مجله مهندسی مالی و مدیریت اوراق بهادار
شماره بیست و یکم / زمستان ۱۳۹۳

مدل‌سازی و ارائه‌ی راه‌حل بهینه برای بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری چند دوره‌ای با الگوریتم ژنتیک

امیرعباس نجفی[۱]
سیامک موشخیان[۲]

تاریخ دریافت: ۹۲/۰/۰۰ تاریخ پذیرش: ۹۲/۰/۰۰

چکیده

یکی از جذابترین حوزه‌های تصمیم‌گیری در شرایط عدم اطمینان بهینه‌سازی مالی است. مسئله انتخاب سبد سرمایه‌گذاری تک دوره‌ای از مسائل کلاسیک حوزه مالی می‌باشد اما این مدل بر پایه سه فرض محدودکننده بنا شده بود: اول، افق سرمایه‌گذاری کوتاه مدت است. دوم، هزینه معاملات در بازار در نظر گرفته نشده است. سوم، پارامترهای مسئله به صورت قطعی و از قبل معلوم هستند. در این تحقیق به دنبال ارائه و حل مدلی هستیم تا بتواند بر محدودیت های بیان شده غلبه کند و ما را به دنیای واقعی نزدیک‌تر کند. از این رو در ادامه مدلی تحت عنوان مدل بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری چند دوره‌ای احتمالی میانگین-نیم‌واریانس-ارزش در معرض خطر شرطی با در نظر گرفتن هزینه معاملات را ارائه و پس از مدلسازی آن، اقدام به حل آن با استفاده از الگوریتم ژنتیک می کنیم. در این پژوهش برای حل مدل از داده‌های ۲۴ سهام از سهام شرکت بورس اوراق بهادار تهران از دی ماه ۱۳۸۷ تا مرداد ۱۳۹۲ به عنوان ورودی‌های مدل بهره می بریم. نتایج نشان داده است که این الگوریتم برای حل این دسته از مسائل مناسب و از کارایی لازم برخوردار می‌باشد.

واژه‌های کلیدی: سبد سرمایه‌گذاری چند دوره‌ای احتمالی، میانگین-نیم‌واریانس-ارزش در معرض خطر شرطی، درخت سناریو، هزینه معاملات، الگوریتم ژنتیک.

۱- استادیار گروه مهندسی صنایع، دانشکده مهندسی صنایع، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
۲- دانشجوی کارشناسی ارشدمهندسی مالی، دانشکده مهندسی صنایع، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
aanajafi@kntu.ac.ir

۱- مقدمه

در مسئله‌ی پرتفوی تک دوره‌ای، فرض می‌شود که سرمایه‌گذار تصمیم به تخصیص دارایی‌ها برای یک‌بار و برای N دارایی موجود، در ابتدای دوره‌ی موردنظر (مثلا یک فصل یا یک سال) و براساس ریسک و روابط موجود بین بازده، در طی آن افق سرمایه‌گذاری می‌گیرد. تصمیم‌گیری فقط یک‌بار انجام می‌شود و اجازه‌ی بازنگری تا انتهای دوره وجود ندارد و اثر تصمیمات بر دوره‌های بعدی مورد توجه قرار نمی‌گیرد. علاوه بر این، این مدل بر پایه سه فرض محدودکننده بنا شده بود: اول، افق سرمایه‌گذاری کوتاه مدت است. دوم، هزینه معاملات در بازار در نظر گرفته نشده است. سوم، پارامترهای مسئله به صورت قطعی و از قبل معلوم هستند.

در حالی که مسائل پرتفوی چند دوره‌ای کلی‌تر هستند به طوری که سرمایه‌گذار یک رشته تصمیم‌گیری انجام می‌دهد که هر تصمیم بر روی تصمیمات بعدی اثرگذار است. هدف پیدا کردن تصمیم‌گیری برای تخصیص در هر دوره با در نظر گرفتن یک مجموعه از فرصت‌های تغییر در آینده (در دسترس بودن دارایی‌ها و ویژگی‌های ریسک و بازده‌ی آن‌ها)، افق سرمایه‌گذاری باقی‌مانده، هزینه‌های معاملات نهایی و دیگر محدودیت‌ها است.

این موضوع کاربردهای مالی زیادی دارد که از آن جمله می‌توان به مدیریت دارایی-بدهی، پیگیری شاخص، مدیریت سرمایه‌گذاری، صندوق‌های سرمایه‌گذاری سازمانی اشاره کرد..

با توجه به اهمیت این موضوع، مقالات بسیاری به معرفی و بررسی این موضوع پرداخته‌اند، با این وجود به دلیل عدم دسترسی کافی به مراجع فارسی و داده های تجربی، مطالعات عملی کمی در این زمینه به خصوص در داخل کشور صورت گرفته است و همین موضوع، انگیزه اصلی ما برای انجام این تحقیق بوده است.

در این تحقیق به دنبال ارائه و حل مدلی هستیم تا بتواند بر محدودیت های بیان شده برای مدل تک دوره‌ای غلبه کند و ما را به دنیای واقعی نزدیک‌تر کند. از این رو در ادامه مدلی تحت عنوان مدل بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری چند دوره‌ای احتمالی میانگین-نیم‌واریانس-ارزش در معرض خطر شرطی با در نظر گرفتن هزینه معاملات را ارائه می کنیم و پس از مدلسازی آن، از الگوریتم ژنتیک برای حل آن بهره می بریم.

بر این اساس بخش ۱ ادبیات مربوط به سبد سرمایه‌گذاری چند دوره‌ای مرور می نماییم. بیان مسئله، مدلسازی و روش حل در بخش ۲ تشریح می‌گردد. بخش ۳ به اجرا و تجزیه و تحلیل مدل می‌پردازد. در نهایت در بخش پایانی به ارائه یاقته‌های تحقیق می‌پردازد.

۲- مبانی نظری مروری بر پیشینه پژوهش

به منظور درک بهتری از مرور ادبیات، آن را به بخش‌های زیر تقسیم بندی کرده ایم:

۲-۱- سبد سرمایه‌گذاری تک دوره‌ای

مسئله انتخاب سبد سرمایه‌گذاری یکی از مسائل کلاسیک دنیای مالی است که اولین بار توسط مارکویتز (۱۹۵۹) مطرح گردید وشامل دو جز اصلی و جدایی‌ناپذیر بازده و ریسک است. هدف اصلی این مسئله بیشینه کردن بازده مورد انتظار در سطح مشخصی از ریسک و یا کمینه کردن ریسک مورد انتظار در سطح مشخصی از بازده است. مدل مارکویتز پایه و بنیاد مدل انتخاب سبد سرمایه‌گذاری تک دوره‌ای را بنا نهاد. بعد از ارائه مدل میانگین-واریانس، توسعه‌های زیادی بر روی این مدل انجام شد. ژیا و همکارانش (۲۰۰۰)، گیوو (۲۰۰۶)، گوپتا و همکارانش (۲۰۰۸) و یو و لی (۲۰۱۱).

