

بهبود پایداری کنترل کننده GPC در کنترل سیستم‌های غیر حداقل فاز ناپایدار و استفاده

موردی آن در کنترل Stewart Platform

مهدی یعقوبی*^(۱) محمد حائری^(۲)

(۱) استادیار، گروه برق، دانشکده مهندسی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد مشهد

(۲) استاد، دانشکده برق، دانشگاه صنعتی شریف

چکیده روش‌های پایدارسازی در کنترل کننده‌های پیش‌بین خطی، عموماً متکی بر سه روش: کنترل با افق‌های کنترل و پیش‌بین بزرگ (ایده برگرفته از کنترل بهینه)، کنترل با محدودیت انتهایی و کنترل بر اساس خاصیت پایدارسازی بودن کنترل کننده‌های پیش‌بین می‌باشد. در این مقاله، راه‌حلی جهت بهبود روش‌های مطرح شده در دسته دوم، ارائه شده که ایراد آن‌ها را در کنترل برخی از فرآیندهای ناپایدار با قطب‌های ناپایدار تکراری و احیاناً غیر حداقل فاز را برطرف می‌سازد. در این نوع از فرآیندها، چون پاسخ پله واحد، تغییرات گسترده‌ای دارد، ماتریس دینامیک به ازای افق‌های پیش‌بین بالا به تکین بودن نزدیک شده و کاربرد قضیه‌های مطرح شده را بی‌ثمر می‌کند. راه‌حل ارائه شده در این مقاله، مبتنی بر اضافه کردن تغییرات خطا علاوه بر خود آن در تابع هزینه کنترل کننده GPC به همراه تنظیم ضرایب وزنی تابع هزینه می‌باشد. با پیاده‌سازی این روش بر روی یک سیستم عملی (Stewart Platform) که تابع انتقال حلقه‌باز آن علاوه بر تعدادی قطب و صفر پایدار دارای ۶ قطب و ۵ صفر ناپایدار است، عملکرد آن مورد ارزیابی قرار می‌گیرد.

واژه‌های کلیدی پایداری، تغییرات خطا، کنترل کننده پیش‌بین، Stewart Platform, GPC.

* عهده دار مکاتبات

نشانی: معاونت پژوهشی دانشگاه آزاد اسلامی واحد مشهد

پست الکترونیکی: yaghoobi@mshdiau.ac.ir

تلفن: ۰۵۱۱-۶۲۲۳۱۳۶

۱- مقدمه

از سه روش مطرح شده بالا، با توجه به این که در روش سوم با طراحی کنترل کننده اولیه سیستم حاصل شده، مشکل مورد نظر در این مقاله را ندارد، نیاز به اصلاح پیشنهاد شده دیده نمی‌شود؛ در نتیجه، بحث ارائه شده فقط محدود به دو روش اول و دوم خواهد بود. استدلال ما در مقاله بر اساس راه حل دوم استوار است؛ هر چند که مستقیماً نتیجه حاصل، برای روش اول هم قابل استفاده می‌باشد. روش برخورد ما با مسأله تحلیل علت وجودی مشکل کنترل فرآیندهای ناپایدار با استفاده از افق‌های بالا و ارائه راه‌حلی ساده برای برطرف کردن آن است. پیشنهاد ما اضافه کردن ترم تغییرات خطا در تابع هزینه و همچنین تنظیم مناسب ضرایب در آن تابع می‌باشد.

تغییرات پیشنهادی در تابع هدف، برای اولین بار نیست که در کنترل کننده پیش‌بین مطرح شده باشد، بلکه استفاده از این تغییرات برای توانا کردن کنترل کننده در کنترل فرآیندهای خاص و در نتیجه آن، ارائه روشی برای تنظیم این تغییرات به عنوان یک حرف جدید در این مقاله مد نظر است. از طرف دیگر، استفاده از ضرایب وزنی و نحوه اثر گذاری آن به صورت عام، تقریباً یک موضوع کلاسیک حساب شده و در اغلب مقالات اولیه در رابطه با کنترل کننده پیش‌بین و کتاب‌های چاپ شده در این زمینه، مورد بحث قرار گرفته است. آنچه به عنوان کار جدید در این مقاله و مقالات مشابه [۱۲ و ۱۳] مطرح می‌شود، نحوه دقیق تعیین این ضرایب برای عملکرد خاص است که حتی گاهی به عنوان یک روش جدید طراحی کنترل کننده پیش‌بین، معرفی شده است [۱۴]. با این که در [۱۵-۱۸] و [۱۹ و ۲۰] اثر ضریب تغییرات سیگنال کنترل و انتخاب شکل خاص برای آن به منظور بهتر کردن عدد شرطی بهره کنترل کننده مورد استفاده قرار گرفته، ولی کار انجام گرفته در مقاله حاضر، هم از نظر هدف که پایداری برای فرآیندهای خاص است و هم از نظر شکل

از نظر تئوری، کنترل کننده GPC توانایی کنترل پایداری همه فرآیندهای خطی، از جمله: فرآیندهای پایدار، ناپایدار و تأخیردار را فراهم می‌سازد. در یکی از قضایای مهم مربوط به پایداری این کنترل کننده که بر اساس قضایای موجود در کنترل بهینه می‌باشد، استفاده از افق پیش‌بین (P) خیلی بزرگ، ضروری است [۱]. اثبات پایداری در این روش بر اساس قضیه پایداری لیاپانف است و تابع هدف کنترل کننده به عنوان تابع لیاپانف منظور می‌شود. شرط پایداری با منظور کردن افق کنترل (M) بزرگ‌تر از تعداد قطب‌های ناپایدار برآورده می‌شود. در صورت وجود محدودیت، افق کنترل باید از تعداد محدودیت فعال و قطب‌های ناپایدار بیشتر باشد. پایداری پذیر بودن فرآیند در اثبات قضیه، ضرورت دارد. برای ساده‌تر کردن شرایط پایداری، در روش دوم از طراحی GPC پایدار به جای استفاده از افق پیش‌بین بزرگ، اعمال محدودیت انتهایی مورد استفاده قرار می‌گیرد [۲-۴]. در عمل با وزن گذاری روی نقاط انتهایی افق زمانی که معمولاً به دو صورت انجام می‌گیرد و استفاده از شرط وجود جواب برای مسأله بهینه‌سازی تعریف شده پایداری کنترل کننده، اثبات می‌شود [۵-۸].

