مجله مهندسی مالی و مدیریت اوراق بهادار
شماره هفدهم / زمستان ۱۳۹۲

مدلسازی عدم تقارن و تغییرساختاری سری‌های زمانی مالی با استفاده از فرآیندهای Markov-switching GARCH

رسول سجاد[۱]
امیرحسین فراهانی راد[۲]

تاریخ دریافت: ۹۲/۳/۱۷ تاریخ پذیرش: ۹۲/۸/۲۰

چکیده

در طول سالیان گذشته استفاده از فرآیندهای Markov-switching (MS) جهت مدل‌نمودن دینامیک غیرخطی تلاطم سری‌های زمانی مالی به دلیل انعطاف‌پذیری آن در لحاظ ساختارهای مختلف برای داده‌ها به طور قابل ملاحظه‌ای افزایش یافته است. فرض متداول توزیع بازده، نرمال می‌باشد در حالی که تحقیقات نشان داده است سری‌های زمانی مالی دارای چولگی معناداری نیز می‌باشند که چشم‌پوشی از آن می‌تواند منجر به خطا در پیش‌بینی که مهمترین هدف از بررسی یک سری زمانی است گردد. بنابراین آن‌چه که انگیزه اصلی این تحقیق را شکل داده است معرفی MS GARCH جهت مدل نمودن تلاطم بازده است به گونه‌ای که مدل بتواند عدم تقارن داده‌های مالی را نیز لحاظ نماید. بدین ترتیب عملکرد مدل‌های متقارن و نامتقارن MS GARCH را بر روی شاخص بورس اوراق بهادار تهران (Tepix) با یکدیگر مقایسه خواهیم نمود. در نهایت با توجه به ارزیابی‌های انجام شده مدل نا متقارن Mix^icept که توانایی تولید چولگی دارد بهترین عملکرد را در بین تمامی مدل‌ها از خود نشان می‌دهد.

واژه‌های کلیدی: تلاطم، مارکوف سوییچینگ، مدل‌های میکسچر، چولگی، گارچ، ارزش در معرض خطر.

۱- دکترای امور مالی-گرایش مدلسازی دانشگاه ESSEX لندن استادیار دانشگاه علم و فرهنگ
۲- کارشناسی ارشد مهندسی مالی دانشگاه علم و فرهنگ ahfrad@gmail.com

Archive of SID
www.SID.ir

۱- مقدمه

حداقل در ۴ دهه اخیر پیدا نمودن روش‌های مناسب جهت مدل کردن سری‌های زمانی مالی، یکی از حوزه های تحقیقی بسیار فعال از لحاظ آکادمیک و اخیرا نیز از لحاظ کاربردی آن بوده است. دلیل آن نیز نگرانی عمده موسسات مالی از ریسک های بازار و لذا نیاز مبرم آنها به محاسبه دقیق‌تر معیارهای ریسک همچون VaRاست تا بتوانند برنامه‌ریزی های صحیح تری برای مقابله با آن داشته باشند.

جهت ارزیابی ریسک سرمایه، مدیران ریسک می بایست بدانند که تلاطم[1] دربرابر یک شوک[2] یا یک نوسان در بازار در دوره رکود نسبت به دوران رونق اقتصادی چگونه واکنش نشان می‌دهد. البته مخاطبین ما در این جا تنها مدیران ریسک بانک ها، شرکت های بیمه یا موسسات مالی نخواهند بود بلکه دولت‌ها و سیاست گذاران بخش های اقتصادی نیز می بایست با اطلاع کامل از نحوه رفتار بازار در زمان های پرنوسان مانند بحران مالی اخیر بر انبوه مشکلات ناشی از ورشکستگی های بانکی (و به دنبال آن شرکت های دیگر) فائق آیند.

یکی از روش‌هایی که چارچوب مناسبی را جهت مدل نمودن توزیع بازده روزانه دارایی‌ها فراهممی‌آورد، Markov-switching (MS) GARCHاست.(Alexander (2008, p.163 بیان می نماید که "این مدل، اطلاعات زیادی از دینامیک تلاطم بازارهای سرمایه در اختیار ما قرار داده و اجازه می دهد تا رفتار آن را در بازارها با رژیم های مختلف بررسی نماییم."

MS GARCH به دلیل آن که نسبت به مدل های تک رژیمی GARCH، انعطاف پذیری بیشتری دارد در سال‌های اخیر بسیار مورد توجه قرار گرفته است. این مدل با در نظر گرفتن رژیم برای داده ها، اجازهتغییر ناگهانی سطح تلاطم را داده که این خود منجر به بهبود معنی دار واریانس پیش بینی شده خواهد شد(Ardia, 2009).

اولین بار Hamilton (1989)از مدل Markov-switching در مباحث مالی برای تشریح چرخه تجاری آمریکا که به صورت دوره‌ای، وارد رکود و بعد رشد می گشت (و بالعکس) استفاده نمود. سپس(Cai (1994 و Hamilton &susmel (1994)برای اولین بار از آنبرای مدل نمودن تلاطم استفاده کردند که در آن سری زمانی شوک‌های$\{\varepsilon_t\}$ به صورت زیر مدل می شود:

$$\varepsilon_t = \sigma_{\Delta_t,t}\eta_t \qquad (۱-۱)$$

و واریانس شرطی هر رژیم نیز برابر خواهد بود با

$$\sigma_{jt}^2 = \omega_j + \alpha_j\varepsilon_{t-1}^2 + \beta_j\sigma_{\Delta_{t-1},t-1}^2$$
$$\omega_j > 0 \quad \alpha_j, \beta_j \geq 0 \quad j = 1,2,\ldots,k \qquad (۲-1)$$