۲-۲- سبد سرمایه‌گذاری چند دوره‌ای

در دنیای واقعی، یک سرمایه‌گذار این امکان را دارد که در هر دوره‌ی زمانی سبد سرمایه‌گذاری خود را مورد بازنگری قرار دهد، به همین دلیل معمولا استراتژی های مدیریت سبد سرمایه‌گذاری به صورت چند دوره‌ای در نظر گرفته می‌شوند. سرمایه‌گذار با بازنگری سبد سرمایه‌گذاری خود متحمل هزینه‌ی معاملات خواهد شد. برای نزدیک شدن مسئله به دنیای واقعیت، هزینه معاملات – که یکی از نگرانی‌های اصلی مدیران سبدهای سرمایه‌گذاری است – باید در فرضیات مسئله نظر گرفته شوند.

مسائل چند دوره‌ای حالت کلی‌تری از مسائل تک دوره‌ای هستند به طوری که سرمایه‌گذار یک رشته تصمیمات اتخاذ می‌کند که هر تصمیم بر روی تصمیمات آینده اثرگذار خواهند بود و هدف بهینه کردن تخصیص دارایی در هر دوره‌ی زمانی است به گونه‌ای که امید مطلوبیت ثروت در آخرین دوره‌ی زمانی بیشینه شود. این گونه مسائل کاربردهای زیادی در دنیای واقعیت دارند، از جمله مدیریت دارایی و بدهی، پیگیری شاخص و مدیریت سرمایه‌گذاری.

در تحقیقات اخیر، لی و انگ (۲۰۰۰) جواب بهینه‌ی تحلیلی برای مدل چند دوره‌ای میانگین-واریانس ارائه دادند. وی و یه (۲۰۰۷) مدل چند دوره‌ای میانگین-واریانس را برای یک بازار احتمالی با در نظر گرفتن محدودیت ورشکستگی مورد بررسی قرار دادند. گوپینار و راستم (۲۰۰۷) مدل بهینه‌سازی چند دوره‌ای میانگین-واریانسی را پیشنهاد کردند که از درخت سناریو برای در نظر گرفتن عدم اطمینان و احتمال رخ دادن هر سناریو در دوره‌های آتی استفاده کرده بودند. کلیکیورت و اوزکیک (۲۰۰۷) با بهره‌گیری از زنجیره-ی مارکوف مدل‌های بهینه سازی سبد سرمایه‌گذاری چند دوره‌ایمیانگین-واریانس متعددی را ارائه کردند. کالافیور (۲۰۰۸) با استفاده از سیاست‌های خطی کنترل بهینه سازی را برای سبد سرمایه‌گذاری چند دوره‌ای ارائه داد. ژانگ و ژانگ (۲۰۰۹) علاوه بر در نظر گرفتن هزینه‌ی معاملات در مدل خود، به ارائه بهینه‌سازی احتمالی چند دوره‌ای جدیدی بر پایه‌ی ارزش در معرض خطر شرطی پرداخت. تاکانو و گوتو (۲۰۱۰) به حل بهینه سازی سبد سرمایه‌گذاری چند دوره‌ای از طریق ارزش در معرض خطر شرطی تحت هزینه معاملات غیرخطی پرداختند. سجادی و همکارانش (۲۰۱۱) سبد سرمایه‌گذاری چند دوره‌ای فازی با در نظر گرفتن نرخ قرض‌دهی و قرض‌گیری متفاوت ارائه کردند. سان و همکارانش (۲۰۱۱) مسئله بهینه-سازی سبد سرمایه‌گذاری چند دوره‌ای را با الگوریتم جدیدی به نام بهینه‌سازی رانش ازدحام ذرات (DPSO)

و نشان دادند که نسبت به بقیه الگوریتم‌هایی که مورد مقایسه قرار گرفتند عملکرد بهتری دارد و کاراتر نیز هست. لیو و همکارانش (۲۰۱۲) سبد سرمایه‌گذاری چند دوره‌ای میانگین-کشیدگی را در محیط فازی ارائه کردند و نشان دادند که این مدل نسبت به مدل‌هایی که از کشیدگی به عنوان سنجه‌ی ریسک استفاده نکردند، عملکرد بهتری از خود نشان داده است.

۲-۳- مدل‌های برنامه‌ریزی احتمالی

مطالعات نشان داده است که مدل‌های برنامه‌ریزی احتمالی ابزار انعطاف‌پذیرتری برای توصیف مسائل بهینه‌سازی مالی تحت عدم اطمینان هستند. فرموله‌بندی‌های متفاوتی برای مسائل مالی چند مرحله‌ای پیشنهاد شده است برای مثال، کالبرگ و همکارانش (۱۹۸۲)، مول‌وی و ولادیمیرو (۱۹۹۱)، کال و والاس (۱۹۹۴). مول‌وی و ولادیمیرو (۱۹۹۲) از مدل شبکه‌ی احتمالی چند دوره‌ای برای تخصیص دارایی استفاده کردند. کارینو و همکارانش (۱۹۹۴) با استفاده از برنامه‌ریزی احتمالی چند دوره‌ای، مسئله مدیریت دارایی-بدهی را فرموله‌بندی کردند. هیبیکی (۲۰۰۶) مدل برنامه‌ریزی احتمالی چند دوره‌ای مرکب از شبیه‌سازی و درخت تصمیم برای تخصیص دارایی استفاده کرد. شن و ژانگ (۲۰۰۸) چارچوبی را برای انتخاب سبد سرمایه‌گذاری پایدار براساس درخت سناریو چند دوره‌ای ارائه کرد. سان و همکارانش (۲۰۱۱) مسئله سبد سرمایه‌گذاری چند دوره‌ای میانگین-واریانس را به وسیله‌ی الگوریتم جدید و کارایی به نام بهینه‌سازی رانش ازدحام ذرات (DPSO) حل کردند. کارینو و همکارانش (۱۹۹۴)، مول‌وی و زیمبا (۱۹۹۵)، برگر و مول‌وی (۱۹۹۶) و دمپستر (۱۹۹۸) نشان دادند که مدل‌های چند دوره‌ای عملکرد بهتری نسبت به مدل‌های تک دوره‌ای دارند.

۲-۴- سنجه‌های ریسک

همان‌طور که در قبلا ذکر شد، تقریبا بیشتر محققان از واریانس به عنوان سنجه‌ی ریسک استفاده کردند. به منظور اندازه‌گیری ریسک واقعی سرمایه‌گذاری، عدم تقارن تابع توزیع بازده‌ها و نیاز سرمایه‌گذار، سنجه‌های ریسک پایین مثل نیم‌واریانس، ارزش در معرض خطر (VaR) و یا ارزش در معرض خطر شرطی، باید جایگزین واریانس شود. مطالعات نشان داده است که سرمایه‌گذاران ریسک را به عنوان احتمالی که بازده بدست آمده بیشتر از بازده مورد انتظار نباشد، تعریف می‌کنند (مارکویتز (۱۹۵۹) و ماو (۱۹۷۰)).

