0	0.25, 0	0.59, 0
		ABAQUS	0.66, 0	0.25, 0	0.64, 0
	0.5	کانتررویچ	0.76, 0	0.5, 0	0.5, 0
		لوی	0.76, 0	0.5, 0	0.5, 0
		ABAQUS	0.76, 0	0.5, 0	0.5, 0
	0.75	کانتررویچ	0.85, 11.4	0.75, 11.4	0.75, 11.4
		لوی	0.87, 10.8	0.75, 12.9	0.75, 12.9
		ABAQUS	0.87, 10.4	0.75, 0	0.75, 20.2
0	0.25	کانتررویچ	0.63, 0	0.25, 0	0.60, 0
		لوی	0.63, 0	0.25, 0	0.62, 0
		ABAQUS	0.63, 0	0.25, 0	0.59, 0
	0.5	کانتررویچ	0.74, 0	0.5, 0	0.5, 0
		لوی	0.75, 0	0.5, 0	0.5, 0
		ABAQUS	0.74, 0	0.5, 0	0.5, 0
	0.75	کانتررویچ	0.87, 11.1	0.75, 11.1	0.75, 11.4
		لوی	0.87, 10.5	0.75, 12.9	0.75, 12.9
		ABAQUS	0.87, 10.4	0.75, 0	0.75, 20.2
1	0.25	کانتررویچ	0.59, 0	0.25, 0	0.60, 0
		لوی	0.59, 0	0.25, 0	0.59, 0
		ABAQUS	0.59, 0	0.25, 0	0.55, 0
	0.5	کانتررویچ	0.73, 0	0.5, 0	0.5, 0
		لوی	0.73, 0	0.5, 0	0.5, 0
		ABAQUS	0.73, 0	0.5, 0	0.5, 6.1
	0.75	کانتررویچ	0.87, 11.1	0.75, 11.1	0.75, 11.1
		لوی	0.87, 10.5	0.75, 12.9	0.75, 12.9
		ABAQUS	0.87, 10.4	0.75, 0	0.75, 20.2

$$w = w_{,\theta\theta} = 0 \quad \text{for } \theta = -\alpha,$$

$$w = w_{,\theta} = 0 \quad \text{for } \theta = \alpha,$$

$$w = w_{,rr} + \frac{v}{r} w_{,r} = 0 \quad \text{for } r = r_i,$$

$$w = w_{,r} = 0 \quad \text{for } r = r_o.$$

۳-۴ ورق به شکل قطاع حلقوی با تکیه‌گاه‌های ساده

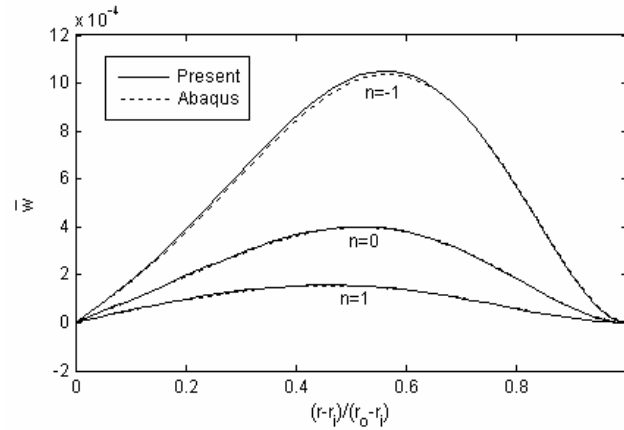
و گیردار تحت بارگذاری یکنواخت

یک ورق حلقوی با خواص مشابه مثال (۴-۱) در نظر

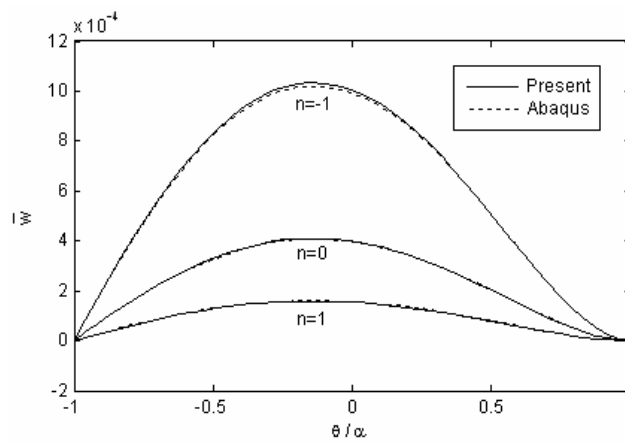
گرفته شده است. شرایط مرزی مسأله به صورت ذیل