www.SID.ir
Archive of SID

آن‌ها مدل خود را برروی واریانس رژیم قبلی ($\sigma^2_{\Delta_{t-1},t-1}$) شرطی کردند و مشاهده نمودند که برآورد حداکثر درستنمایی مدل به دلیل وابستگی مسیرها (مسیر تغییر رژیم ها) در رابطه (۱-2)نشدنی است ولذا به جای MS GARCH از MS ARCH استفاده نمودند. برای توضیح بیشتر این مشکل فرض کنید که قصد داریم تابع درستنمایی مدل بالا را محاسبه نماییم. آنگاه با این مساله مواجه خواهیم شد که Δ_{t-1}و درنتیجه $\sigma^2_{\Delta_{t-1},t-1}$ در (۱-2) غیرقابل مشاهده هستند و بنابراین می‌بایست تمام مسیرها را مدنظر قرار دهیم. بدین صورت برای محاسبه واریانس در زمان tنیاز به کل اطلاعات تا زمان tاست و این بدان معناست که برای برآورد درستنمایی به ازای Tمشاهده نیاز به محاسبه k^Tمسیر ممکن خواهد بود که پیاده سازی چنین محاسبه ای غیرعملی است.

برای حل این مشکل Gray (1996)، $\sigma^2_{\Delta_{t-1},t-1}$ را با واریانس شرطی ε_{t-1}جابه‌جا نمود که این واریانس از رابطه زیر قابل محاسبه می بود:

$$\mathrm{Var}(\varepsilon_{t-1}) = \sum_{j=1}^{k} \Pr(\Delta_{t-1} = j)\sigma^2_{j,t-1} \qquad (۳\text{-}1)$$

اما رویکرد سوم در زمینه مدل های MS GARCH را Haas et al (2004)مطرح نمودند که در واقع به عنوان حالت تعمیم یافته ای از مدل تک رژیمی GARCHمی توان به آن نگریست. در این مدل، واریانس شرطی هر رژیم تنها به وقفه یا lagخود وابسته است:

$$\sigma^2_{jt} = \omega_j + \alpha_j\varepsilon^2_{t-1} + \beta_j\sigma^2_{j,t-1}\omega_j > 0 \qquad \alpha_j, \beta_j \geq 0 \qquad (۴\text{-}1)$$

در تمامی مدل های بالا فرض بر نرمال بودن سری زمانی است چرا که براساس قضیه حد مرکزی (Osborn, 1959)، فرض کلاسیک و کلی در مورد توزیع سری های زمانی بازده (r_t)، نرمال بودن آن‌ها است. درحالیکه تحقیقات نشان داده‌اند که توزیع بازده دارای چولگی معناداری می‌باشد (مثلا (Grigoletto&Lisi, 2009)) که چشم پوشی از آن‌ها در محاسبات تاثیرگذار خواهد بود و می‌تواند منجر به پیش بینی‌ها و نتیجه‌گیری‌های نادرست از داده‌ها گردد.. بنابراین آن‌چه که انگیزه انجام این تحقیق را شکل می‌دهد وجود ریسک چولگی در مدل‌های مالی است. ریسک چولگی زمانی رخ خواهد داد که برخلاف توزیع متقارن مفروض برای یک مدل، میانگین و میانه داده‌ها با یکدیگر برابر نباشند.

Timmermann (2000)روشی را برای تولید چولگی در مدل‌های مالی بیان نمود و آن استفاده از میانگین رژیم‌ها در دینامیک سری زمانی به صورت زیر است:

$$\varepsilon_t = \mu_{\Delta_t} + \sigma_{\Delta_t,t}\eta_t \qquad (۵\text{-}1)$$

Archive of SID

www.SID.ir

بنابراین سوالی که در این تحقیق به دنبال پاسخ به آن هستیم این است که آیامدل MS GARCHبا اضافه نمودن میانگین رژیم به دینامیک سری زمانی آن قادر خواهد بود که ضعف مدل-هاینرمال را در توضیح چولگی بازده برطرف سازد؟

۲- مبانی نظری و مروری برپیشینه پژوهش

با توجه به مطالب فوق،جهت تعریف مدل Markov-switching GARCHدر ابتدا فرض می‌کنیم که سری زمانی $\{\varepsilon_t\}$ بدین شکل تولید می‌گردد:

$$\varepsilon_t = \mu_{\Delta_t} + \sigma_{\Delta_t,t}\eta_t \qquad (۱\text{-}2)$$

در رابطه بالا اجزای اخلال $\{\eta_t\}$، iidبوده و دارای توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس یک خواهد بودو$\{\Delta_t\}$نیز یک زنجیره مارکوف با فضای حالات محدود$\{$ S={ 1,2,....k$\}$و ماتریس انتقالتجزیه‌ناپذیر و نامتناوب زیر می‌باشد:

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{k1} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ p_{1k} & \cdots & p_{kk} \end{pmatrix} (۲\text{-}2)$$

که در این ماتریس ، p_{ij}احتمال انتقال از رژیمi به j را نشان می دهد.

$$p_{ij} = \Pr(\Delta_t = j | \Delta_{t-1} = i) \qquad i, j = 1,2,\dots,k \qquad (۳\text{-}2)$$

و توزیع ایستاییزنجیره مارکوف نیز به صورت $\Pi = (\pi_1,\pi_2,\dots,\pi_k)$نمایش داده می‌شود. زنجیره مارکوف $\{\Delta_t\}$ و اجزای اخلال $\{\eta_t\}$ همواره از یکدیگر مستقل می‌باشند.
انحراف استاندارد شرطی رژیم $j(\sigma_{jt})$ نیز از معادله GARCHزیر محاسبه خواهد شد:

$$\sigma_{jt} = \omega_j + \alpha_j(|\varepsilon_{t-1}| - \lambda\varepsilon_{t-1}) + \beta_j\sigma_{j,t-1} \ (۴\text{-}2)$$
$$\text{s.t:} \quad \omega_j > 0 \quad \alpha_j, \beta_j \geq 0 \quad j = 1,2 \quad -1 \leq \lambda \leq 1$$