ارزش در معرض خطر که مقدار زیان متحمل شده را در یک زمان مشخص و در یک سطح اطمینان مشخص توصیف می‌کند، می‌تواند یکی از گزینه‌ها برای مدیریت ریسک باشد اما مطالعات اخیر مثل، سزگو (۲۰۰۲) نشان داده است که بنا به دلایل ذیل ارزش در معرض خطر یک سنجه‌ی ریسک قابل قبول و درست نیست: زیان‌هایی که بیشتر از ارزش در معرض خطر هستند را اندازه‌گیری نمی‌کند، جمع‌پذیر نیست و غیره. پس از فهمیدن نواقص ارزش در معرض خطر، ارزش در معرض خطر شرطی که میانگین ضررهای بیشتر از ارزش در معرض ریسک تعریف می‌شود، می‌تواند به عنوان سنجه‌ی ریسک مورد پذیرش قرار گیرد. ارزش در معرض خطر شرطی ویژگی‌های ارزنده‌ای از لحاظ محاسباتی و تئوری وجود دارد (پفلاگ (۲۰۰۰)، راکفلر و یورسایو (۲۰۰۲)).

یان و همکارانش (۲۰۰۷) و یان و لی (۲۰۰۹) نیم‌واریانس را جایگزین واریانس کردند و مدل انتخاب سبد سرمایه‌گذاری چند دوره‌ای میانگین-نیم‌واریانس را پیشنهاد کردند. ژانگ و ژانگ (۲۰۰۹) بهینه‌سازی احتمالی چند دوره‌ای جدیدی را براساس ارزش در معرض خطر شرطی و با در نظر گرفتن هزینه‌ی معاملات ارائه کرد. ژانگ و همکارانش (۲۰۱۲) مدل انتخاب سبد سرمایه‌گذاری چند دوره‌ای میانگین-نیم‌واریانس را در محیط فازی ارائه کرد.

۲-۵- هزینه معاملات

آرنات و ویگنر (۱۹۹۰) بیان کردند که در نظر نگرفتن هزینه‌ی معاملات منجر به ارائه جوابی بدتر می‌شود، بنابراین هزینه‌ی معاملات باید یکی از نگرانی‌های اصلی مدیران سبد سرمایه‌گذاری امروزی باشد. گوپینار و همکارانش (۲۰۰۳)، تاکانو و گوتو (۲۰۰۹) و ژانگ و ژانگ (۲۰۰۹)، برتسیماس و پاچامانوو (۲۰۰۸)، گوپینار و راستم (۲۰۰۷)، لیو و همکارانش (۲۰۱۲) و ژانگ و همکارانش (۲۰۱۲) هزینه‌ی معاملات را وارد مدل‌های انتخاب سبد سرمایه‌گذاری چند دوره‌ای خود کردند.

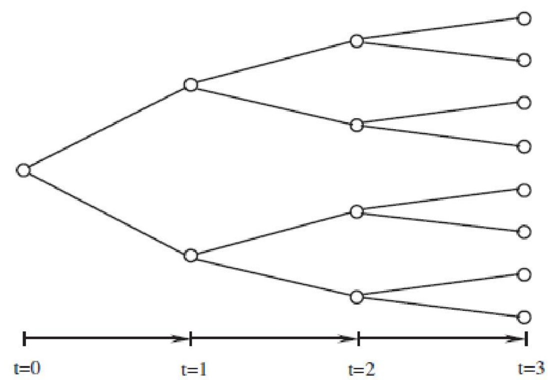
۳- مدل پژوهش و متغیرهای آن

۳-۱- تدوین موضوعی مدل

بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری چند دوره‌ای به عنوان یک مسئله‌ی چند دوره‌ای پویا در نظر گرفته می‌شود به طوری که معاملات در نقاط زمانی گسسته اتفاق می‌افتند. بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری چند دوره‌ای را می‌توان این گونه تعریف کرد: N دارایی ریسکی، یک دارایی بدون ریسک، افق برنامه‌ریزی شامل T مرحله -لحظات زمانی، که تصمیمات در آن زمان‌ها اتخاذ می‌گردد $(t = 0, 1, \ldots, T\text{-}1)$ و T دوره‌ی زمانی- بازه‌های زمانی بین دو مرحله می‌باشد. این بازه‌های زمانی می‌تواند از دقیقه تا سال‌ها تغییر کند و تصمیمات در ابتدای هر مرحله اتخاذ می‌گردد. اولین مرحله، لحظه‌ی صفر و زمان حال را نشان می‌دهد. درآمدهای ناشی از فروش به پول نقد (دارایی صفر) اضافه و هزینه‌های ناشی از خرید، از پول نقد کم می‌شود. در لحظه‌ی زمانی t+1، براساس بازده‌ی حاصله از بازه‌ی زمانی $[t, t + 1)$ دارایی‌های سرمایه‌گذار به روز می‌شود. برای سادگی فرض می‌کنیم که بازده‌های دارایی بدون ریسک برای قرض‌دهی (r_l) و قرض‌گیری (r_b) ثابت هستند. تاریخ افق زمانی با توجه به محدودیت‌های بحرانی سرمایه‌گذار، مثل تاریخ بازپرداخت یک بدهی زیاد، تعیین می‌شود و تمرکز ما بر روی موقعیت سرمایه‌گذار در آخر دوره‌ی زمانی T است. در آخر دوره‌ی زمانی T سرمایه‌گذار ثروت نهایی‌اش W_T را جمع‌آوری می‌کند. هدف اصلی وی مدیریت سبدی از دارایی‌هاست به گونه‌ای که امید مطلوبیت ثروت نهایی $E[U(W_T)]$ بیشینه شود.

عدم اطمینان از طریق سناریوها مدل‌سازی می‌شود و هر سناریو احتمال رخ دادن همه‌ی پارامترهای نامعین در مدل را توصیف می‌کند. هر سناریو احتمالی برابر p_s دارد به طوری که $p_s > 0$ و $\sum_{s=1}^{S} p_s = 1$ است. برای سادگی فرض کرده‌ایم که تمامی سناریوها با احتمال یکسانی اتفاق می‌افتند بنابراین داریم: $p_s = \frac{1}{S}$. از آنجایی که در یک مدل پویا، اطلاعات در مورد مقدار واقعی پارامترهای نامعین در مرحله‌ها

معلوم می‌شود، درخت سناریو یکی از روش‌های مناسب برای نمایش عدم اطمینان است. سناریو مسیری است از ریشه‌ی درخت تا برگ آن. هر گره درخت متناسب با یک حالت ممکن از دنیای واقعی است و پر واضح است که تمامی سناریوهایی که از این گره‌ها عبور می‌کنند، گذشته‌ی یکسانی دارند.



شکل(۱): درخت سناریو با ۳ مرحله و ۸ سناریو

۳-۲- تعریف و ارزیابی سنجه‌های ریسک

استفاده از یک سنجه‌ی ریسک شاید بهترین روش برای مسائل انتخاب سبد سرمایه‌گذاری نباشد و این که کدام سنجه‌ی ریسک برای تمامی مسائل بهترین است هنوز حل نشده باقی مانده است استون (۱۹۷۳). مطالعات بسیاری وجود دارد که بیان می‌کند استفاده از بیش از یک سنجه‌ی ریسک به صورت همزمان برای مسائل انتخاب سبد سرمایه‌گذاری دید بهتری به ما می‌دهد. کونو و همکارانش (۱۹۹۳) مدل سبد سرمایه‌گذاری را با استفاده از میانگین، واریانس و کشیدگی ایجاد کردند. رومن و همکارانش (۲۰۰۷) مدل سبد سرمایه‌گذاری را معرفی کردند و از واریانس و ارزش در معرض خطر شرطی به عنوان دو سنجه‌ی ریسک استفاده کردند. پیندوریا و همکارانش (۲۰۱۰) مدل چند هدفه‌ی میانگین-واریانس-کشیدگی را برای تخصیص سبد سرمایه‌گذاری ارائه کردند و نشان دادند وقتی که تابع توزیع دارایی‌ها غیرنرمال است، مدلشان می‌تواند به طور قابل توجهی سبدهای سرمایه‌گذاری بهتری را ایجاد کند.