در مراجع [۵ و ۶] محدودیت فوق به صورت قیدهای تساوی و در مراجع [۷ و ۸] به صورت قید نرم در تابع هزینه قرار می‌گیرد.

از دیگر روش‌های پایداری سازی فرآیندهای ناپایدار، آن است که ابتدا با استفاده از یک کنترل کننده عادی که عموماً می‌تواند از طریق قطب‌گماری حاصل شود، فرآیند تحت کنترل پایدار و سپس برای سیستم پایدار شده کنترل کننده GPC طراحی شود [۹ و ۱۰] از این روش، قبلاً برای کنترل فرآیند مورد مطالعه در این مقاله استفاده شده و مزایا و معایب آن مورد ارزیابی قرار گرفته است [۱۱].

حال اگر خروجی‌های آینده مدل فرآیند را برحسب ورودی‌های آینده و گذشته آن تنظیم کنیم، داریم:

$$y(t+j) = G_j \Delta u(t+j-1) + f(t+j), \quad j=1, 2, \dots, P$$

$$f(t+j) = \frac{H_j}{C} \Delta u(t-1) + \frac{F_j}{C} y(t),$$

$$C = (\Delta \Lambda) E_j + q^{-j} F_j,$$

$$B E_j = C G_j + q^{-j} H_j \quad (2)$$

اگر خروجی‌ها و ورودی‌های آینده و همچنین گذشته فرآیند را به صورت بردار در نظر بگیریم، رابطه (۳) حاصل می‌شود که در آن بردار y ؛ خروجی‌های آینده، بردار f ؛ شامل مقادیر گذشته، بردار u مربوط به ورودی‌های آینده و G ؛ ماتریسی است که سطرهاى آن از G_j به دست آمده و عناصر پاسخ پله واحد فرآیند می‌باشد:

$$y = G \Delta u + f$$

$$\Delta u = [\Delta u(t) \Delta u(t+1) \dots \Delta u(t+P)]^T$$

$$y = [y(t+1) y(t+2) \dots y(t+P)]^T$$

$$f = [f(t+1) f(t+2) \dots f(t+P)]^T$$

$$G = \begin{bmatrix} g_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ g_2 & g_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ g_P & g_{P-1} & g_{P-2} & \dots & g_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

اگر $r(t)$ سیگنال مرجع و α ثابت زمانی فیلتر ورودی باشد (که مقدار آن چگونگی رسیدن خروجی به سیگنال مرجع را مطابق رابطه (۴) مشخص کند)، آنگاه تابع هزینه کنترل‌کننده GPC به صورت رابطه (۵) در نظر گرفته می‌شود:

$$y_d(t) = \frac{1-\alpha}{1-\alpha q^{-1}} r(t) \quad (4)$$

$$J = \sum_{j=1}^P (q_j (y_d(t+j) - y(t+j)))^2 + r_j (\Delta u(t+j-1))^2 \quad (5)$$

انتخابی برای ضرایب متفاوت با کارهای عنوان شده می‌باشد.

کار ارائه شده در این مقاله، به صورت نتایج اولیه در مورد مسأله مطرح شده، در دو مقاله کنفرانسی (۲۱ و ۲۲) ارائه شده است. در این مقاله، ابتدا علت عملکرد نادرست قضیه مورد اتکا در روش دوم طراحی کنترل‌کننده پیش‌بین پایدار کنکاش شده و سپس با جزئیات بیشتر نسبت به دو مقاله فوق به نحوه اصلاح آن می‌پردازیم.

در ادامه مقاله، ابتدا خلاصه‌ای از نحوه‌ی طراحی کنترل‌کننده پیش‌بین GPC در بخش دو، ارائه می‌شود و سپس در بخش‌های ۳ و ۴ چگونگی تغییرات لازم در این کنترل‌کننده، جهت تحقق پایداری حلقه‌بسته برای فرآیندهای ناپایدار غیر حداقل فاز، پیشنهاد می‌گردد. در بخش ۵ با معرفی سیستم Stewart Platform، نشان می‌دهیم که با روش پیشنهادی، امکان پایداری سازی حلقه‌بسته آن فراهم می‌شود. در نهایت، نتیجه‌گیری و ارزیابی عملکرد اصلاح پیشنهاد شده، مورد بحث قرار می‌گیرد.

۲- کنترل‌کننده پیش‌بین GPC

کنترل‌کننده پیش‌بین GPC، یکی از روش‌های طراحی این کنترل‌کننده‌هاست و به خاطر ویژگی‌های مهمی مانند: عملکرد خوب، فهم راحت، فرموله کردن آسان، کاهش پارامترهای لازم جهت مدل کردن فرآیند و فرمول‌بندی صریح فرآیند مبتنی بر تابع انتقال، همیشه مورد توجه بوده است. در این جا ابتدا مدل‌های فرآیند و پیش‌بینی را برای این کنترل‌کننده مطرح می‌کنیم.

چنانچه اغتشاش موجود در فرآیند از نوع غیر ایستار باشد، مدل ARIMAX می‌تواند برای بیان رفتار آن مورد استفاده قرار گیرد:

$$y_p(t) = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})\Delta} \Delta u(t-1) + \frac{C(q^{-1})}{A(q^{-1})\Delta} e(t), \quad \Delta = 1 - q^{-1} \quad (1)$$

$$\underline{y}_d = [y_d(t+P)y_d(t+P+1)\dots y_d(t+P+m)]^T$$

$$\underline{f} = [f(t+P+1)f(t+P+2)\dots f(t+P+m)]^T$$

حل بهینه‌سازی بالا عبارت است از:

$$\Delta u = \tilde{G}[I - \underline{G}^T(\underline{G}\tilde{G}\underline{G}^T)^{-1}\underline{G}\tilde{G}]G^T Q(y_d - f) + \tilde{G}\underline{G}^T(\underline{G}\tilde{G}\underline{G}^T)^{-1}(\underline{y}_d - \underline{f}) \quad (9)$$

که در آن \tilde{G} برابر است با:

$$\tilde{G} = (G^T Q G + R)^{-1} \quad (10)$$

با انتخاب Q به صورت مثبت نیمه معین و R به صورت مثبت معین، ماتریس \tilde{G} معکوس‌پذیر خواهد بود و اگر ماتریس \underline{G} معکوس‌پذیر باشد، آنگاه رابطه (۹) جواب دارد. بدین صورت در موارد ذیل، سیستم حلقه‌بسته پایدار است اگر:

الف: فرآیند صفری در $z=1+0j$ نداشته باشد؛ در غیر این صورت، به دلیل استفاده از مدل ARIMAX حذف صفر و قطب پیش آمده، کنترل‌پذیری و رویت‌پذیری سیستم را از بین می‌برد.