مدل های کلاسیکGARCHبه دلیل وجود اثر اهرمی[۱]، در توضیح صحیح دم توزیع بازده با مشکل روبرو هستند (Sajjad et al, 2008). اثر اهرمی از مشخصه های اصلی توزیع بازده سهام است و بدان معنا است که شوک های (ε_t) مثبت و منفی با مقادیر عددی یکسان، اثرات نوسانی متفاوتی خواهند داشت. پارامتر λنیز همین اثرات را اعمال می کند، اگر $\lambda > 0$باشد شوک های منفی در دوره بعدی نسبت به شوک های مثبت، تلاطم بالاتری ایجاد می‌کنند و اگر $\lambda < 0$باشد بالعکس.

www.SID.ir

علت استفاده از انحراف استاندارد شرطی به جای واریانس شرطی در مدل GARCH بالا، نتایج تحقیقات انجام شده بر روی مدل AP GARCH((Ding et al (1993)است که پارامتر dرا به عنوان توان به معادله GARCHاضافه نمود:

$$\sigma_t^d = \omega + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i(\,|\varepsilon_{t-i}| - \lambda_i\varepsilon_{t-i})^d \;\; + \sum_{j=1}^{p} \beta_j \sigma_{t-j}^d \qquad d > 0 \qquad (۵-۲)$$

(Brooks et al (2000با برازش مدل AP GARCH[۲]برروی ۱۰ شاخص سهام مختلف نشان دادند که پارامتر dتنها برای یکی از سری های زمانی به طور معناداری متفاوت از یک است درحالی‌که برای۹تای آن ها، d به صورت معناداری متفاوت از ۲ خواهد بود. Giot& Laurent (2003) نیز با به کاربردن مدل AP GARCH برای سه سهم ونیز سه شاخص سهام مختلف دریافتند که dتنها برایکی از سهام ها به طور معنادار متفاوت از مقدار واحد(یک) بدست آمده است و نتیجه گرفتند که " بهجای مدل کردن واریانس شرطی بهتر است از انحراف معیار شرطی استفاده نماییم." مشابه همین نتایج نیز در تحقیقات اخیر (Nieto & Ruiz (2008و(Lejeune (2009بدست آمده است.

استفاده از Markov-switching در مدل نمودن تلاطم نسبت به مدل های تک رژیمی GARCHچندین برتری دارد:

۱) مهمترین ویژگی مدل‌های MSاین است که با در نظر گرفتن رژیم برای داده‌ها امکان لحاظ رفتارهای مختلف برای GARCHدر هر رژیم فراهم کرده و تصویر روشن و واضحی از دینامیک واریانس هر رژیم پیش روی ما قرار خواهد داد.

۲) این مدل‌ها، چگالی پیش بینی شده دقیق‌تری را به ما می دهند.

۳) مدل های MS GARCHبرخلاف مدل های تک رژیمی، نیازی به تعیین یک توزیع دم-سنگین برای اجزای اخلال (η_t) ندارند و این بدلیل وجود منبع کشیدگی در مدل های Regime-switching یعنی اثرات mixtureاست (Haas, 2010).بدین ترتیب توزیع نرمال هم در این مدل‌ها می تواند کشیدگی را توضیح دهد که این امر به راحتی محاسبات کمک خواهد نمود.

یک دسته از مدل‌های MS GARCH، فرآیندهای Mixture GARCH می‌باشند که توسط Haas (2004)بیان شده است. در این مدل‌ها فرض می‌گردد که ماتریس انتقال دارای مرتبه واحد می‌باشد. این فرآیندها را برای ، هر دو حالت با میانگین مولفه‌ای[۱] صفر و هم غیر صفر در نظر خواهیم گرفت. منظور از میانگین مولفه‌ای همان میانگین رژیمی یا μ_jاست. این دسته مدل‌ها را در ادامهبه اختصار باMixنشان می‌دهیم. در ضمن، جهت تمییز دادن مدل‌های متقارن(Mixture(Mixاز مدل‌های

www.SID.ir

نامتقارن خود، آن‌ها را با زیرنویس s و به صورت Mix_s مشخص خواهیم نمود. مدل‌هایی که ماتریس انتقال غیر واحد دارند را نیز با Markov نشان خواهیم داد.

شکل خاص دیگر مدل‌های MS GARCH، حالتی است که در آن تنها عرض از مبدا رابطه GARCH یعنی ω_j تغییر می‌کند و بقیه پارامترهای GARCH بین دو رژیم برابر می‌ماند. این دسته مدل‌ها را با بالانویس icept در مدل‌ها مشخص نموده‌ایم به عنوان

مثال mix_s^{icept} بیانگر مدل Mix GARCH با $\mu_1 = \mu_2 = 0$ و محدودیت‌های $\omega_1 \neq \omega_2, \alpha_1 = \alpha_2, \beta_1 = \beta_2$ است. در جدول ۱،مدل‌های MS GARCH به همراه پارامترهای خود به طور خلاصه نمایش داده شده‌اند.