به علت جریمه کردن بازده‌های بیشتر و کمتر بازده مورد انتظار، محققان زیادی مایل نیستند که از واریانس به عنوان سنجه‌ی ریسک استفاده کنند زیرا ریسک را مرتبط به بازده‌هایی می‌دانند که کمتر از بازده مورد انتظار است. به خاطر در نظر گرفتن بازده‌هایی که کمتر از بازده‌ی مورد انتظار هستند، سنجه‌های ریسک پایین باید جایگزین واریانس شوند. مارکویتز (۱۹۵۹) نیم‌واریانس را به عنوان یک سنجه‌ی ریسک پایین پیشنهاد کرد. نیم‌واریانس به دنبال کمینه کردن پراکندگی بازده سبد سرمایه‌گذاری از بازده‌ی مورد

انتظار است اگر بازده سبد سرمایه‌گذاری کمتر از از بازده‌ی مورد انتظار باشد. تعریف ریاضی نیم‌واریانس به صورت زیر است:

$$(R-E)^- = \begin{cases} R-E, & if\ (R-E) \le 0 \\ 0, & if\ (R-E) > 0 \end{cases} \qquad (۱)$$

نیم‌واریانس امید $[(R-E)^-]^2$است.

یکی از مهم‌ترین سنجه‌های ریسک پایین ارزش در معرض خطر شرطی است و همان‌طور که قبلا اشاره شد از لحاظ محاسباتی و تئوری نسبت به ارزش در معرض خطر برتر است. راکفلر ویورسایو (۲۰۰۰) ارزش در معرض خطر شرطی را به عنوان یک سنجه‌ی ریسک جدید معرفی کردند. ارزش در معرض خطر سطحی از زیان است که ما نسبتا مطمئن هستیم از آن مقدار بیشتر نخواهد شد، ولی چیزی راجع به بزرگی زیان-هایی که در صورت فراتر رفتن از ارزش در معرض خطر متحمل خواهیم شد نمی‌گوید. راکفلر و یورسایو (۲۰۰۰) همچنین نشان دادند که ارزش در معرض خطر شرطی برای مسئله‌ی انتخاب سبد سرمایه‌گذاری را خطی می‌کند و سبدهای سرمایه‌گذاری با ارزش در معرض خطر کمتر لزوما ارزش در معرض خطر کمتری دارند. ارزش در معرض خطر شرطی به شکل زیر به دست می‌آید:

فرض کنید $f(X,\xi)$ تابع زیان سبد سرمایه‌گذاری باشد. زیان‌ها معمولا بر حسب مقدار پول هستند. در یک سطح اطمینان مشخص α، ارزش در معرض خطر شرطی برابر ارزش مورد انتظار تمامی $(1-\alpha)\%$ زیان‌ها و می‌توان از فرمول زیر برای بدست آوردن آن استفاده کرد:

$$\mathrm{CVaR}_\alpha(X,\eta) = \eta + \frac{1}{(1-\alpha)}\int [f(X,\eta)-\eta]^+ p_\xi\, d\xi \qquad (۲)$$

$\eta - \mathrm{VaR}$
$\xi - \text{Random variable}$
$z^+ = \max\{z, 0\}$

بنابراین مدلی که ما برای انتخاب سبد سرمایه‌گذاری چند دوره‌ای انتخاب کردیم مبنی بر سه پارامتر است: ارزش مورد انتظار ثروت نهایی، نیم‌واریانس و ارزش در معرض خطر شرطی در سطح اطمینان مشخص α به طوری که ارزش مورد انتظار بیشینه می‌شود، نیم‌واریانس و ارزش در معرض خطر شرطی نسبت به ثروت نهایی کمینه می‌شوند. مدل چند هدفه‌ای که ما باید حل کنیم عبارت است از:

$$\begin{aligned} &\text{Minimize} \quad [\text{semivariance}(x), \mathrm{CVaR}(x,\alpha), -E(x)] \\ &\text{subject to} \quad x \in A \end{aligned} \qquad (۳)$$

۳-۳- روش بهینه‌سازی

رایج‌ترین روش عددی کردن که روشی رایج برای به دست آوردن جواب کارای پارتو برای یک مسئله‌ی بهینه‌سازی چند هدفه است، روش وزن‌دهی به تابع‌های هدف است. این روش عیب‌های فراوانی دارد. داس و

دنیس (۱۹۹۷) بنابراین خیلی معنادارتر است که سطح‌هایی را برای بازده مورد انتظار و ارزش در معرض خطر شرطی مشخص کنیم و سپس به حل مسئله بپردازیم.

در این پژوهش، از روش $\epsilon - \text{constrained}$ که در آن یک تابع هدف بهینه می‌شود در حالی که برای بقیه تابع‌های هدف کران‌های بالا یا پایین اعمال می‌شود و آن‌ها را وارد محدودیت‌های مسئله می‌کنیم هیمس و همکارانش (۱۹۷۱) و ستور (۱۹۸۶). بنابراین، اول از همه مسئله چند هدفه باید تبدیل به یک مسئله‌ی تک هدفه به شکل زیر شود:

$$\begin{array}{ll} \text{Maximize} & f_j(x) \\ \text{subject to} & f_k(x) \geq \epsilon_k \ : k = 1, 2, \ldots, T : k \neq j \\ & x \in A \end{array} \tag{۴}$$

در مدل ما، نیم‌واریانس به عنوان سنجه‌ی ریسک مرجع در تابع هدف باقی می‌ماند و ارزش مورد انتظار ثروت نهایی و ارزش در معرض خطر شرطی وارد محدودیت‌ها می‌شوند. مسئله تک هدفه‌ای که باید حل شود به شکل زیر است:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize} & \text{Semivariance}\ (x) \\ \text{subject to} & \text{CVaR}(x, \alpha) \leq b \\ & E(x) \geq d \\ & x \in A \end{array} \tag{۵}$$

۳-۴- پارامترها

π_s	احتمال رخ دادن هر سناریو s، و بنابراین داریم $\sum_{s=1}^{S} \pi_s = 1$
$r_{n,t}^{s}$	بازده (درصد) دارایی n، در دوره‌ی زمانی t و تحت سناریو s
C_{buy}	هزینه‌ی معاملات ناشی از خرید دارایی‌ها در ابتدای دوره برای بازنگری پرتفو
C_{sell}	هزینه‌ی معاملات ناشی از فروش دارایی‌ها در ابتدای دوره برای بازنگری پرتفو
r_l	نرخ قرض‌دهی
r_b	نرخ قرض‌گیری
d	ثروت مورد انتظار در انتهای آخرین دوره‌ی زمانی
b	میانگین ضرر مورد انتظار
W_0	ثروت اولیه‌ی سرمایه‌گذار در ابتدای اولین دوره‌ی سرمایه گذاری
α	سطح اطمینان