ب: Q به صورت مثبت نیمه معین و R به صورت مثبت معین باشد.

ج: $m \leq P+1$ و $m \leq n+1$ صادق باشد.

ن؛ درجه فرآیند و m ؛ تعداد قیدهای لازم و P ؛ افق پیش‌بین است که در حالت کلی باید بزرگتر از $n+1$ می‌باشد. شرایط یکسانی برای پایداری حلقه‌بسته با استفاده از تحلیل بر اساس مدل حالت در [۲۳] به دست آمده است.

در فرآیندهای مورد نظر، با وجود برآورده شدن شرایط سه‌گانه، رابطه (۹) جواب درستی نمی‌دهد و در نتیجه، سیستم حلقه‌بسته پایدار نیست. علت اصلی مسئله خطای عددی ایجاد شده در محاسبات \tilde{G} و \underline{G} به خاطر محدودیت در دقت محاسباتی است.

تحلیل ما از وجود اشکال یا عدم پاسخ مناسب در روش پایداری مطرح شده در شرط کنترل‌پذیری

بردار ورودی‌های آینده u ، با حداقل کردن تابع هزینه (۵) مبتنی بر دو هدف، شامل حداقل نمودن اختلاف بین خروجی فرآیند و مسیر مطلوب و همچنین حداقل نمودن تغییرات خروجی کنترل از رابطه (۶) به دست می‌آید:

$$\Delta u = (G^T Q G + R)^{-1} G^T Q (y_d - f) \quad (6)$$

$$R = \text{Diag}(r_1, r_2, \dots, r_p), \quad Q = \text{Diag}(q_1, q_2, \dots, q_p)$$

و در نهایت، سیگنال کنترلی به دست آمده از این رابطه به فرآیند اعمال می‌شود. بر اساس نتایج حاصله و آخرین اطلاعات اندازه‌گیری شده، تمامی مراحل بالا در زمان‌های بعدی نمونه‌برداری تکرار می‌گردد.

پایه الگوریتم کنترل پیش‌بین برای تأمین پایداری در روش دوم، حل مسئله کنترل بهینه همراه با محدودیت حالت انتهایی می‌باشد. بر این اساس، پایداری فرآیندهای خطی ناپایدار با اضافه شدن محدودیتی بدین صورت که "خروجی مدل در انتهای افق خروجی برابر خروجی مطلوب باشد" به مسئله بهینه‌سازی، امکان‌پذیر است. ماحصل این روش، حل مسئله بهینه‌سازی زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} \min J_{GPC} \\ \text{s.t } y_p(t+P+j) &= y_d(t+P), \quad j=1, 2, \dots, m \\ \Delta u(t+P+j) &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

برای حل مسئله بهینه‌سازی بالا از تعریف لاگرانژین استفاده شده؛ به این صورت که محدودیت تساوی بالا با ضریب لاگرانژ به J_{GPC} اضافه می‌شود و مسئله بهینه‌سازی، بدون محدودیت حل می‌شود. با نوشتن قیدها به صورت برداری داریم:

$$\underline{G}\Delta u + \underline{f} = y_d \quad (8)$$

$$\underline{G} = \begin{bmatrix} g_{p+1} & g_p & \dots & g_1 \\ g_{p+2} & g_{p+1} & \dots & g_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{p+m} & g_{p+m-1} & \dots & g_m \end{bmatrix}$$

خطا در تابع هزینه از رابطه (۲) داریم:

$$\begin{aligned} y(t+1) - y(t) &= g_1 \Delta u(t) + f(t+1) - y(t) \\ y(t+2) - y(t+1) &= (g_2 - g_1) \Delta u(t) + g_1 \Delta u(t+1) + \\ &\quad f(t+2) - f(t+1) \\ &\vdots \\ y(t+P) - y(t+P-1) &= (g_p - g_{p-1}) \Delta u(t) + \dots + \\ &\quad g_1 \Delta u(t+P-1) + f(t+P) - \\ &\quad f(t+P-1) \end{aligned}$$

حال بردارهای \bar{y} , \bar{e} , \bar{f} , \bar{y}_d و ماتریس \bar{G} را به

صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\bar{G} = \begin{bmatrix} g_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ g_2 - g_1 & g_1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_p - g_{p-1} & g_{p-1} - g_{p-2} & g_{p-2} - g_{p-3} & \dots & g_1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{y} = [y(t)y(t+1)\dots y(t+P-1)]^T$$

$$\bar{y}_d = [y_d(t)y_d(t+1)\dots y_d(t+P-1)]^T$$

$$\bar{f} = [f(t)f(t+1)\dots f(t+P-1)]^T$$

$$\bar{e} = [e(1) e(2) - e(1) \dots e(P) - e(P-1)]^T$$

با در نظر گرفتن تعاریف فوق، می‌توان رابطه

بردار زیر را نتیجه گرفت:

$$\begin{aligned} y - \bar{y} &= \bar{G} \Delta u + \bar{f} - \bar{f} \\ \bar{e} &= (y_d - y) - (\bar{y}_d - \bar{y}) = y_d - \bar{y}_d - (y - \bar{y}) \end{aligned} \quad (12)$$

از طرفی رابطه (۱۱) را می‌توان به صورت

ماتریسی زیر در نظر گرفت:

$$J = (y_d - y)^T Q (y_d - y) + \Delta u^T R \Delta u + \bar{e}^T S \bar{e} \quad (13)$$

با جایگزینی روابط (۳) و (۱۲) در (۱۳) داریم:

مورد درخواست است که به نظر کافی نیست و باید به طریقی کامل شود. پیشنهاد ما این است به جای کنترل‌پذیری مدل که از $B / A\Delta$ در رابطه (۱) تعیین می‌شود، کنترل‌پذیری مدل پیش‌بین که از رابطه (۳) و بر حسب ماتریس G بیان می‌شود، باید مد نظر قرار گیرد و در ضمن برای تکمیل بحث گرامیان کنترل‌پذیری بررسی شود.

در آنچه که در ادامه آمده است، سعی می‌شود، اولاً: تا حد امکان، شرایط ایجاد خطا در محاسبات کاهش یافته و سپس شرایط پایداری ترمیم گردد. در قسمت اول با اضافه کردن ترم مرتبط به تغییرات خطای پیش‌بینی مسأله تاحدودی بهبود یافته و آنگاه با تنظیم ضرایب تغییرات ورودی، مسأله پیش آمده برطرف می‌گردد.