می‌باشد:

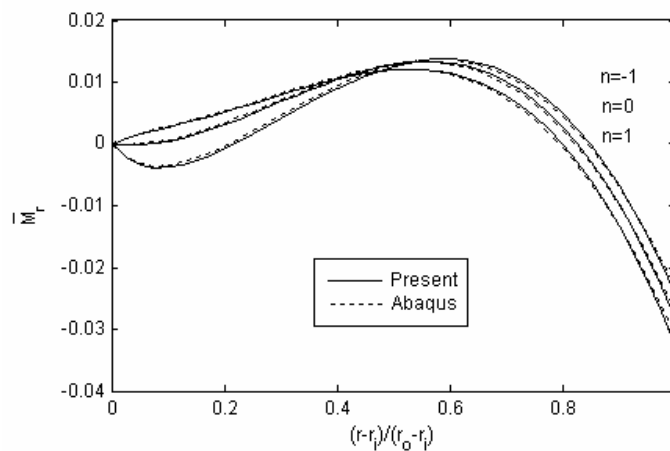
شکل‌های (۷) تا (۱۲) مقادیر \bar{M}_r ، \bar{M}_θ و \bar{w} را بر روی خطوط $(r, \theta=0)$ و $(r=(r_i+r_o)/2, \theta)$ نشان می‌دهند.



شکل ۷ خیز بی بعد ورق ذکر شده در مثال (۳-۴) روی خط $\theta=0$

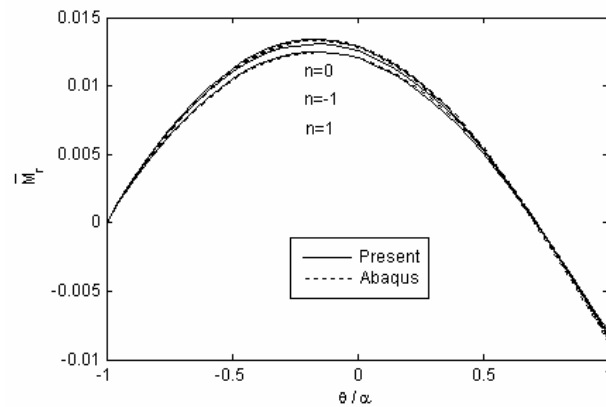


شکل ۸ خیز بی بعد ورق ذکر شده در مثال (۳-۴) روی خط $r=(r_i+r_o)/2$

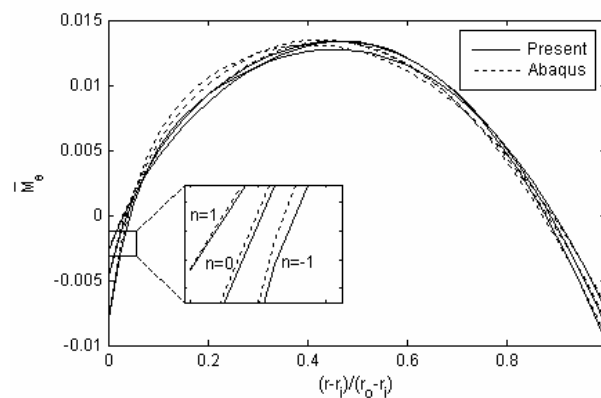


شکل ۹ ممان خمشی شعاعی بی بعد ورق ذکر شده در مثال (۳-۴) روی خط $\theta=0$

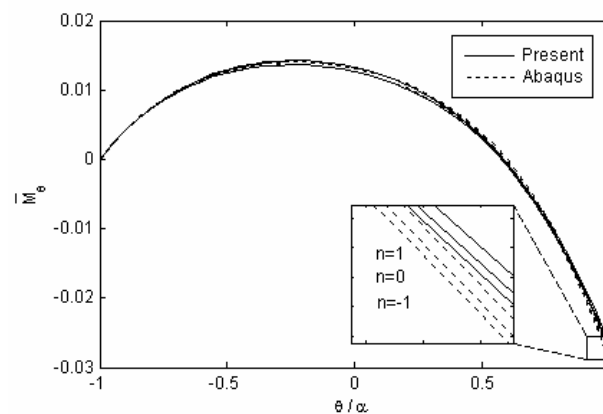
تحلیل خمش یک قطاع حلقوی نازک از جنس ماده هدفمند ...