۳-۵- متغیرهای تصمیم

$x_{n,t}^{s}$ مقدار پولی دارایی n، تحت سناریو s و در ابتدای دوره‌ی زمانی t قبل از بازنگری

$y_{n,t}^{s}$ مقدار پولی دارایی n، تحت سناریو s و در ابتدای دوره‌ی زمانی t بعد از بازنگری

$v_{n,t}^{s}$ مقدار خرید از دارایی n، تحت سناریو s و در ابتدای دوره‌ی زمانی t

$u_{n,t}^{s}$ مقدار فروش از دارایی n، تحت سناریو s و در ابتدای دوره‌ی زمانی t

b_{t}^{s} مقدار پول قرض گرفته شده در ابتدای دوره‌ی زمانی t و تحت سناریو s

W_{t}^{s} ثروت سرمایه‌گذار در ابتدای دوره‌ی زمانی t و تحت سناریو s

۳-۶- متغیرهای کمکی

a_s ضرر حاصل از سبد سرمایه‌گذاری وقتی که از مقدار ارزش در معرض خطر بیشتر است

y_s مقدار انحراف از میانگین ثروت تحت سناریو s

η ارزش در معرض خطر در حالت بهینه

۳-۷- تابع هدف

همان طور که قبلا بیان شد، نیم‌واریانس در تابع هدف قرار داده می شود که مدل ریاضی آن به شکل زیر خواهد بود:

$$Min\ Z = \frac{1}{S}\sum_{s=1}^{S} y_s^2 \qquad (۶)$$

۳-۸- محدودیت‌ها

محدودیت (۷) بیان‌کننده‌ی مقدار پول سرمایه‌گذاری شده در دارایی n، تحت سناریو s و در ابتدای دوره‌ی زمانی t بعد از بازنگری سبد سرمایه‌گذاری است.

$$y_{n,t}^{s} = x_{n,t}^{s} - u_{n,t}^{s} + v_{n,t}^{s} \quad \forall s \in S, \quad \forall n \in N, \quad \forall t \in T, \qquad (۷)$$

محدودیت (۸) محدودیت بودجه در زمان صفر است و بیان می‌کند که مجموع سرمایه‌گذاری‌های اولیه باید برابر ثروت اولیه باشد.

$$\sum_{n=1}^{N}(1 + C_{buy})v_{n,0}^{s} + y_{0,0}^{s} = W_0 + b_0^s \forall s \in S, \qquad (۸)$$

محدودیت‌های (۹) تا (۱۲) جریان نقدی را در زمان t نشان می‌دهد.

$$x_{n,t}^{s} = (1 + r_{n,t-1}^{s})(x_{n,t-1}^{s} - u_{n,t-1}^{s} + v_{n,t-1}^{s}) \quad \forall s \in S, \quad t = 1,2,3,\dots,T, \quad n \neq 0 \qquad (۹)$$

$$x_{0,1}^{s} = (1 + r_l)[x_{0,0}^{s}] - b_0^s \times (1 + r_b) + b_1^s \quad \forall s \in S, \qquad (۱۰)$$

$$x_{0,t}^{s} = (1 + r_l)\left[x_{0,t-1}^{s} + \sum_{n=1}^{N}(1 - C_{sell})u_{n,t-1}^{s} - \sum_{n=1}^{N}(1 + C_{buy})v_{n,t-1}^{s}\right] - b_{t-1}^{s} \times (1 + r_b) + b_t^s \quad \forall s \in S, \quad t = 2,3,\dots,T-1, \qquad (۱۱)$$

$$x_{0,T}^{s} = (1+r_l)\left[x_{0,T-1}^{s} + \sum_{n=1}^{N}(1-C_{sell})u_{n,T-1}^{s} - \sum_{n=1}^{N}(1+C_{buy})v_{n,T-1}^{s}\right] - b_{T-1}^{s} \times (1+r_b) \qquad \forall s \in S, \tag{۱۲}$$

ثروت انباشته شده در انتهای t امین دوره‌ی زمانی تحت سناریو s و قبل از بازنگری سبد سرمایه‌گذاری در محدودیت (۱۳) بیان شده است.

$$\sum_{n=0}^{N} x_{n,t}^{s} = W_t^{s} \qquad \forall s \in S, \qquad t = 1,2,\dots,T-1, \tag{۱۳}$$

محدودیت (۱۴) تضمین می‌کند که میانگین ثروت به دست آمده بزرگتر از مقدار ثروت مورد انتظار d بیشتر است.

$$\frac{1}{S}\sum_{s=1}^{S} W_T^{s} \geq d \tag{۱۴}$$

محدودیت‌های (۱۵) تا (۱۷) اطمینان می‌دهند که مقدار ارزش در معرض خطر شرطی کمتر از ارزش در معرض خطر شرطی مورد انتظار b است.

$$a_s \geq \eta - W_T^{s} \qquad \forall s \in S, \tag{۱۵}$$

$$a_s \geq 0, \qquad \forall s \in S, \tag{۱۶}$$

$$\eta - \frac{1}{(1-\alpha)S}\sum_{s=1}^{S} a_s \leq b \tag{۱۷}$$

مقدار انحراف از ثروت مورد انتظار که برای محاسبه‌ی نیم‌واریانس لازم است در محدودیت‌های (۱۸) و (۱۹) آورده شده است.

$$y_s \geq \frac{1}{S}\sum_{s=1}^{S} W_T^{s} - W_T^{s} \qquad \forall s \in S, \tag{۱۸}$$

$$y_s \geq 0, \qquad \forall s \in S, \tag{۱۹}$$

محدودیت‌های (۲۰) و (۲۱) نشان می‌دهند که سناریوها با گذشته‌ی یکسان، مقادیر تصمیم یکسانی تا آن لحظه‌ی زمانی دارند.

$$y_{n,t}^{s} = y_{n,t}^{s'} \tag{۲۰}$$

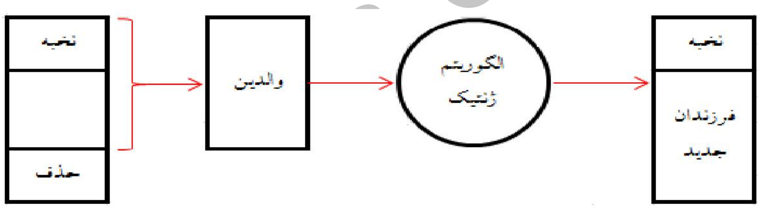
$$b_{n,t}^{s} = b_{n,t}^{s'} \tag{۲۱}$$

۴- نتایج پژوهش

۴-۱- الگوریتم ژنتیک

الگوریتم ژنتیک (GA) اولین بار توسط هالند در دهه‌ی ۱۹۶۰ معرفی شد و گولدبرگ در سال ۱۹۹۸ آن را بیشتر تشریح کرد. به خاطر داشتن سرعت همگرایی پایین، این الگوریتم یک الگوریتم زمانبر است در حالی که الگوریتم ژنتیک دارای مزایای زیادی نسبت به بقیه‌ی الگوریتم‌های بهینه‌سازی محلی می‌باشد فوگل (۱۹۹۴) و میچالویچ (۱۹۹۲). چان و همکارانش (۲۰۰۲) از الگوریتم ژنتیک برای بهینه‌سازی تخصیص دارایی در سبد سرمایه‌گذاریشان استفاده کردند.