۳- تکمیل تابع هزینه

در فرآیندهای ناپایدار با قطب‌های تکراری سمت راست محور موهومی، نرخ رشد سیگنال خطای پیش‌بینی زیاد است و این اختلاف با افزایش افق پیش‌بین به شدت افزایش می‌یابد. برای آن که سیستم بتواند سیگنال مرجع با مقادیر ثابت در فاصله زمانی‌های معین را دنبال کند، به نظر می‌رسد ورودی‌های آن باید به نحوی تعیین شود که علاوه بر کاهش خطا، تغییرات خطا را نیز کاهش دهد. برای این منظور، تابع هزینه (۵) را تغییر می‌دهیم و در آن جمله‌ای جهت کاهش تغییرات خطا در نظر می‌گیریم. در نتیجه خواهیم داشت:

$$J = \sum_{j=1}^p (q_j (\varepsilon(j))^2 + s_j (\varepsilon(j) - \varepsilon(j-1))^2 +$$

$$r_j (\Delta u(t+j-1))^2),$$

$$\varepsilon(j) = y_d(t+j) - y(t+j)$$

(۱۱)

برای تعیین رابطه ورودی‌های آینده و تغییرات

۴- تنظیم ضریب R برای بالا بردن کنترل‌پذیری مدل پیش‌بین

در تعیین جواب معادله $Ax = b$ برای آن که بدانیم جواب با چه دقتی محاسبه می‌شود، یک راه محاسبه عدد، حالت ماتریس A می‌باشد. اگر ابعاد ماتریس A برابر $P \times M$ باشد و همچنین مرتبه آن برابر r باشد، آنگاه می‌توان نوشت:

$$A = U \Sigma V^T \quad (16)$$

$$\hat{S} = \begin{bmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_{r-1} & 0 \end{bmatrix}, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} \hat{S} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{P \times M}$$

که در آن U و V^T ماتریس‌های متعامد با ابعاد به ترتیب: $P \times P$ و $M \times M$ می‌باشند. \hat{S} ، یک ماتریس متعامد با ابعاد $r \times r$ است. $\sigma_i, i = 0, 1, \dots, r-1$ مقادیر ویژه ماتریس A می‌باشند. اگر عدد حالت ماتریس A را با $\text{cond}(A)$ نشان دهیم، داریم:

$$\text{cond}(A) = \max(\sigma_i) / \min(\sigma_i) \quad (17)$$

از این پارامتر در تعیین میزان دقت نتایج به دست آمده از حل معادلات خطی استفاده می‌شود [24]. بهترین مقدار برای $\text{cond}(A)$ یک می‌باشد. اگر در تعیین جواب معادله فوق $\text{cond}(A) > 1/\sqrt{\text{eps}}$ باشد که در آن مقدار eps به سیستم محاسباتی ربط دارد و برای کامپیوترهای معمولی، حدود 2.2×10^{-16} است؛ در نتیجه: $1/\sqrt{\text{eps}} = 6.7 \times 10^8$ ، آنگاه لازم است مسأله به صورت مناسبی اصلاح شود تا عدد حالت، بهبود یابد.

در این جا می‌خواهیم با اتکا به بحث بالا، مقدار ماتریس R را طوری تعیین کنیم تا $G^T QG + R + \bar{G}^T S \bar{G}$ دارای عدد حالت مناسبی باشد. مطابق رابطه (۱۵) برای محاسبه ورودی‌های آینده، معکوس ماتریس $G^T QG + R + \bar{G}^T S \bar{G}$ مورد نیاز است. اگر $Q = I$ و $R = S = 0$ باشد، برای ورودی‌های آینده، معکوس $G^T G$ لازم است. برای پروسه‌های

$$J = (y_d - G\Delta u - f)^T Q (y_d - G\Delta u - f) + \Delta u^T R \Delta u + (y_d - \bar{y}_d - \bar{G}\Delta u - f + \bar{f})^T S (y_d - \bar{y}_d - \bar{G}\Delta u - f + \bar{f}) \quad (14)$$

بردار ورودی‌های آینده u با مینیمم کردن تابع هزینه (۱۳) مبتنی بر سه هدف شامل:

۱- مینیمم نمودن اختلاف بین خروجی فرآیند و مسیر مطلوب،

۲- کاهش تغییرات خطا،

۳- حداقل نمودن تغییرات خروجی کنترل،

از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\Delta u = (G^T QG + R + \bar{G}^T S \bar{G})^{-1} [G^T Q (y_d - f) + \bar{G}^T S (y_d - \bar{y}_d - f + \bar{f})] \quad (15)$$

$$R = \text{Diag}(r_1, r_2, \dots, r_p),$$

$$Q = \text{Diag}(q_1, q_2, \dots, q_p),$$

$$S = \text{Diag}(s_1, s_2, \dots, s_p)$$

به جای $G^T QG + R$ در معادله (۹)، $G^T QG + R + \bar{G}^T S \bar{G}$ در معادلات بالا دیده می‌شود که با انتخاب مناسب S، می‌توان تا حدودی از تکین شدن $G^T QG$ جلوگیری کرد. چنان که در بخش بعدی به ان اشاره خواهد شد، ماتریس R هم می‌شود برای این منظور استفاده کرد.

با دقت در معادله (۳) که مدل پیش‌بین را نشان می‌دهد، ماتریس دینامیک مدل I و ماتریس ورودی آن G است؛ بنابراین، کنترل‌پذیری آن به G و گرامیان کنترل‌پذیری آن به $G^T G$ ربط دارد.

به دلیل تفاوت زیاد در عناصر ماتریس G در فرآیندهای مورد بحث در این مقاله، این ماتریس و به دنبال آن $G^T G$ به تکین بودن نزدیک شده و دقیقاً به همین دلیل، اثرگذاری Δu روی y به صورت مناسب نیست. در این بخش به کمک S این امکان را یافتیم که به جای $G^T G$ رابطه $G^T G + \bar{G}^T S \bar{G}$ را داشته باشیم که می‌تواند اثرگذاری بهتری برای Δu روی y ایجاد کند.

$$k = (\sigma_0 + \lambda) / (\sigma_{r-1} + \lambda) \quad (21)$$

و در نتیجه، مقدار λ برابر است با:

$$\lambda = (\sigma_0 - k\sigma_{r-1}) / (k - 1) \quad (22)$$

با انتخاب مقدار λ از رابطه (22) و محاسبه ورودی‌های آینده توسط رابطه (15)، این اطمینان وجود دارد که عدد حالت مربوط به ماتریس $G^T QG + \bar{G}^T S \bar{G} + \lambda I$ برابر مقدار تعیین شده k خواهد بود. مقدار k برای یک سطح مشخص از کنترل‌پذیری یا گرامیان آن برای مدل پیش‌بین، قابل تعیین است.