شکل ۱۰ ممان خمشی شعاعی بی بعد ورق ذکر شده در مثال (۳-۴) روی خط $r = (r_i + r_o)/2$



شکل ۱۱ ممان خمشی محیطی بی بعد ورق ذکر شده در مثال (۳-۴) روی خط $\theta = 0$



شکل ۱۲ ممان خمشی محیطی بی بعد ورق ذکر شده در مثال (۳-۴) روی خط $r = (r_i + r_o)/2$

$$r_i = 0.5 \text{ m}, \quad r_o = 1 \text{ m}, \quad \alpha = 60^\circ,$$

$$E_i = 100 \text{ GPa}, \quad \nu = 0.25, \quad q(r, \theta) = q_0 r^2 e^\theta,$$

$$q_0 = 100 \text{ kPa}.$$

۴-۴- ورق به شکل قطاع حلقوی با تکیه‌گاه‌های

گیردار تحت بارگذاری غیر یک‌نواخت

پارامترهای مسأله به صورت زیر در نظر گرفته شده اند:

۵- خلاصه و نتیجه گیری

در این مقاله با استفاده از روش کانتروویچ توسعه یافته و مقایسه آن با روش‌های لوی و المان محدود (ABAQUS) به بررسی رفتار ورق‌های نازک با سختی متغیر در جهت شعاع پرداخته شد. با این روش، پاسخ مسائل خمش ورق حلقوی با فرض تغییر توانی مدول الاستیسیته به صورت فرم بسته به دست آمد.

شکل (۳) نشان دهنده نرخ همگرایی بالای روش کانتروویچ است، به طوری که با دو مرتبه تکرار می‌توان به پاسخ نهایی دست یافت. از طرف دیگر با مقایسه نتایج مندرج در جدول (۱) می‌توان دریافت که دقت روش حاضر از سایر روش‌های استفاده شده در مراجع بیشتر است. نتایج مندرج در جدول (۲) بیانگر تطابق بیشتر پاسخ روش لوی با نتایج المان محدود در مقایسه با روش کانتروویچ است که دلیل اصلی آن را می‌توان استفاده از تنها یک جمله برای شکل کلی پاسخ در روش کانتروویچ دانست (رابطه ۳).

اگرچه افزایش تعداد جملات پاسخ دقیق‌تری به دست می‌دهد، اما باعث پیچیدگی و افزایش حجم محاسبات می‌شود. نتایج جدول (۲) نشان می‌دهد با افزایش شعاع داخلی قطاع، مقادیر خیز و ممان‌های خمشی کاهش می‌یابد. همچنین مقادیر خیز و ممان خمشی شعاعی بیشینه با افزایش توان ناهمگنی کاهش می‌یابند؛ در حالی که تغییر توان ناهمگنی در محدوده مورد مطالعه، تأثیر قابل توجهی بر ممان خمشی محیطی ندارد. همان‌طور که در جدول (۳) مشاهده می‌شود، موقعیت نقاطی که دارای حداکثر خیز یا ممان‌های خمشی هستند، تقریباً مستقل از توان ناهمگنی است.

۶- ضمیمه

۶-الف استخراج معادله خیز ورق

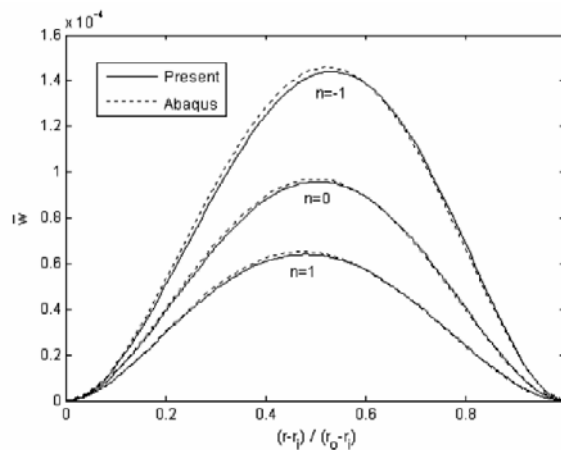
شرط تعادل حاکم بر ممان‌های خمشی و پیچشی ورق

شرایط مرزی مسأله مشابه مثال قبل است (CCCC).