نحوه‌ی انتخاب جواب در این الگوریتم به این صورت است که ابتدا جمعیت براساس مقدار تابع تناسب که در اینجا مقدار نیم‌واریانس در نظر گرفته شده است، به صورت نزولی مرتب می‌شوند. با احتمال بیشتری، والدین بهتر می‌توانند فرزندان بهتری تولید کنند، بنابراین ضروری است که درصدی از بهترین جواب‌ها به نسل بعدی منتقل شوند، پس درصدی (مثلا ۲۵٪)از جواب‌های خیلی خوب به عنوان نخبه به نسل بعدی انتقال پیدا می‌کنند. از دسته جواب‌های تولید شده، درصدی (مثلا ۲۵٪) نیز حذف می‌شوند و از مابقی جواب‌ها به عنوان والدین برای تولید جواب‌های نسل بعدی استفاده می‌کنیم. شکل ۲ نحوه‌ی انتخاب جواب در الگوریتم ژنتیک را نشان می‌دهد.



شکل(۲): نحوه ی انتخاب جواب در الگوریتم ژنتیک

عملگر ترکیب در یک زمان و بر روی دو کروموزوم و به منظور ترکیب خواص دو کروموزوم و تولید فرزندانی بهتر اجرا می‌شود. در این الگوریتم ما از روش ترکیب دو نقطه‌ای استفاده کرده‌ایم. هدف اصلی استفاده از عملگر جهش جلوگیری از همگرایی به جواب بهینه‌ی محلی و متنوع ساختن جمعیت می‌باشد. عملگر جهش را می‌توان به عنوان شکل ساده‌ای از جستجوی محلی نیز در نظر گرفت. احتمال جهش رخ دادن را معمولا مقداری کوچک در نظر می‌گیرند.

۴-۲- داده‌های مورد استفاده

داده‌های به کار رفته در این مسئله از بورس تهران استخراج گردیده است. میانگین و واریانس بازده‌های ماهیانه‌ی برای ۲۴ سهام از دی ماه ۱۳۸۷ تا مرداد ۱۳۹۲ در جدول ۱ جمع‌آوری و در مدل استفاده شده است.

جدول (۱): مقادیر میانگین و واریانس داده های مورد استفاده

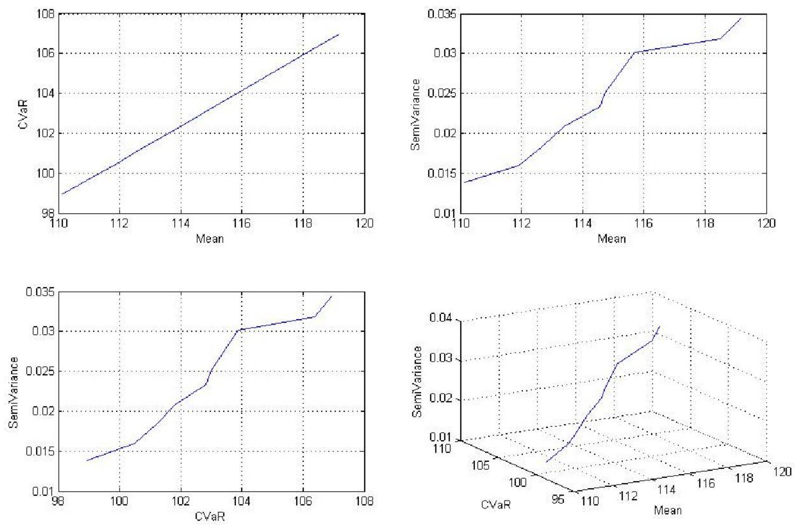
واریانس	میانگین	سهم	واریانس	میانگین	سهم
۰.۰۱۲۸۸۳۳	۰.۰۱۳۵۳۷۳	آخابر	۰.۰۰۹۲۲۳۵	۰.۰۲۳۲۱۵۲	والبر
۰.۰۱۶۹۳۷۶	۰.۰۳۷۶۱۶	ونیکی	۰.۰۲۳۹۵۵۵	۰.۰۷۲۷۵۷	کسرا
۰.۰۱۳۳۴۰۵	۰.۰۲۹۲۵۲۳	شکلر	۰.۰۸۳۸۴۵	۰.۰۷۸۵۷۷۹	فاذر
۰.۰۲۴۹۸۸۹	۰.۰۲۹۷۰۷۲	شپترو	۰.۰۲۴۳۰۹۵	۰.۰۳۶۰۷۴۲	آکنتور
۰.۰۱۹۲۹۶۹	۰.۰۴۲۹۵۹۸	شاراک	۰.۰۴۱۷۷۸	۰.۰۵۷۶۰۱۱	شکربن
۰.۰۳۳۳۵	۰.۰۳۹۷۷۳۶	وپترو	۰.۰۱۸۵۵۹۲	۰.۰۴۶۲۷۰۱	فجر
۰.۰۴۱۱۵۳۲	۰.۰۴۵۷۵۲۱	شفارا	۰.۰۲۱۳۰۶۸	۰.۰۲۶۹۲۳۶	فخاس
۰.۰۱۲۰۶۲۵	۰.۰۲۷۷۵۰۳	شخارک	۰.۰۲۰۶۷۷۴	۰.۰۴۶۵۳۸۵	فخوز
۰.۰۴۷۰۳۳۶	۰.۰۸۰۷۸۷۹	شیراز	۰.۰۵۴۰۵۵۵	۰.۰۶۸۷۷۳۷	قهکمت
۰.۰۵۱۰۳۷۷	۰.۰۵۷۱۷۴۶	قشکر	۰.۰۲۰۴۱۵۲	۰.۰۴۳۷۳۴۷	شگل
۰.۰۳۱۶۹۲۱	۰.۰۶۲۹۶۹۵	پسهند	۰.۰۲۱۰۱۲۸	۰.۰۳۸۶۵۶۶	رمپنا
۰.۰۱۵۴۲۳	۰.۰۲۷۶۵۸۴	سنیر	۰.۰۴۲۲۸۹۷	۰.۰۶۳۵۲۸	فاراک

۴-۳- نتایج محاسباتی

در این بخش به بررسی نتایج حاصله از اجرای الگوریتم بر روی داده‌های واقعی می‌پردازیم. الگوریتم برای مسائل مختلف و در ابعاد ۳ مرحله و ۵ سهم، ۵ مرحله و ۵ سهم، ۳ مرحله و ۱۰ سهم و ۵ مرحله و ۱۰ سهم اجرا ونتایج آن در زیر ارائه شده است. لازم به ذکر است که پارامترهای الگوریتم به صورت تجربی تعیین شده‌اند.