۵- پایدارسازی سیستم Stewart Platform

به منظور مقایسه این روش با روش معمول GPC و همچنین دیگر روش‌های پایدارسازی (از نوع کنترل‌کننده پیش‌بین) پایدارسازی یک فرآیند Stewart Platform را مورد بررسی قرار می‌دهیم. این سیستم از آن جهت انتخاب نشده است که مثال خوبی برای ارزیابی کارایی کنترل‌کننده‌های پیش‌بین است، بلکه مثال خوبی است از این جهت که یک سیستم عملی است و دارای مشخصاتی می‌باشد که به موضوع مورد بحث ما مستقیماً ربط دارد؛ یعنی سیستمی که علاوه بر دارا بودن قطب‌ها و صفرهای پایدار، دارای قطب‌ها و صفرهای ناپایدار و تکراری است و بنابراین مثال مناسبی برای نشان دادن ادعای مطرح شده در مقاله حاضر است که قضایای مورد مطالعه نیاز به تکمیل دارند. از بارزترین نمونه Platformها می‌توان به Stewart Platform اشاره نمود که مطابق شکل (۱) دارای دو صفحه موازی است و به وسیله شش پایه موازی مستقل، به هم متصل شده‌اند. در مسائل مربوط به بررسی این سیستم‌ها به طور معمول، موقعیت یا زوایای مفاصل به عنوان خروجی انتخاب می‌شود.

حلقه‌باز ناپایدار چون ضرایب پاسخ پله همانند پروسه‌های حلقه‌باز پایدار محدود نیستند، ماتریس G که از ضرایب پاسخ پله تشکیل شده است، دارای مقادیری با دامنه وسیع تغییرات خواهد بود که این موضوع سبب افزایش اختلاف بزرگترین و کوچکترین مقادیر ویژه ماتریس $G^T G$ و در نتیجه، افزایش عدد حالت می‌شود. ماتریس R را به صورت $R = \lambda I$ در نظر می‌گیریم و پارامتر λ را چنان تعیین می‌کنیم که $\text{cond}(G^T QG + \bar{G}^T S \bar{G} + \lambda I)$ کاهش یابد. اگر:

$$G^T QG + \bar{G}^T S \bar{G} = U \Sigma V^T \quad (18)$$

$$\hat{S} = \begin{bmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_{r-1} & 0 \end{bmatrix}, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} \hat{S} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{P \times M}$$

آنگاه داریم:

$$G^T QG + \bar{G}^T S \bar{G} + \lambda I = U \Sigma^* V^T \quad (19)$$

$$\Sigma^* = \begin{bmatrix} \hat{S}^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{P \times M} \quad \text{و}$$

$$S^* = \begin{bmatrix} \lambda + \sigma_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda + \sigma_1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda + \sigma_{r-1} & 0 \end{bmatrix}$$

حال اگر بخواهیم عدد حالت ماتریس $G^T QG + \bar{G}^T S \bar{G} + \lambda I$ برابر مقدار معین k باشد، با توجه به روابط زیر:

$$\text{cond}(G^T QG + \bar{G}^T S \bar{G} + \lambda I) = (\sigma_0 + \lambda) / (\sigma_{r-1} + \lambda) \\ \max(\sigma_i) = \sigma_0, \quad \min(\sigma_i) = \sigma_{r-1} \quad (20)$$

داریم:

خود می‌باشد. معمولاً این پایه‌ها به صورت جفت جفت، چیده می‌شوند که فاصله هر جفت در صفحه بالایی با فاصله دو جفت در صفحه پایینی متفاوت است؛ ولی در نهایت به تقارن شکل Stewart Platform لطمه‌ای وارد نمی‌شود. به طور معمول، صفحه بالایی، صفحه متحرک و صفحه پایینی ثابت و توسط سه نقطه، به زمین متصل می‌شود. برای اتصال دو پایه و امکان قابلیت حرکت پایه بالا در پایه پایین از مفاصل سیلندری با دو درجه آزادی؛ یکی برای انتقال و دیگری برای چرخش، استفاده می‌شود؛ بنابراین سه مفصل با دو درجه آزادی باعث ایجاد ۶ درجه آزادی در پایه‌ها می‌گردد.

اگر خروجی شامل موقعیت و جهت صفحه بالایی باشد، بردار خروجی به صورت زیر تعریف می‌شود:

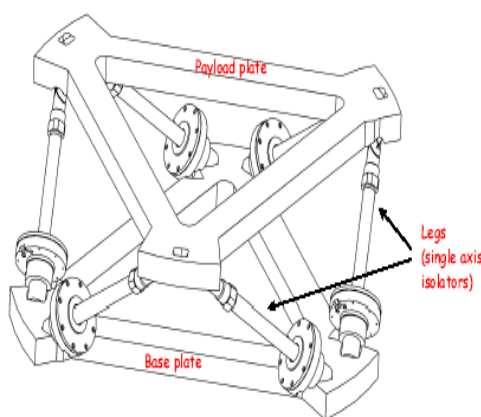
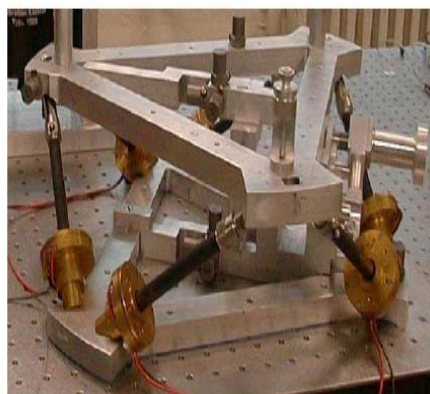
$$q = [x \ y \ z \ \phi \ \theta]$$

که در آن x ، y و z موقعیت و ϕ ، θ و نیز جهت صفحه بالایی می‌باشد. صرف نظر از دینامیک پایه‌ها و همچنین اصطکاک و لقی‌ها، این سیستم با یک معادله درجه ۲ جرم-فنر-دمپر به صورت زیر مدل می‌شود:

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + L(q) = F(q)u \quad (23)$$

در این رابطه، q بردار خروجی یا موقعیت و جهت صفحه بالا، M ؛ ماتریس اینرسی، C ؛ شتاب کوریولیس و L ؛ شتاب جاذبه زمین می‌باشد. بعد سه جمله جمع‌شونده سمت چپ نیرو یا به عبارتی گشتاور است. F ؛ ماتریس ژاکوبین است که توسط نیرو به گشتاور و بر عکس تبدیل می‌شود.