جدول ۱:مشخصات مدل‌های Markov-switching GARCH

مدل‌ها	زنجیره مارکوف	محدودیت‌ها GARCH	چگالی شرطی
Markov	-	-	$\mu_1 = \mu_2 = 0$
$Markov^{icept}$	-	$\alpha_1 = \alpha_2$, $\beta_1 = \beta_2$	$\mu_1 = \mu_2 = 0$
Mix_s	$p_{11} = 1 - p_{22}$	-	$\mu_1 = \mu_2 = 0$
	$p_{11} = 1 - p_{22}$	$\alpha_1 = \alpha_2$, $\beta_1 = \beta_2$	$\mu_1 = \mu_2 = 0$
Mix	$p_{11} = 1 - p_{22}$	-	$\pi_1\mu_1 + \pi_2\mu_2 = 0$
Mix^{icept}	$p_{11} = 1 - p_{22}$	$\alpha_1 = \alpha_2$, $\beta_1 = \beta_2$	$\pi_1\mu_1 + \pi_2\mu_2 = 0$

جهت مقایسه مدل‌های چند رژیمی با مدل‌های متداول تک رژیمی نیز مدل GARCH(1,1) را به تحقیق خود افزوده‌ایم.

نکته بعدی در ارتباط با انتخاب تعداد رژیم می‌باشد چرا که یکی از مقولاتی که در مسایل Regime-switching همچنان حل نشده باقی مانده است، مشخص نمودن تعداد رژیم ها یا به عبارتی انتخاب k است. معمولا در داده های مالی جهت کاهش محاسبات، k=2 درنظر می‌گیرند. به ویژه این که در مدل ها با $k > 2$، پارامترهای حداقل یکی از رژیم ها با خطای برآورد خیلی بزرگ، تخمین زده‌می‌شود(Alexander &Lazar,2006) با توجه به دلایل مذکور، در اینجا نیز مدل های MS را با k=2 در نظر خواهیم گرفت.

توزیع ایستایی زنجیره مارکوف نیز برابر خواهد بود با:

$$\pi_1 = \frac{1 - p_{22}}{2 - p_{11} - p_{22}} \quad (۶\text{-}۲)$$

$$\pi_2 = 1 - \pi_1 \quad (۷\text{-}۲)$$

اعمال نماییم: MS صفر شود می‌بایست محدودیت زیر را نیز در مدل ε_t و برای اینکه میانگین

www.SID.ir

$$\pi_1\mu_1 + \pi_2\mu_2 = 0 \quad (۸-۲)$$

نکته دیگر این است که در تمامی مدل‌ها، سری زمانی بازده به شکل زیر تعریف می‌گردد:

$r_t = \mu + \varepsilon_t$(۹-۲)

μمیانگین ثابت بوده و ε_tنیز توسط یکی از مدل‌های این تحقیقتوضیح داده می‌شود.

۳- روش شناسی پژوهش

این تحقیق یک تحقیق بنیادی است و از لحاظ روش جمع‌آوری داده‌ها نیز از نوع پیمایشی و به روش مقطعی می‌باشد.

این تحقیق برروی شاخص کل قیمت بورس اوراق بهادار تهران (Tepix) بین سال های ۱۳۸۰ تا ۱۳۹۰ انجام می‌گیرد و مجموعا ۲۴۸۰مشاهده را دربرخواهد گرفت. شاخص Tepixنشانگر روند تغییرات قیمت کل شرکت‌های پذیرفته شده در بورس تهران است.

برای رسیدن به یک سری زمانی مانا به جای استفاده از سطح شاخص از بازده آن استفاده می‌نماییم:

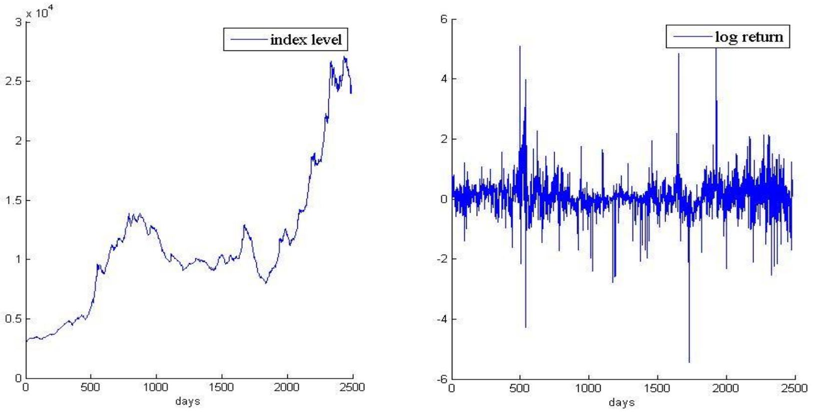
$r_t = 100 \times \log\left({}^{I_t}/_{I_{t-1}}\right)$ (1-3)

I_tسطح شاخص را در زمان tنشان می‌دهد و r_tنیز logبازده به درصد است.

مانایی یا نامانایی دو سری زمانی را می‌توان به وضوح در شکل۱مشاهده نمود. شکل سمت چپ، نمودار شاخص کل قیمت‌ها است و همانگونه که مشخص می‌باشد، میانگین و واریانس آن در طول زمان در حال تغییر است اما شکل سمت راستکه نمودار بازده قرار دارد یک سری زمانی مانا را نشان می‌دهد.

Archive of SID

www.SID.ir



شکل ۱: نمودار شاخص Tepix (سمت چپ) و بازده آن (سمت راست) بین سال‌های ۱۳۸۰ تا ۱۳۹۰

در جدول ۲ گشتاورهای مختلف کل داده‌ها قرار داده شده است. همان گونه که مشخص است میانگین بازده شاخص Tepixنزدیک به صفر بوده و توزیع آن نیز دارای چولگی و کشیدگی معنادار می‌باشد. p-value آزمون Jarque-Beraتقریبا برابر صفر است و بنابراین فرض صفر آزمون (H_0: توزیع داده‌ها، نرمال است) رد می‌گردد.