جدول (۲): نتایج به دست آمده از الگوریتم ژنتیک برای مسئله‌ای با ۳ مرحله و ۵ سهم

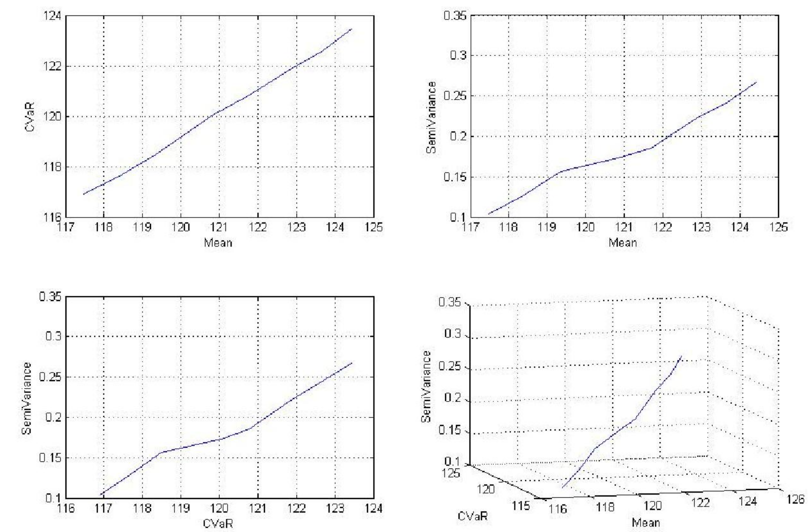
میانگین ثروت	ارزش در معرض خطر شرطی	نیم واریانس	زمان (ثانیه)
۱۱۰.۱۴۲	۹۸.۹۵۸۱	۰.۰۱۳۸۴	۱.۵۴۹
۱۱۱.۹۱۵	۱۰۰.۴۸۵	۰.۰۱۵۹۵	۱.۶۲۲
۱۱۲.۶۵۵	۱۰۱.۱۸	۰.۰۱۸۳۶	۱.۵۱۱
۱۱۳.۴۰۸	۱۰۱.۸۲۴	۰.۰۲۰۸۴	۱.۵۸۲
۱۱۴.۵۵	۱۰۲.۸۳	۰.۰۲۳۳۵	۱.۵۷
۱۱۴.۷۳۳	۱۰۳.۰۰۸	۰.۰۲۵۱۲	۱.۵۵۴
۱۱۵.۷۱۲	۱۰۳.۸۸۹	۰.۰۳۰۱۳	۱.۵۷۲
۱۱۸.۵۰۲	۱۰۶.۳۸۲	۰.۰۳۱۸	۳.۲۱
۱۱۹.۱۶۹	۱۰۶.۹۵	۰.۰۳۴۳۹	۳.۲۷۷



شکل (۳): مرز کارای به دست آمده از الگوریتم ژنتیک برای مسئله‌ای با ۳ مرحله و ۵ سهم

جدول (۳): نتایج به دست آمده از الگوریتم ژنتیک برای مسئله‌ای با ۵ مرحله و ۵ سهم

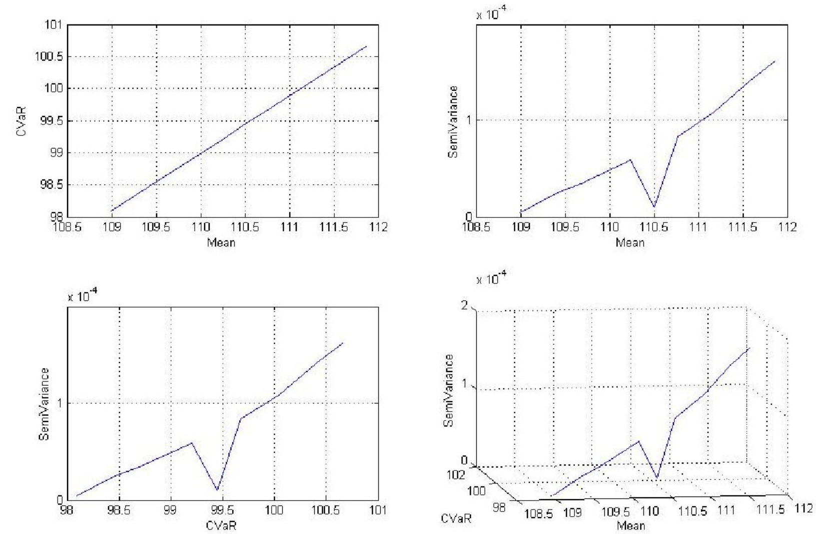
میانگین ثروت	ارزش در معرض خطر شرطی	نیم واریانس	زمان (ثانیه)
۱۱۷.۴۷	۱۱۶.۸۹۸	۰.۱۰۴۱۵۲	۱۰.۸۴۲
۱۱۸.۳۵۳	۱۱۷.۵۹۴	۰.۱۲۶۴۷۳	۱۰.۹۱
۱۱۹.۳۵۴	۱۱۸.۴۹۴	۰.۱۵۵۹۵۷	۱۱.۰۱
۱۲۰.۸۲۶	۱۲۰.۰۵۱	۰.۱۷۳۲۰۱	۱۱.۲
۱۲۱.۶۹۴	۱۲۰.۷۶۱	۰.۱۸۵۶۹۴	۱۱.۰۹
۱۲۲.۸۷۳	۱۲۱.۸۹۲	۰.۲۲۲۶۵۶	۱۷.۸۸۷
۱۲۳.۶۹	۱۲۲.۵۷۸	۰.۲۴۱۸۹۴	۱۷.۰۳
۱۲۴.۴۲۸	۱۲۳.۴۳۶	۰.۲۶۷۱۴۱	۱۴.۴۳



شکل (۴): مرز کارای به دست آمده از الگوریتم ژنتیک برای مسئله‌ای با ۵ مرحله و ۵ سهم

جدول (۴): نتایج به دست آمده از الگوریتم ژنتیک برای مسئله‌ای با ۳ مرحله و ۱۰ سهم

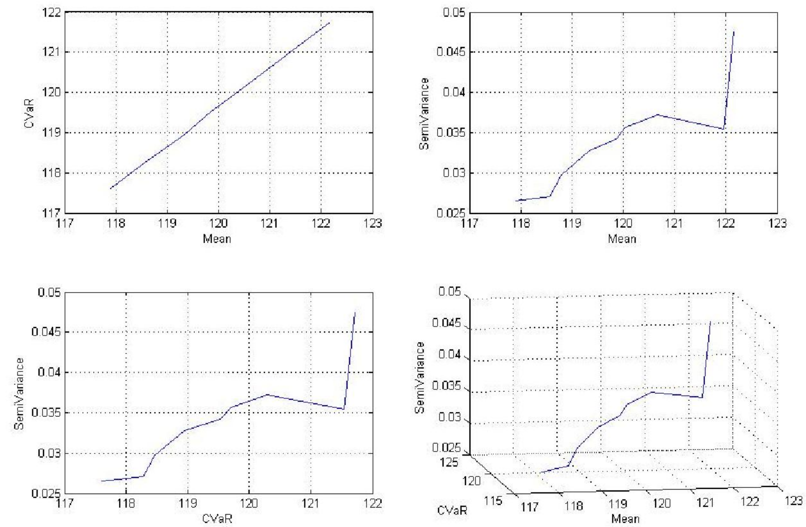
میانگین ثروت	ارزش در معرض خطر شرطی	نیم واریانس	زمان (ثانیه)
۱۰۸.۹۹۷	۹۸.۰۹۳۹	۰.۰۰۰۰۰۰۴	۲.۹۵
۱۰۹.۳۹۱	۹۸.۴۴۲۳	۰.۰۰۰۰۰۲۴	۲.۹۰۵
۱۰۹.۶۷۸	۹۸.۶۹۷۹	۰.۰۰۰۰۰۳۵	۲.۸۶۲
۱۱۰.۲۳۸	۹۹.۲۰۲۱	۰.۰۰۰۰۰۵۹	۲.۸۶
۱۱۰.۵۰۴	۹۹.۴۴۹۱	۰.۰۰۰۰۰۱۰	۲.۸۷
۱۱۰.۷۷۱	۹۹.۶۷۴۱	۰.۰۰۰۰۰۸۴	۲.۸۷
۱۱۱.۱۷۸	۱۰۰.۰۳۹	۰.۰۰۰۰۱۰۹	۲.۹۶۹
۱۱۱.۵۷۴	۱۰۰.۳۹۷	۰.۰۰۰۰۱۴۱	۳.۰۳۶
۱۱۱.۸۶	۱۰۰.۶۵۱	۰.۰۰۰۰۱۶۲	۳.۰۲