با توجه به این که Stewart Platform یک سیستم غیرخطی است؛ بنابراین برای طراحی کنترل‌کننده خطی، لازم است که سیستم حول نقطه کارش، خطی شود. آنگاه، کنترل‌کننده خطی طراحی و سپس به سیستم غیرخطی حول نقطه کار، اعمال شود. اگر هدف کنترل موقعیت باشد، آنگاه خروجی سیستم طول، شش پایه است. با خطی‌سازی سیستم حول یکی از نقاط کار، این سیستم ۶ ورودی و ۶ خروجی دارای ۱۲ متغیر حالت بوده و معادلات فضای حالت آن به صورت زیر می‌باشد:



شکل ۱ شمای یک Stewart Platform

Stewart Platform برای اولین بار در سال ۱۹۶۵ به عنوان شبیه‌ساز پرواز ساخته شد. بعد از گذشت سال‌ها کاربردهای متفاوت و مختلفی برای این وسیله در نظر گرفته شده که می‌توان به صنایع هوا-فضا، صنایع مورد استفاده در اتومبیل، انتقال و از همه مهمتر کنترل موقعیت، اشاره کرد. از کاربردهای Stewart Platform در صنایع هوا-فضا می‌توان به شبیه‌ساز پرواز، فرار گرفتن سیستم موقعیت‌یاب یا ژيروسکوپ بر روی آن در هواپیما و موارد مختلف دیگر اشاره کرد [۱۱].

یک Stewart Platform دارای دو صفحه موازی است که معمولاً دایره‌ای شکل ساخته می‌شود و به وسیله شش پایه موازی مستقل به هم متصل می‌شوند که معرف تعداد درجات آزادی Stewart Platform است. هر یک از پایه‌ها دارای دینامیک مخصوص به

در این حالت سیستم حلقه‌باز، ۱۲ قطب به صورت زیر دارد:

{-3.7890, -1.4576, 1.4576, 3.3798,
-3.4161, -3.4161, -1.8201, -1.8201, 3.4161,
3.4161, 1.8201, 1.8201}

۶ عدد از این قطب‌ها سمت راست محور موهومی قرار دارند که دو به دو تکراری می‌باشند. همچنین تابع تبدیل حلقه‌باز از خروجی اول به ورودی اول آن دارای ۱۱ صفر به صورت زیر می‌باشد که ۵ عدد از آن در سمت راست محور موهومی قرار دارد:

1.0e+011 * {-4.38964893332364,
0.00000000003416, 0.00000000003394,
0.00000000002430, 0.00000000001820,
0.00000000001581, -0.00000000003416,
-0.00000000003394, -0.00000000002430,
-0.00000000001820, -0.00000000001581}

لازم به ذکر است که کنترل‌کننده این سیستم معمولاً به صورت غیر متمرکز طراحی می‌شود؛ به عبارت دیگر، چون شش کانال موجود به خاطر تقارن سیستم عین هم عمل می‌کنند، کنترل هر یک از خروجی‌ها فقط با ورودی متناظر خودش انجام می‌گیرد. این بدان معنی است که اثر کانال‌های دیگر به عنوان اغتشاش بررسی شده به همین دلیل طراحی لزوماً بهینه نخواهد بود. ما برای سادگی طراحی کنترل‌کننده و مطالعه مسأله مطرح شده در مقاله، فقط یکی از کانال‌ها را بدون در نظر گرفتن اثر کانال‌های دیگر، بررسی کرده‌ایم. برای کنترل این سیستم، روش‌های معمول پایدارسازی، شامل پایدارسازی با محدودیت سخت

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \bar{A}x(t) + \bar{B}u(t) \\ y(t) &= \bar{C}x(t) + \bar{D}u(t) \end{aligned}$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0_{6*6} & I_{6*6} \\ a_{21} & 0_{6*6} \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} 0_{6*6} \\ b_{21} \end{bmatrix},$$

$$\bar{C} = [c_{12} \quad 0_{6*6}], \quad \bar{D} = [0_{6*6}]$$

(۲۴)

$$a_{21} = \begin{bmatrix} 7.2521 & -3.8448 & 1.0707 \\ -3.8448 & 7.2521 & 1.4913 \\ -1.5490 & 1.4913 & 7.2521 \\ -2.2956 & 1.0707 & -3.8448 \\ 1.0707 & -2.2956 & -1.5490 \\ 1.4913 & -1.5490 & -2.2956 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2.2956 & -1.5490 & 1.4913 \\ -1.5490 & -2.2956 & 1.0707 \\ -3.8448 & 1.0707 & -2.2956 \\ 7.2521 & 1.4913 & -1.5490 \\ 1.4913 & 7.2521 & -3.8448 \\ 1.0707 & -3.8448 & 7.2521 \end{bmatrix}$$

$$b_{21} = \begin{bmatrix} 0.0002 & 0.0002 & -0.0010 \\ 0.0002 & -0.0010 & 0.0002 \\ -0.0010 & 0.0002 & -0.0001 \\ 0.0002 & 0.0002 & 0.0021 \\ -0.0001 & 0.0021 & 0.0002 \\ 0.0021 & -0.000 & 0.0002 \end{bmatrix}$$