جدول ۲: گشتاورهای مختلف سری زمانی بازده

گشتاورها	
میانگین	۰.۰۸۲
انحراف استاندارد	۰.۵۹۱
چولگی	۰.۳۲۳ (0.00)
کشیدگی	۱۶.۱۰ (0.00)
Jarque-Bera	17783.5 (0.00)

عداد داخل پرانتز مقادیر p-value می‌باشند

۴- مدل پژوهش و نحوه آزمون آن

در ابتدا با استفاده از ۱۲۴۰ مشاهده اول، پارامترهای هر مدل را تخمین زده و سپس آن‌ها را به ازای۱۲۴۰ مشاهده آخر برای هر ماه (۲۰ روز کاری)، به روز می نماییم یعنی داده‌های ۱ تا ۱۲۴۰ را درنظرگرفته، تابع log درستنمایی نمونه را محاسبه و به روش حداکثر درستنمایی

Archive of SID
www.SID.ir

پارامترها را برآورد می‌نماییم، سپس با استفاده از این نتایج برای روزهای ۱۲۴۱ تا ۱۲۶۰ پیش‌بینی می‌کنیم. در مرحله بعدی داده‌های ۲۱ تا ۱۲۶۰ را درنظر گرفته و به ازای روزهای ۱۲۶۱ تا ۱۲۸۰ پیش‌بینی کرده و این عمل را تا انتها تکرار می‌نماییم. در نهایت بدین ترتیب ۱۲۴۰ چگالی پیش-بینی شده و در نتیجه ۱۲۴۰ روز انحراف معیار پیش‌بینی شده خواهیم داشت. اصطلاحا در ادبیات به مشاهداتی که برپایه آن‌ها، پارامترها را تخمین می‌زنیم پیش نمونه و به پیش‌بینی‌ها(روزهایی که به ازای آن‌ها پیش‌بینی انجام می‌دهیم)، نتایج خارج از نمونه[1] می‌گویند.

۴-۱- محاسبه تابع درست‌نمایی و برآورد پارامترها

در زمان t، بردار تصادفی $z_t = (z_{1t}, z_{2t}, \ldots, z_{kt})'$را در نظر بگیرید که هر مولفه آن به صورت زیر تعریفمی‌گردد:

$$z_{jt} = \begin{cases} 1 & \Delta_t = j \\ 0 & \Delta_t \neq j \end{cases} \quad j = \{1,2,\ldots,k\} \quad (۲\text{-}3)$$

و فرض کنید$\underline{\varepsilon}_\tau$ $\{\varepsilon_\tau, \varepsilon_{\tau-1}, \ldots\}$ =فرآیند مارکوف تا زمان τ، $z_{jt|\tau} = \Pr(z_{jt}=1 \mid \underline{\varepsilon}_\tau)$ نیز احتمال بودن در رژیم jدر لحظهtبراساس فرآیند تا زمان τو $z_{t|\tau} = (z_{1t|\tau}, \ldots, z_{kt|\tau})$باشد.

$$z_{t|t} = \frac{z_{t|t-1} \odot f_t}{l_k' (z_{t|t-1} \odot f_t)} \quad (۳\text{-}3)$$

$$z_{t+1|t} = P z_{t|t} \quad (۴\text{-}3)$$

Pماتریس انتقال، l_k' ماتریس سطری kبعدی با درایه های یک، $\odot$ضرب عنصر به عنصر یا ضرب Hadamardاست و تابع چگالی نیز به فرم ماتریسی زیر می باشد:

$$f_t = \begin{pmatrix} f(\varepsilon_t \mid z_{1t} = 1, \underline{\varepsilon}_{t-1}; \Omega) \\ \vdots \\ f(\varepsilon_t \mid z_{kt} = 1, \underline{\varepsilon}_{t-1}; \Omega) \end{pmatrix} \quad (۵\text{-}3)$$

$f(\varepsilon_t \mid z_{jt} = 1, \underline{\varepsilon}_{t-1}; \Omega)$ تابع چگالی شرطی بازده، براساس اطلاعات تا زمان t-1($\underline{\varepsilon}_{t-1}$) می‌باشدو هنگامی که فرآیند در رژیم j است$z_{jt} = 1$خواهد بود. بردار Ωنیز شامل میانگین و واریانس شرطی و پارامترهای توزیع شرطی است. برای مقداردهی اولیه به روابط بازگشتی(۳-۳) و (۳-۴)، از توزیع ایستایی زنجیره مارکوف استفاده می‌گردد. پرواضح است که انتخاب این مقادیر اولیه، برروی نتایج حاصل از پیش بینی های سری های بزرگ مانند سری های زمانی مالی، ناچیز خواهد بود. چگالی پیش بینی شرطی[1] ε_{t+1}نیز براساس فرآیند تا زمان t، از رابطه زیر محاسبه می‌گردد:

Archive of SID

www.SID.ir

$$f(\varepsilon_{t+1}|\underline{\varepsilon}_t) = \sum_{j=1}^{k} z_{j,t+1|t} f(\varepsilon_{t+1} \mid z_{jt} = 1, \underline{\varepsilon}_t ; \Omega)$$
$$= l_k'(z_{t+1|t} \odot f_{t+1}) \quad (۶\text{-}3)$$

و درنهایت تابع logدرستنمایی(LLF)[2] برای اندازه نمونه T، برابر خواهد بود با

$$\log L = \sum_{t=1}^{T} \log f(\varepsilon_t|\underline{\varepsilon}_{t-1}) = \sum_{t=1}^{T} \log[l_k'(z_{t|t-1} \odot f_t)] \quad (۷\text{-}3)$$

نکته مهمی که می‌باست به آن اشاره نمود این است که اگر مرتبه ماتریس انتقال، واحد باشد دیگر نیازی به محاسبات بازگشتی (۳-۳) و (۳-۴) برای تعیین اوزان توابع نمی‌باشد چرا که این اوزان برابر توزیع ایستای زنجیره مارکوف خواهند بود.