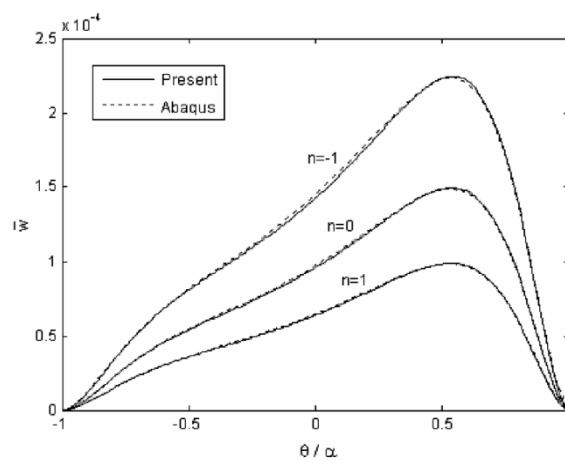
برای نشان دادن این که حدس اولیه برای تابع $g_0(\theta)$ تأثیری بر روی جواب نهایی مسأله ندارد، در این جا از تابع ذیل برای حدس اولیه استفاده شده است:

$$g_0(\theta) = 1 - \left(\frac{\theta}{\alpha}\right)^2$$

مقایسه نتایج برای این مثال با استفاده از روش المان محدود (ABAQUS) در شکل‌های (۱۳) و (۱۴) انجام شده است.



شکل ۱۳ خیز بی بعد ورق ذکر شده در مثال (۴-۴) روی خط $\theta = 0$



شکل ۱۴ خیز بی بعد ورق ذکر شده در مثال (۴-۴) روی خط $r = (r_1 + r_0) / 2$

تحلیل خمشی یک قطاع حلقوی نازک از جنس ماده هدفمند ...

با استفاده از قاعده زنجیره‌ای، مشتق اول تابع w را می‌توان به شکل زیر به دست آورد:

$$w_{,x} = w_{,r} \frac{\partial r}{\partial x} + w_{,\theta} \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

$$= w_{,r} \cos \theta - \frac{1}{r} w_{,\theta} \sin \theta$$

با تکرار مجدد قاعده زنجیره‌ای مشتقات مرتبه بالاتر خیز قابل محاسبه هستند. در نهایت، معادله (الف-۳) بر حسب مختصات استوانه‌ای به صورت ذیل نتیجه می‌شود:

$$\psi(w) \equiv D \nabla_r^4 w + 2 \left(\frac{D}{r} + D_{,r} \right) w_{,rr}$$

$$+ \frac{2D_{,\theta}}{r^2} w_{,r\theta} + 2 \frac{D_{,r}}{r^2} w_{,r\theta} + \frac{2D_{,\theta}}{r^4} w_{,\theta\theta}$$

$$+ \left[-\frac{D}{r^2} + (v+2) \frac{D_{,r}}{r} + D_{,rr} + \frac{vD_{,\theta\theta}}{r^2} \right] w_{,rr}$$

$$+ \left[2(1-v) \frac{D_{,r\theta}}{r^2} + \frac{2vD_{,\theta}}{r^3} \right] w_{,r\theta}$$

$$+ \left[v \frac{D_{,rr}}{r^2} - \frac{3D_{,r}}{r^3} + \frac{D_{,\theta\theta}}{r^4} \right] w_{,\theta\theta}$$

$$+ 2(1-v) \left[\frac{D_{,\theta}}{r^4} - \frac{D_{,r\theta}}{r^3} \right] w_{,\theta}$$

$$+ \left[\frac{D}{r^3} + v \frac{D_{,rr}}{r} - \frac{D_{,r}}{r^2} + \frac{D_{,\theta\theta}}{r^3} \right] w_{,r} = q(r, \theta)$$

(الف-۷)

به طوری‌که:

$$\nabla_r^4 w \equiv \nabla_r^2 (\nabla_r^2 w), \quad \nabla_r^2 w \equiv w_{,rr} + \frac{1}{r} w_{,r} + \frac{1}{r^2} w_{,\theta\theta}$$

برای به دست آوردن رابطه بین ممان‌ها و انحنای ورق، محور X منطبق بر محور تقارن ورق ($\theta=0$) فرض می‌شود. در این صورت ممان‌های M_θ ، M_r و M_{xy} و M_y ، M_x به ترتیب معادل ممان‌های M_θ ، M_r ، M_{xy} و M_y بوده و بیان رابطه (الف-۲) بر حسب مختصات استوانه‌ای به شکل زیر خواهد بود:

در مختصات کارتزین به شکل ذیل قابل بیان است [۲۲]:

$$M_{x,xx} + 2M_{xy,xy} + M_{y,yy} = -q(x, y) \quad (\text{الف-۱})$$

بر اساس تئوری کلاسیک تغییر شکل ورق‌های نازک و با استفاده از قانون عمومی هوک (generalized Hook's law) می‌توان ممان‌های خمشی و پیچشی ورق را بر حسب انحنای ورق به دست آورد:

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = -D(x, y) \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\nu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_{,xx} \\ w_{,yy} \\ w_{,xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{الف-۲})$$

جاگذاری رابطه (الف-۲) در (الف-۱) نتیجه می‌دهد:

$$\psi(w) \equiv D \nabla^4 w + D_{,xx} w_{,xx} + \nu D_{,xx} w_{,yy}$$

$$+ 2D_{,xy} w_{,xy} + D_{,yy} w_{,yy} + \nu D_{,yy} w_{,xx}$$

$$+ 2D_{,y} w_{,yyy} + 2(1-\nu) D_{,xy} w_{,xy}$$

$$+ 2D_{,x} w_{,xxy} + 2D_{,y} w_{,xxy} = q(x, y) \quad (\text{الف-۳})$$

به طوری‌که:

$$\nabla^4 w \equiv w_{,xxxx} + 2w_{,xxyy} + w_{,yyyy} \quad (\text{الف-۴})$$

برای استخراج معادله خیز ورق دایره‌ای بر اساس مختصات استوانه‌ای از روش تبدیل مختصات به صورت زیر استفاده شده است:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta, & y = r \sin \theta \\ x^2 + y^2 = r^2, & \theta = \tan^{-1} \frac{y}{x} \end{cases} \quad (\text{الف-۵})$$

لذا می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} = \cos \theta, & \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} = \sin \theta \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{y}{r^2} = -\frac{\sin \theta}{r}, & \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{x}{r^2} = \frac{\cos \theta}{r} \end{cases} \quad (\text{الف-۶})$$

$$A_4 = \int_{-\alpha}^{\alpha} g_j \left[\left(\frac{D}{r^3} - \frac{D_{,r}}{r^2} + \nu \frac{D_{,rr}}{r} + \frac{D_{,00}}{r^3} \right) g_j + 2 \left((1-\nu) \frac{D_{,r0}}{r^2} + \nu \frac{D_{,0}}{r^3} \right) g_{j,0} - 2 \left(\frac{D}{r^3} - \frac{D_{,r}}{r^2} \right) g_{j,00} \right] d\theta \quad (\text{ب-۵})$$

$$A_5 = \int_{-\alpha}^{\alpha} g_j \left[2(1-\nu) \frac{D_{,0}}{r^4} g_{j,0} + \left(4 \frac{D}{r^4} - 3 \frac{D_{,r}}{r^3} + \nu \frac{D_{,rr}}{r^2} + \frac{D_{,00}}{r^4} \right) g_{j,00} + 2 \frac{D_{,0}}{r^4} g_{j,000} + \frac{D}{r^4} g_{j,0000} \right] d\theta \quad (\text{ب-۶})$$

$$P(r) = \int_{-\alpha}^{\alpha} q(r, \theta) g_j d\theta. \quad (\text{ب-۷})$$

در حالت خاصی که تغییر مدول یانگ از رابطه (۲) پیروی می کند خواهیم داشت:

$$A_1 r^n f_{i,rrr} + 2A_1 (1+n) r^{n-1} f_{i,rr} + \left[-A_1 (1 - (2+\nu)n - (n^2 - n)) + 2A_2 \right] r^{n-2} f_{i,rr} + \left[-A_1 (-1 + n - \nu(n^2 - n)) - 2A_2 (1-n) \right] r^{n-3} f_{i,r} + \left[A_2 (4 - 3n + \nu(n^2 - n)) + A_3 \right] r^{n-4} f_i = F(r) \quad (\text{ب-۸})$$

به طوری که:

$$A_1 = \int_{-\alpha}^{\alpha} g_j^2 d\theta \quad (\text{ب-۹})$$

$$A_2 = \int_{-\alpha}^{\alpha} g_j g_{j,00} d\theta \quad (\text{ب-۱۰})$$

$$A_3 = \int_{-\alpha}^{\alpha} g_j g_{j,0000} d\theta \quad (\text{ب-۱۱})$$

$$F(r) = \frac{12r^n (1-\nu^2)}{E_i h^3} \int_{-\alpha}^{\alpha} q(r, \theta) g_j d\theta \quad (\text{ب-۱۲})$$

ضرایب η_i در معادله (۱۰) عبارتند از:

$$\begin{Bmatrix} M_r \\ M_\theta \\ M_{r0} \end{Bmatrix} = -D(r, \theta) \begin{bmatrix} \nu & 1 & 0 & \nu & 0 \\ 1 & \nu & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \nu-1 & 0 & 1-\nu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_{,r}/r \\ w_{,rr} \\ w_{,0}/r^2 \\ w_{,00}/r^2 \\ w_{,r0}/r \end{Bmatrix} \quad (\text{الف-۸})$$