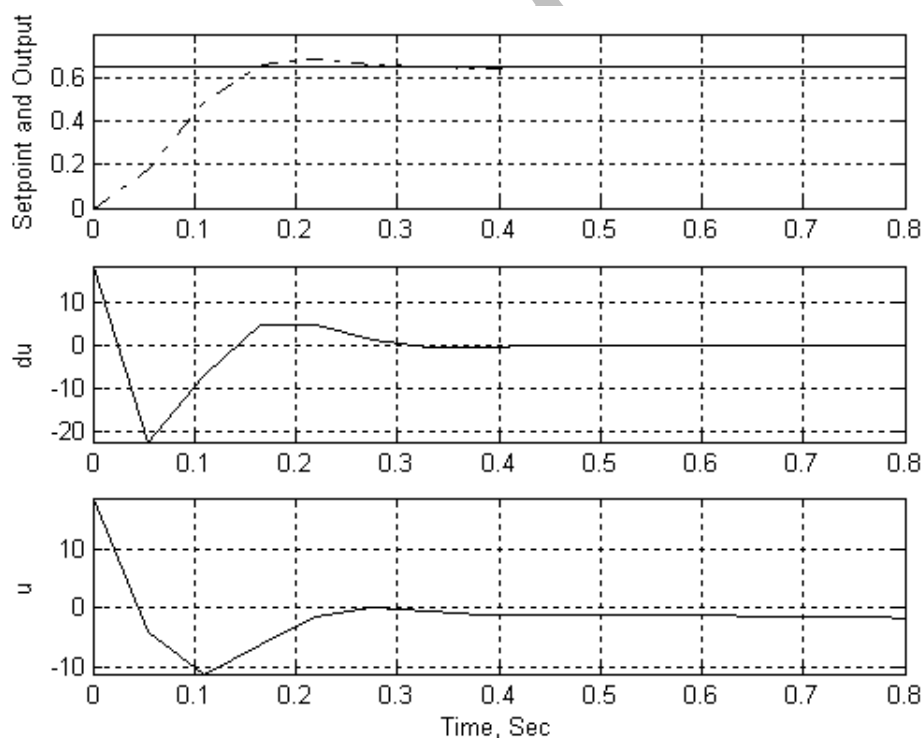
$$\begin{bmatrix} 0.0002 & -0.0001 & 0.0021 \\ 0.0002 & 0.0021 & -0.0001 \\ 0.0021 & 0.0002 & 0.0002 \\ -0.0001 & 0.0002 & -0.0010 \\ 0.0002 & -0.0010 & 0.0002 \\ -0.0010 & 0.0002 & 0.0002 \end{bmatrix}$$

$$c_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

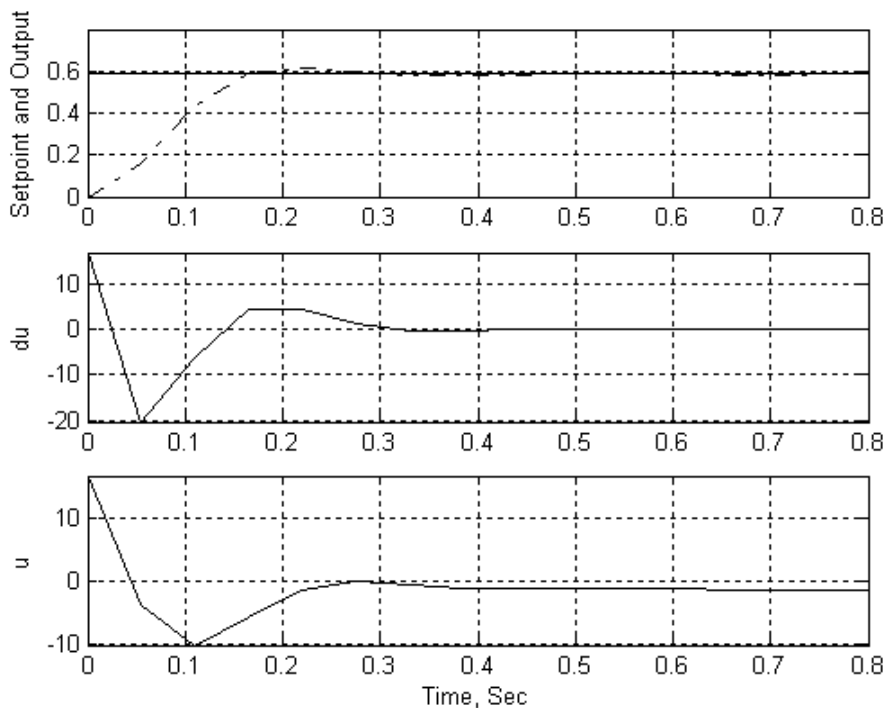
مشخص، بهره گرفته شده است. در این جا با استفاده از روش اصلاحی خود بر روی طراحی کنترل کننده پایدارساز با قید انتهایی، کنترل کننده‌ای با عدد حالت 5×10^6 طراحی کرده و در محیط MATLAB شبیه سازی را انجام داده ایم. نتایج شبیه سازی برای دو مقدار مختلف ورودی مرجع 0.650 و 0.585 و با در نظر گرفتن پارامترهای کنترل کننده به صورت زیر در شکل های (۲) و (۳) آمده است:

$$P = M = 20, \alpha = 0.15, T_s = 0.055, \lambda = 1.3624e-04, \\ Q = S = I,$$

(CRHPC) Constraint Receding Horizon Predictive، پایدارسازی با محدودیت نرم (WGPC) (Control Mixed) (with End point state Weighting) و (MWGPC) [۲۵] به کار گرفته شد که با در نظر گرفتن شرایط مطرح شده و با تنظیم کلیه پارامترهای کنترل کننده، پایداری حلقه بسته حاصل نشد. لازم به ذکر است که در مرجع [۱۱] از روش سوم طراحی کنترل کننده پایدارساز برای کنترل این سیستم استفاده شده است؛ بدین صورت که ابتدا توسط یک کنترل کننده LQG سیستم پایدار شده و سپس از یک کنترل کننده GPC برای بهبود پاسخ و رسیدن به یک کارایی



شکل ۲ پاسخ سیستم برای ورودی مرجع 0.650



شکل ۳ پاسخ سیستم برای ورودی مرجع ۰.۵۸۵

۶- نتایج

شرط کنترل پذیری فرآیند با کنترل پذیری مدل پیش‌بین در قضیه مطرح شده می‌باشد. بدیهی است که اثبات پایداری قضیه عنوان شده، تغییری نمی‌کند و اثبات موجود، قابل استفاده و اعمال است.

اصلاح مورد نظر در مقاله حاضر به دو صورت: اضافه کردن تغییرات خطای پیش‌بینی در تابع هدف و تنظیم ضریب وزنی تغییرات ورودی مطرح شد که هر دوی آنها کمک می‌کند تا کنترل پذیری مدل پیش‌بین بهبود یابد. در نهایت، نحوه تنظیم ضریب وزنی در روش پیشنهاد شده با طراحی کنترل‌کننده مورد نظر، برای یک فرآیند نمونه با مشخصات اعلام شده انجام و نتایج شبیه‌سازی ارائه شد.