۴-۲- محاسبه ارزش در معرض خطر

ارزش در معرض خطر[1] (VaR) معیاری است جهت اندازه گیری ریسک بازار. ریسک بازار، ریسک ناشی از تغییر قیمت یک دارایی در اثر شرایط بازار همچون تغییر نرخ بهره، تغییر نرخ تبادل ارز و .... است که با متنوع سازی نیز قابل حذف شدن نمی باشد و تنها

با استفاده از پوشش ریسک می‌توان از شدت آن کاست. به طور کلی VaR، حداکثر ضرر یک موضع معاملاتی یا پرتفولیو را در یک سطح اطمینان معین و در افق زمانی مشخص، نشان می دهد.

فرض کنید در زمان t، بردار $\sigma_{t+1} = [\sigma_{1,t+1}, \sigma_{2,t+1}, \dots, \sigma_{k,t+1}]$ را پیش بینی کرده ایم وحال قصد داریم ارزش در معرض خطر بازده را محاسبه نماییم.

با توجه به رابطه(۳-۶)، تابع چگالی شرطی بازده به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f(r_{t+1}|\underline{r}_t) = \sum_{j=1}^{k} z_{j,t+1} f(r_t \mid z_{jt} = 1, \underline{r}_t ; \Omega) \quad (۸\text{-}3)$$

و بنابراین تابع توزیع تجمعی(cdf)، براساس اطلاعات تا زمان tبرابر است با:

$$F(r_{t+1}|\underline{r}_t) = \sum_{j=1}^{k} z_{j,t+1} F(r_t \mid z_{jt} = 1, \underline{r}_t ; \Omega) \quad (۹\text{-}3)$$

درنهایت VaRمدل Markov-switching در سطح αاز رابطه زیر محاسبه می‌گردد:

$$F(\mathrm{VaR}_{t+1}(\alpha)) = \sum_{j=1}^{k} z_{j,t+1} F(\mathrm{VaR}_{t+1}(\alpha) \mid z_{jt} = 1, \underline{r}_t ; \Omega) - \alpha = 0 \quad (۱۰\text{-}3)$$

Archive of SID
www.SID.ir

از آن جایی که عبارت بالا یک عبارت بسته[2] نمی‌باشد، می‌بایست VaRرا با عدد دادنتخمین زد. لازم به یادآوری است که در بالا، $z_{j,t+1}$از روابط (۳-۳) و (۳-۴)،و درصورتی که مدل mixtureباشد از روابط (۲-۶) و (۲-۷) محاسبه می گردد.
ارزش در معرض خطر مدل تک رژیمی GARCH نیز از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\mathrm{VaR}_{t+1}(\alpha) = \mu + \sigma_{t+1}\Phi^{-1}(\alpha) \quad (11\text{-}3)$$

Φ^{-1} تابع معکوس نرمال استاندارد و μ میانگین بازده در رابطه (۲-۹) می‌باشد.

۴-۳- ارزیابی عملکرد نتایج خارج از نمونه مدل‌ها

در مرحله آخرجهت آزمایش درستی برآوردهای مدل‌ها، مقادیر پیش‌بینی شده توسط هر کدام از آن‌ها را با مقادیر واقعی مشاهده شده مقایسه می‌نماییم که این عمل را اصطلاحا آزمون برگشت[1] می‌نامند.

به طور معمول جهت انجام آزمون برگشت از آزمون نسبت درستنمایی[2] یا کوپیک (Kupiec, 1995) استفاده می‌شود. البته در این زمینه، آزمون‌های دیگری نیز وجود دارند اما تست کوپیک ما را به هدفمان که بررسی توانایی مدل MS GARCHدر لحاظ چولگی توزیع بازده است خواهد رساند. این آزمون را هم در موضع فروش برای تمامی مدل‌ها به ازای چهار سطح مختلف VaRα={0.995,0.99,0.975,0.95} و هم در موضع خرید به ازای سطوح VaRα={0.005,0.01,0.025,0.05} انجام می‌دهیم.

آزمون کوپیک در موضع فروش بدین شکل انجام می‌گردد که ابتدا تعداد کل خطای پیش-بینی(x) مدلرا محاسبه می‌نماییم:

$$I_{t+1} = \begin{cases} 1 & r_{t+1} > \mathrm{VaR}_{t+1}(\alpha) \\ 0 & r_{t+1} \le \mathrm{VaR}_{t+1}(\alpha) \end{cases} \quad (12\text{-}3)$$

$$x = \sum_{t=0}^{N-1} I_{t+1} \quad (13\text{-}3)$$

که در رابطه بالا $\mathrm{VaR}_{t+1}(\alpha)$، ارزش در معرض خطر در سطح اطمینان αدر زمان t+1بر اساس اطلاعات موجود تا زمانt(Ψ_t)می‌باشد:

$$\hat{F}(\mathrm{VaR}_{t+1}(\alpha)|\Psi_t) = \alpha \quad (14\text{-}3)$$

حال، نسبت خطاهای رخ داده[1]به ازای اندازه نمونه N(N = 1240) قابل محاسبه خواهد بود:

$$\hat{\alpha} = \frac{x}{N} \quad (15\text{-}3)$$

Archive of SID
www.SID.ir

فرض صفر این است که نسبت خطاهای پیش‌بینی رخ داده ($\hat{\alpha}$) با مقدار مورد نظر ما یعنی αتفاوت معنی‌داری ندارد (H_0: دلیلی بر رد مدل وجود ندارد). جهت آزمون فرض صفر نیز از آماره زیر استفادهمی‌نماییم:

$$LR(\alpha) = -2\left(x\log\left(\frac{\alpha}{\hat{\alpha}}\right) + (N-x)\log\left[\frac{(1-\alpha)}{(1-\hat{\alpha})}\right]\right) \sim \chi^2_{(1)} \quad (۱۶\text{-}3)$$

آزمون کوپیک برای موضع خرید نیز مشابه با بالا انجام می‌گردد با این تفاوت که خطا زمانی رخ می‌دهد که $r_{t+1} < VaR_{t+1}(\alpha)$.