با محاسبه ممان‌های خمشی و پیچشی، تنش‌های داخل صفحه‌ای بر اساس تئوری کلاسیک تغییر شکل ورق‌های نازک به صورت ذیل قابل محاسبه هستند:

$$\sigma_r = \frac{12M_r}{h^3} z, \quad \sigma_\theta = \frac{12M_\theta}{h^3} z, \quad \sigma_{r0} = \frac{12M_{r0}}{h^3} z \quad (\text{الف-۹})$$

۶-ب- جزئیات روابط روش کانتروویچ توسعه یافته معادله (۷) به صورت زیر قابل بیان است:

$$A_1 f_{i,rrr} + A_2 f_{i,rr} + A_3 f_{i,rr} + A_4 f_{i,r} + A_5 f_i = P(r) \quad (\text{ب-۱})$$

به طوری که:

$$A_1 = \int_{-\alpha}^{\alpha} D g_j^2 d\theta \quad (\text{ب-۲})$$

$$A_2 = \int_{-\alpha}^{\alpha} 2 \left(\frac{D}{r} + D_{,r} \right) g_j^2 d\theta \quad (\text{ب-۳})$$

$$A_3 = \int_{-\alpha}^{\alpha} g_j \left[\left(-\frac{D}{r^2} + (2+\nu) \frac{D_{,r}}{r} + D_{,rr} + \nu \frac{D_{,00}}{r^2} \right) g_j + \frac{2}{r^2} D_{,0} g_{j,0} + 2 \frac{D}{r^2} g_{j,00} \right] d\theta \quad (\text{ب-۴})$$

تحلیل خمش یک قطاع حلقوی نازک از جنس ماده هدفمند ...

$$B_4 = \int_{r_i}^{r_o} f_i \left[2 \frac{D_{,0}}{r} f_{i,rr} + \left(2 \frac{D_{,r0}}{r} + 2\nu \frac{D_{,0}}{r^2} - 2\nu \frac{D_{,r0}}{r} \right) f_{i,r} + 2(\nu-1) \left(\frac{D_{,r0}}{r^2} - \frac{D_{,0}}{r^3} \right) f_i \right] dr \quad (22-ب)$$

$$B_5 = \int_{r_i}^{r_o} f_i \left[r D f_{i,rrr} + (2r D_{,r} + 2D) f_{i,rr} + \left(r D_{,rr} - \frac{D}{r} + (2+\nu) D_{,r} + \nu \frac{D_{,00}}{r} \right) f_{i,r} + \left(\frac{D}{r^2} + \frac{D_{,00}}{r^2} + \nu D_{,rr} \right) f_{i,r} \right] dr \quad (23-ب)$$

$$G(\theta) = \int_{r_i}^{r_o} q(r, \theta) r f_i dr \quad (24-ب)$$

در حالت خاصی که تغییر مدول یانگ از رابطه (۲) پیروی می کند خواهیم داشت:

$$B_1 g_{j,0000} + B_2 g_{j,00} + B_3 g_j + B_4 = 0 \quad (25-ب)$$

$$B_1 = - \int_{r_i}^{r_o} f_i^2 r^{n-3} dr \quad (26-ب)$$

$$B_2 = - \int_{r_i}^{r_o} f_i \left[-2r^{n-1} f_{i,rr} + 2(1-n)r^{n-2} f_{i,r} + (-4 + 3n - \nu n(n-1)) r^{n-3} f_i \right] dr \quad (27-ب)$$

$$B_3 = \int_{r_i}^{r_o} f_i \left[-r^{n+1} f_{i,rrr} - 2(1+n)r^n f_{i,rr} + (-n^2 - (1+\nu)n + 1) r^{n-1} f_{i,r} - (\nu n^2 - n + 1) r^{n-2} f_{i,r} \right] dr \quad (28-ب)$$

$$B_4 = \frac{12r_i^n (1-\nu^2)}{E_i h^3} \int_{r_i}^{r_o} q(r, \theta) r f_i dr \quad (29-ب)$$

۶-ج- فرمول بندی روش لوی

لوی حل معادله حاکم بر خیز ورق در مختصات کارتزین را به شکل کلی زیر بیان کرد:

$$\begin{cases} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \\ \eta_4 \end{cases} = \frac{-4A_1^2}{(\xi + (n-2)A_1)^2 [9 - A_1^2(n-2)^2]} \mathbf{A} \quad (13-ب)$$