در اثبات پایداری برای روش اول طراحی کنترل‌کننده پیش‌بین پایدار نیز کنترل پذیری مدل فرآیند مورد نیاز است و این بدان معنی است که پیشنهاد ارائه شده در این مقاله، برای آن روش هم لازم خواهد بود

قضیه ارائه شده در روش دوم از کنترل‌کننده پیش‌بین پایدار که بر اساس قید نهایی است، فرضیاتی را برای حصول پایداری، لازم می‌داند که شامل کنترل‌پذیری، روئیت‌پذیری، نداشتن صفر در کنترل‌کننده تحت کنترل و شرایط $z = 1 + 0j$ برای کنترل‌کننده $P \geq n + 2, m \leq n + 1, m \leq P + 1$ پیش‌بین می‌باشد. فرآیندهایی وجود دارند که علیرغم دارا بودن شرایط لازم، پایداری آنها با مشکل روبرو می‌شود. نشان داده شد که مشکل به وجود آمده، ناشی از آن است که ماتریس دینامیک فرآیند G ، که شکل دهنده ماتریس کنترل‌پذیری مدل پیش‌بین هم هست برای این فرآیندهای خاص دارای عناصری با دامنه تغییرات وسیع بوده، بنابراین محاسبه معکوس $G^T G$ بدلیل داشتن عدد حالت بالا از دقت کافی برخوردار نیست. پیشنهاد ارائه شده در مقاله حاضر، جایگزینی

تا این طراحی هم در کنترل فرآیندهای مورد مطالعه، قابلیت استفاده داشته باشد.

مراجع

1. J.A. Rossiter, J.R. Gossner, B. Kouvaritakis, "Infinite horizon stable predictive control", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 41, No.10, pp. 1522-1527, 1996.
2. G. De Nicolao and S. Strada, "On the stability of receding horizon LQ control with zero state terminal constraint", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 42, No. 2, pp. 257-260, 1997.
3. D.W. Clarke R. Scattolini, "Constrained receding horizon predictive control", IEE Proceedings D, Vol. 138, No. 4, pp. 349-354, 1991.
4. J.B. Rawlings and K.R. Muske, "The stability of constrained receding horizon control", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 38, No. 10, pp. 1512-1516, 1993.
5. J.A. Rossiter, B. Kouvaritakis, "Constrained stable generalized predictive Control", IEE Proceedings-D, Vol. 140, No. 4, 1993.
6. J.R. Gossner, B. Kouvaritakis, J.A. Rossiter, "Constrained multivariable cautious stable predictive control", IEE Proceedings-D, Vol. 145, No. 5, 1998.
7. H.W. Gomma, D.H. Owens, "Time varying weighting generalized predictive control (TGPC) with prediction to performance, stability and robustness", Proceedings of the 38th Conference on Decision and Control, Phoenix, Arizona USA, December 1999.
8. D.Q. Mayne, "Improved stabilizing condition for model predictive control", Proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision and Control, Sydney, Australia, December 2000.
9. B. Kouvaritakis, J.A. Rossiter, A.O.T. Chang, "Stable generalized predictive control: an algorithm with guaranteed stability", IEE Proceedings-D, Vol. 139, No. 4, pp. 349-362, 1992.
10. B. Kouvaritakis, J.A. Rossiter, J.R. Gossner, "Improved algorithm for multivariable stable generalized predictive control", IEE Proceedings-D, Vol. 144, No. 4, July 1997.
۱۱. شهرک ندیمی، اسماعیل، پایان نامه کارشناسی ارشد، "مدل سازی و کنترل Stewart Platform با استفاده از کنترل کننده پیش بین" دانشکده مهندسی برق، دانشگاه صنعتی شریف، بهمن ۱۳۸۲.
12. M. Abu-Ayyad and R. Dubay, "MIMO extended predictive control: Implementation and robust stability analysis", ISA Transactions, Vol. 45, No. 4, pp. 545-561, 2006.
13. M. Abu-Ayyad, R. Dubay, and G. Kember, "SISO extended predictive control: Implementation and robust stability analysis", ISA Transactions, Vol. 45, No. 1, pp. 9-20, 2006.
14. M. Abu-Ayyad R. Dubay, and G.C. Kember, "SISO extended predictive control-formulation and the basic algorithm", ISA Transactions, Vol. 45, No. 1, pp. 9-23, 2006.

15. R. Dubay, G. Kember, and B. Pramujati, "Well-conditioned model predictive control", ISA Transactions, Vol. 43, No. 1, pp. 23-32, 2004.
16. R. Dubay, G. Kember, C.V. Lakshinarayan, and B. Pramujati, "Development of characteristic equations and robust stability analysis for MIMO move suppressed and shifted DMC", ISA Transactions, Vol. 44, No. 4, pp. 465-479, 2005.
17. R. Dubay and M. Abu-Ayyad, "Properties of extended predictive control", ISA Transactions, Vol. 46, pp. 103-111, 2007.
18. G.C. Kember, R. Dubay, and S.E. Mansour, "Continuous analysis of move suppressed and shifted DMC", ISA Transactions, Vol. 44, No. 1, pp. 69-80, 2005.
19. M. Lazar, W.P.M.H. Heemels, "Predictive control of hybrid systems: Input-to-state stability results for sub-optimal solutions", *Automatica*, ISSN 0005-1098, Vol. 45, No. 1, pages. 180-185, 2009
20. R. Shridhar and D.J. Cooper, "A tuning strategy for unconstrained multivariable model predictive control", *Industrial & Engineering Chemistry Research*, Vol. 37, No. 10, pp. 4003-4016, 1998.
21. M. Yaghobi and M. Haeri, "Design of a stable GPC for non-minimum phase LTI systems", *Proceeding of the Fourth World Enformatika Conference, Istanbul, Turkey*, Vol. 6, pp. 88-91, June 2005.
22. M. Yaghobi and M. Haeri, "A new stabilizing GPC for non-minimum phase LTI systems using time varying weighting", *Proceeding of the Fourth World Enformatika Conference, Istanbul, Turkey*, Vol. 6, pp. 156-158, June 2005.
23. E. Mosca and J. Zhang, "Stable redesign of predictive control", *Automatica*, Vol. 28, No. 6, pp. 1229-1233, 1992.
24. O.J. Rojas, G.C. Goodwin, M.M. Seron and A. Feuer, "An SVD based strategy for receding horizon control of input constrained linear systems", *Proceeding of the American Control Conference, Denver, Colorado*, 2003.
25. Li-F. Zhou, "The mixed-weights least square stable predictive control for constrained multi-object multivariable system", *Proceedings of the Second International Conference on Machine Learning and Cybernetic, Xi'an*, November 2003.