در نهایت نیز جهت مقایسه کارایی مدل‌ها از معیار متوسط قدرمطلق درصد خطا[1] (MAPE) استفاده خواهیم نمود:

$$MAPE = {}^{1}/_{8}\left(\sum_{i=1}^{4}\left|\frac{\hat{\alpha}_i - \alpha_i}{\alpha_i}\right|_{short} + \sum_{i=1}^{4}\left|\frac{\hat{\alpha}_i - \alpha_i}{\alpha_i}\right|_{long}\right) \quad (۱۷\text{-}3)$$

این معیار میانگین مجموع فواصل هر مدل را از مقادیر هدف اندازه‌گیری می‌نماید. مقدار هدف، تعداد خطایی است که ما در مدل VaRخود با توجه به سطح مورد نظر می‌پذیریم که برابر است با N(1-α). به عنوان نمونه مقدار هدف برای VaR 95%برابر خواهد بود با ۶۲. این بدان معناست که مدلی برای ما ایده‌آل تر است که تعداد خطای آن به ۶۲ نزدیک‌تر باشد و هر چه تعداد خطای پیش‌بینی مدل از این مقدار کمتر یا بیشتر گردد عملکرد مدل ضعیف‌تر خواهد بود.

۴- نتایج پژوهش

کلیه نتایج در جداول ۳ و ۴ خلاصه شده اند. با توجه به مقادیر p-value حاصل از آزمون کوپیک که در جدول ۳مشاهده می‌نماییم مدل‌های MS GARCH نسبت به مدل تک رژیمی GARCH وضعیت بهتری دارند چرا که مقدار p-value دو سطح مختلف VaR مدل تک‌رژیمی تقریبا برابر با صفر بدست آمده است که ضعف این مدل را در پیش‌بینی صحیح مقادیر تلاطم بازده می‌رساند. عملکرد بهتر مدل‌های MSGARCH نسبت به مدل متداول تک رژیمی GARCH(1,1) به توانایی این دسته فرآیندها در لحاظ کشیدگی سری‌های زمانی مالی بدون نیاز به استفاده از توزیع‌های کشیده برخواهد گشت واین درحالی است که مدل تک رژیمی GARCH تنها زمانی می‌تواند کشیدگی تولید کنند که تابع چگالی آن‌ها کشیده باشد.

براساس معیار MAPEنیز که میانگین خطای پیش‌بینی را نشان داده و بنابراین امکان مقایسه مدل‌ها را فراهم می‌نماید، مدل نامتقارن Mix^{icept}بهترین عملکرد را در بین تمامی مدل‌ها دارد که

Archive of SID
www.SID.ir

دلیل این مساله نیز آن است که این مدل علاوه بر منبع تولید کشیدگی، منبع تولید چولگی نیز دارد (این منبع همان میانگین رژیم در دینامیک مدل است) و لذا همزمان می‌تواند هم کشیدگی و هم چولگی سری زمانی را لحاظ نماید.

جدول ۳: مقادیر p-value آزمون کوپیک به ازای سطوح مختلف VaR

	short position				long position			
VaR level	99.5%	99%	97.5%	95%	0.5%	1%	2.5%	5%
Markov	0.935	0.093	0.856	0.033	0.291	0.655	0.219	0.307
$Markov^{icept}$	0.935	0.179	0.476	0.024	0.291	0.473	0.289	0.441
Mix_s	0.752	0.093	0.591	0.013	0.291	0.325	0.117	0.163
	0.935	0.308	0.476	0.013	0.291	0.473	0.219	0.203
Mix	0.752	0.179	0.039	0.001	0.291	0.478	0.289	0.370
Mix^{icept}	0.752	0.478	0.117	0.003	0.488	0.909	0.476	0.520
GARCH (1,1)	0.082	0.214	1.000	0.509	0.000	0.000	0.289	0.020

جدول4: تعداد خطاهای پیش‌بینی هرکدام از مدل‌ها در سطوح مختلف VaR

	short position				long position				
VaR level	99.5 %	99%	97.5%	95%	0.5 %	1%	2.5 %	5%	
target	6.2	12.4	31	62	6.2	12.4	31	62	MAPE
Markov	6	7	32	79	9	14	38	70	0.214
Markovicept	6	8	35	80	9	15	37	68	0.220
Mixs	7	7	34	82	9	16	40	73	0.274
M	6	9	35	82	9	15	38	72	0.223
Mix	7	8	43	90	9	10	37	69	0.284
Mixicept	7	10	40	86	8	12	35	67	0.192
GARCH	11	17	31	57	23	29	37	45	0.718

هدف (target)، تعداد خطایی است که در مدل VaR قصد داریم بپذیریم و برابر است با $N(1-\alpha)$ که N=1240 تعداد روزهایی است که پیش‌بینی کرده‌ایم و α نیز سطح اطمینان مدل VaR می‌باشد. هر چه تعداد خطاهای پیش‌بینی یک مدل به مقدار هدف نزدیک‌تر باشد، MAPE آن کمتر شده و عملکرد مدل بهتر خواهد شد اما هر چه تعداد خطاهای مدل از مقدار هدف کمتر یا بیش‌تر گردد، MAPE آن بیشتر شده و عملکرد مدل ضعیف‌تر خواهد شد.