به طوری که:

$$\mathbf{A} = \begin{cases} A_1(n^2 + 2\nu n + 4) + 4A_2 + \xi(n-2) + 2\lambda \\ 4A_1^2 \\ (8n-16)A_1^2 + 4\xi A_1 \\ A_1[6(n-2)^2 A_1 + 6(n-2)\xi + 4\lambda] \end{cases} \quad (14-ب)$$

$$\vartheta = A_1(4A_1 + A_1 n^2 - 2A_1 n - 2A_1 \nu n - 4A_2 - 2\lambda) \quad (15-ب)$$

$$\xi = \sqrt{A_1(4A_1 + A_1 n^2 - 2A_1 n - 2A_1 \nu n - 4A_2 + 2\lambda)} \quad (16-ب)$$

$$\lambda^2 = A_1^2 n^2 (1 + \nu^2) + 4A_2^2 - 4A_1 A_2 (\nu n^2 - 2n(1+\nu) + 4) \quad (17-ب)$$

معادله (۱۷) را می توان به صورت زیر نوشت:

$$B_1 g_{j,0000} + B_2 g_{j,00} + B_3 g_{j,00} + B_4 g_{j,0} + B_5 g_j = G(\theta) \quad (18-ب)$$

به طوری که:

$$B_1 = \int_{r_i}^{r_o} f_i^2 \frac{D}{r^3} dr \quad (19-ب)$$

$$B_2 = 2 \int_{r_i}^{r_o} f_i^2 \frac{D_{,0}}{r^3} dr \quad (20-ب)$$

$$B_3 = \int_{r_i}^{r_o} f_i \left[-2 \frac{D}{r} f_{i,rr} + \left(-2 \frac{D_{,r}}{r} + 2 \frac{D}{r^2} \right) f_{i,r} + \left(-4 \frac{D}{r^3} + 3 \frac{D_{,r}}{r^2} - \frac{D_{,00}}{r^3} - \nu \frac{D_{,rr}}{r} \right) f_i \right] dr \quad (21-ب)$$

با جاگذاری $w(r, \theta)$ و $q(r, \theta)$ در فرم همگن معادله (۱) نتیجه می شود:

$$\begin{aligned} & \alpha^4 r^4 D Y_{m,rr} + 2\alpha^4 r^3 (r D_{,r} + D) Y_{m,rr} + \\ & \alpha^4 r^2 \left(r^2 D_{,rr} + (v+2) r D_{,r} - \left(1 + \frac{\pi^2 m^2}{2\alpha^2} \right) D \right) Y_{m,rr} - \\ & \alpha^2 r (r D_{,r} - D) (\alpha^2 + \pi^2 m^2 / 2) Y_{m,r} - \\ & \frac{m^2 \pi^2 \alpha^2}{4} \left(r (v r D_{,rr} - 3 D_{,r}) + \left(4 - \frac{\pi^2 m^2}{4\alpha^2} \right) D \right) Y_m \\ & = q_m(r) \end{aligned} \quad (ج-۱)$$

با توجه به شکل کلی پاسخ در روش لوی، استفاده از این روش بستگی به شرایط مرزی دارد و محدود به ورق هایی است که در امتداد لبه های $\theta = \pm \alpha$ تکیه گاه ساده دارند.

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} Y_m(y) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)$$

بنابراین پاسخ عمومی معادله (۱) را می توان به صورت زیر در نظر گرفت:

$$w(r, \theta) = \sum_{m=1}^{\infty} Y_m(r) \sin\left(\frac{2m\pi}{\alpha}(\theta + \alpha)\right)$$

تابع مربوط به بار اعمالی را نیز می توان با استفاده از بسط فوریه به شکل زیر تقریب زد:

$$q(r, \theta) = \sum_{m=1}^{\infty} q_m(r) \sin\left(\frac{2m\pi}{\alpha}(\theta + \alpha)\right)$$

به طوری که:

$$q_m(r) = \frac{1}{\alpha q_0} \int_{-\alpha}^{\alpha} q(r, \theta) \sin\left(\frac{2m\pi}{\alpha}(\theta + \alpha)\right) d\theta$$