Archive of SID

www.SID.ir

۵- نتیجه‌گیری و بحث

همان‌طور که می‌دانیم یکی از مهمترین روش‌های محاسبه تلاطم، به‌کارگیری مدل‌های خانواده GARCH است که ما این مدل‌ها را با استفاده از روش‌های regime-switching به گونه‌ای بسط دادیم که قادر باشند چولگی سری‌های زمانی مالی را لحاظ نمایند. سپس تلاطم‌های حاصل از مدل‌ها را در پیش‌بینی معیار VaRبرای موقعیت‌های خرید و فروش به کار بردیم.

نتایج آزمون‌های انجام شده نشان می‌دهد که مدل Mix^{icept}بهترین عملکرد را در بین تمامی مدل‌ها دارد و بنابراین پاسخ سوالی که انگیزه انجام این تحقیق را شکل داد، بلی است و اضافه نمودن میانگین رژیم به دینامیک سری زمانی مالیدر مدل MS GARCH، آنراقادر خواهد ساختتا ضعف توزیعنرمال را در توضیح چولگی بازده برطرف سازد.

مدل‌های MS GARCHبه دلیل برتری‌هایی که نسبت به مدل‌های تک‌رژیمی دارا می‌باشند همچون انعطاف‌پذیری بالا، امکان لحاظ رفتارهای مختلف برای GARCH در هر رژیم، چگالی پیش‌بینی دقیق‌تر و عدم نیاز به توزیع‌های دم‌سنگین جهت تولید کشیدگی، هم از لحاظ آکادمیک و هم از جنبه عملی،کاربرد خواهد داشت.

از جنبه عملی و کاربردی، نتایج حاصل از این تحقیق را می‌توان در بخش مدیریت ریسک بانک‌ها، شرکت‌های بیمه، موسسات مالی و سرمایه‌گذاری جهت محاسبه معیارهای مختلف ریسک همچون ارزش در معرض خطر و نیز بررسی دینامیک بازار سرمایه به کار گرفت. از جنبه آکادمیک نیز برای تحقیقات آتی پیشنهاد می‌شوداز مدل Mix^{icept}جهت تعیین قیمت منصفانه ابزارهای مشتقه استفاده گردد. به طور مثال همان طور که می‌دانیم در محاسبه قیمت اختیار معامله با استفاده از فرمول بلک-شولز نیاز به ۵ پارامتر مختلف داریم که از بین آن‌ها واریانس از اهمیت ویژه ای برخوردار است چرا که تنها پارامتری است که غیرقابل مشاهده می باشد. قیمت معامله، قیمت جاری سهم، زمان باقیمانده تا سررسید و نرخ بهره، همگی به آسانی و از طریق بازار قابل تعیین هستند و تنها واریانس است که می بایست پیش بینی گردد.همین طور می‌توان از مدل مذکور جهت محاسبه نسبت پوشش ریسک قراردادهای آتی استفاده نمود.

فهرست منابع

* Alexander, C. (2008): Practical Financial Econometrics. Chichester: JohnWiley& Sons.
* Ardia, D. (2009): "Bayesian Estimation of a Markov-Switching Threshold Asymmetric GARCH Model with Student-t Innovations," Econometrics Journal,12, 105–126.

www.SID.ir

* Brooks, R. D., Faff, R. W., McKenzie, M. D., and Mitchell, H. (2000): "A Multi-Country Study of Power ARCH Models and National Stock Market Returns," Journal of International Money and Finance, 19, 377–397.
* Cai, J. (1994): "A Markov Model of Switching–Regime ARCH," Journal of Business and Economic Statistics, 12, 309–316.
* Ding, Z., Granger, C. W. J., and Engle, R. F. (1993): "A Long Memory Property of Stock Market Returns and a New Model," Journal of Empirical Finance, 1, 83–106.
* Giot, P. and Laurent, S. (2003): "Value–at–Risk for Long and Short Trading Positions," Journal of Applied Econometrics, 18, 641–664.
* Gray, S. F. (1996): "Modeling the Conditional Distribution of Interest Rates as a Regime–Switching Process," Journal of Financial Economics, 42, 27–62.
* Grigoletto, M. and Lisi, F. (2009): "Looking for Skewness in Financial Time Series," Econometrics Journal, 12, 310–323.
* Haas, M. (2010): "Skew-Normal Mixture and Markov-Switching GARCH Processes," Studies in Nonlinear Dynamics and Econometrics, 14.
* Haas, M., Mittnik, S., and Paolella, M. S. (2004): "A New Approach to Markov–Switching GARCH Models," Journal of Financial Econometrics, 2, 493–530.
* Hamilton, J. D. (1989): "A New Approach to the Economic Analysis of Nonstationary Time Series and the Business Cycle," Econometrica,57, 357-384.
* Hamilton, J. D. and Susmel, R. (1994): "Autoregressive Conditional Heteroskedasticity and Changes in Regime," Journal of Econometrics, 64, 307–333.
* Lejeune, B. (2009): "A Diagnostic M-Test for Distributional Specification of Parametric Conditional Heteroscedasticity Models for Financial Data," Journal ofEmpirical Finance, 16, 507–523.
* Nieto, M. R. and Ruiz, E. (2008): "Measuring Financial Risk: Comparison of Alternative Procedures to Estimate VaR and ES," Statistics and Econometrics Working Paper 08-73, Department of Economics, Universidad Carlos III de Madrid.
* Osborne, M. F. M. (1959): "Brownian Motion in the Stock Market," Operations Research, 7, 145–173.
* Sajjad, R., Coakley, J., and Nankervis, J. C. (2008): "Markov–Switching GARCH Modelling of Value–at–Risk," Studies in Nonlinear Dynamics and Econometrics,12, Article 7.
* Timmermann, A. (2000): "Moments of Markov Switching Models. Journal of Econometrics, 96, 75–111

Archive of SID

www.SID.ir