۷- مراجع

1. L.V. Kantorovich, I.V. Krylov., "Approximate method of higher analysis", New York: Interscience Publishers Inc.1964.
2. A.D. Kerr., "An Extension of Kantorovich method. Quart. Appl. Math., Vol. 26, pp. 219-229, 1968.
3. A.D. Kerr, H. Alexander, "An application of the extended Kantorovich method to the stress analysis of a clamped rectangular plate", Acta. Mech., Vol. 6, 180-196, 1968.
4. A.D. Kerr, "An extended Kantorovich method for the solution of eigenvalue problems", Int. J. Solids Struct., Vol. 5, pp. 559-572, 1969.
5. T.C. Soong. "A procedure for applying the extended Kantorovich method to nonlinear problems", J. appl. Mech., Vol. 39, pp. 921-934, 1972.
6. S. Yuan, Y. Jin, "Computation of elastic buckling loads of rectangular thin plates using the extended Kantorovich method", Comput. Struct., Vol. 66(6), pp. 861-867, 1998.
7. R. Jones, B.J. Milne, "Application of the extended Kantorovich method to the vibration of clamped rectangular plates", J. Sound Vibr., 45, pp. 309-316, 1976.
8. M. Dalaei, A.D. Kerr, "Natural vibration analysis of clamped rectangular orthotropic plates", J. Sound Vibr., Vol. 189(3), pp. 399-406, 1996.

9. M.M. Aghdam, M. Shakeri, S.J. Fariborz, "Solution to the Reissner plate with clamped edges", *ASCE J Eng Mech.*, Vol. 122(7), pp. 679-682, 1996.
10. S. Yuan, J. Yan, F.W. Williams, "Bending analysis of Mindlin plates by the extended Kantorovich method", *ASCE J. Eng. Mech.*, Vol. 124, pp. 1339-45, 1998.
11. M.M. Aghdam, S.R. Falahatgar, "Bending analysis of thick laminated plates using extended Kantorovich method", *Compos. Struct.*, Vol. 62(3-4), pp. 279-83, 2003.
12. I. Shufrin, M. Eisenberger, "Vibration of shear deformable plates with variable thickness-first-order and higher-order analyses", *J. Sound Vibr.*, Vol. 290(1-2), pp. 465-89, 2006.
13. V. Ungbhakorn, P. Singhatanadgid, "Buckling analysis of symmetrically laminated composite plates by the extended Kantorovich method", *Compos. Struct.*, Vol. 73(1), pp. 120-8, 2006.
14. M.M. Aghdam, M. Mohammadi, V. Erfanian, "Bending analysis of thin annular sector plates using extended Kantorovich method", *Thin-Walled Struct.*, Vol. 45, pp. 983-990, 2007.
15. Fariborz SJ, Pourbohloul A. "Application of the extended Kantorovich method to the bending of variable thickness plates". *Comput. Struct.*, Vol. 31, 957-65, 1989.
16. A.P. Gupta, K.P. Sharma, "Bending of a sandwich annular plate of variable thickness", *Indian J. Pure Appl. Math.*; Vol. 13(11); pp. 1313-1321, 1982.
17. U.S. Gupta, R. Lal, "Buckling and vibration of annular plates of parabolically varying thickness", *Indian J. Pure Appl. Math.* Vol. 11(2), pp. 149-159, 1980.
18. M. Eisenberger, A. Alexandrov, "Buckling loads of variable thickness thin isotropic plates", *Thin-Walled Struct.*, Vol. 41, pp. 871-889, 2003.
19. I. Shufrin, M. Eisenberger, "Stability of variable thickness shear deformable plates-first order and high order analyses", *Thin-Walled Struct.*, Vol. 43, pp. 189-207, 2005.
20. U.S. Gupta, R. Lal, S. Sharma, "Vibration analysis of non-homogeneous circular plate of nonlinear thickness variation by differential quadrature method", *J. Sound Vibr.* Vol. 298, pp. 892-906, 2006.
21. ABAQUS version 6.8-1, Dassault Systems Simulia Corp, 2008.
22. S. Timoshenko, S. Woinowsky-Krieger, "Theory of plates and shells", 2nd edition. New York: McGraw-Hill, pp. 202-204, 1985.
23. M Salehi, G.J. Turvery, "Elastic large deflection response of annular sector plates- a comparison of DR finite difference, finite element and other numerical solutions", *Comput. Struct.* Vol. 40(5), pp. 1267-78, 1991.
24. Harik IE. "Analytical solution to orthotropic sector", *Proc ASCE J Eng. Mech.* Vol.110, pp. 554-68, 1984.
25. Cheung MS, Chan MYT. "Static and dynamic analysis of thin and thick sectorial plates by the finite strip method", *Comput, Struct*, 14(1-2), pp.79-88, 1981.