شکل (۵): مرز کارای به دست آمده از الگوریتم ژنتیک برای مسئله‌ای با ۳ مرحله و ۱۰ سهم

جدول (۵): نتایج به دست آمده از الگوریتم ژنتیک برای مسئله‌ای با ۵ مرحله و ۱۰ سهم

میانگین ثروت	ارزش در معرض خطر شرطی	نیم واریانس	زمان (ثانیه)
۱۱۷.۹۰۱	۱۱۷.۶۰۸	۰.۰۲۶۵۶	۲۰.۳۱۱
۱۱۸.۵۷۳	۱۱۸.۲۷۲	۰.۰۲۷۰۳۲	۲۰.۳۴۲
۱۱۸.۷۸۹	۱۱۸.۴۵۸	۰.۰۲۹۷۱۳۹	۲۰.۱۴
۱۱۹.۳۳۲	۱۱۸.۹۴۶	۰.۰۳۲۷۶۰۴	۲۰.۳۴۳
۱۱۹.۸۶۳	۱۱۹.۵۲۷	۰.۰۳۴۱۹۳۳	۲۰.۳۵۸
۱۲۰.۰۴۳	۱۱۹.۷	۰.۰۳۵۶۹۲۶	۲۰.۱۵۵
۱۲۰.۶۷	۱۲۰.۲۸۴	۰.۰۳۷۲۵۳۹	۲۰.۱۴۱
۱۲۱.۹۵۳	۱۲۱.۵۴۱	۰.۰۳۵۴۱۴۵	۲۲.۱۶۸
۱۲۲.۱۵۵	۱۲۱.۷۲۲	۰.۰۴۷۴۸۱۸	۲۱.۹۶۵



شکل (۶): مرز کارای به دست آمده از الگوریتم ژنتیک برای مسئله‌ای با ۵ مرحله و ۱۰ سهم

اولین موضوعی که از اشکال بالا می‌توان متوجه شد، حفظ رابطه‌ی مستقیم بین بازده مورد انتظار یا به عبارت دیگر میانگین ثروت و معیارهای ریسک که منطبق با تئوری مسئله است. از مقایسه نتایج جدول ۲ با ۳ و جدول ۴با ۵، به سهولت می‌توان به این موضوع پی برد که با تعداد سهام یکسان، با افزایش تعداد دوره‌های سرمایه‌گذاری مورد بررسی، میانگین ثروت مورد انتظار افزایش یافته است ولی با توجه به افزایش عدم اطمینان به علت افزایش دوره‌های پیش‌بینی، معیارهای ریسک با افزایش همراه بوده‌اند. همچنین از مقایسه نتایج جدول ۲ با ۴ و جدول ۳ با ۵، می‌توان به این نتیجه رسید که وقتی تعداد دوره‌های سرمایه‌گذاری مورد بررسی یکسان باشند ولی تعداد سهام موجود در سبد سرمایه‌گذاری افزایش پیدا کند، به خاطر افزایش گوناگونی در سبد سرمایه‌گذاری بازده و ریسک سبد سرمایه‌گذاری کاهش پیدا خواهند کرد.

۵- نتیجه‌گیری و بحث

مسائل بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری تک دوره‌ای بر پایه سه فرض محدودکننده بنا شده بودند: اول، افق سرمایه‌گذاری کوتاه مدت است. دوم، هزینه معاملات در بازار در نظر گرفته شده است. سوم، پارامترهای مسئله به صورت قطعی و از قبل معلوم هستند. در این پژوهش مدلی ارائه کردیم تا بتواند علاوه بر غلبه بر محدودیت‌های بیان شده از کارایی لازم نیز برخوردار باشد. بنابراین مدل بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری چند دوره‌ای مدل میانگین-نیم‌واریانس-ارزش در معرض خطر شرطی را ارائه کردیم تا بتوانیم نواقص مدل

مارکویتز را پوشش دهیم. اولا، مسائل چند دوره‌ای حالت کلی‌تری از مسائل تک دوره‌ای هستند و با دید بلندمدت اقدام به سرمایه‌گذاری می‌کنند. ثانیا، در این مدل هزینه معاملات مطابق با شرایط بورس تهران در نظر گرفته شده است. در نهایت نیز برای در نظر گرفتن شرایط عدم اطمینان از درخت سناریو بهره بردیم.

در این تحقیق ما از سنجه‌های ریسک نیم‌واریانس و ارزش در معرض خطر شرطی استفاده کردیم که همین موضوع نوآوری را در ادبیات موضوع سبد سرمایه‌گذاری چند دوره ای ایجاد کرده است. همچنین یک امکان‌سنجی از کاربرد الگوریتم ژنتیک برای این نوع مسئله انجام دادیم و نتایج نشان داده است که این الگوریتم برای حل این دسته از مسائل مناسب می‌باشد و می توان با استفاده از نتایج حاصله از این الگوریتم به ترسیم مرزهای کارای به دست آمده از الگوریتم پرداخت.

۶- فهرست منابع

* Arnott, R.D., Wagner, W.H., "The measurement and control of trading costs", Financial Analysts Journal, 1990, 6, 73–80.
* Berger, A.J., Mulvey, J.M., "Integrative risk management for individual investors", In Zeimba, W.T., Mulvey, J.M., eds., Worldwide Asset and Liability Modeling. Cambrige University Press, 1996.
* Bertsimas, D., Pachamanova, D., "Robust multiperiod portfolio management in the presence of transaction costs", Computers and Operations Research, 2008, 35, 3–17.
* Calafiore, G.C., "Multi-period portfolio optimization with linear control policies", Automatica, 2008, 44, 2463–2473.
* Carino, D.R., et al, "The Russell-Yasuda Kasai model: an asset/liability model for a Japanese Insurance Company using multistage stochastic programming", Interfaces, 1994, 24, 24-49.
* Çelikyurt, U., Özekici, S., "Multiperiod portfolio optimization models in stochastic markets using the mean-variance approach", European Journal of Operational Research, 2007, 1, 186–202.
* Chan, M. C., et al, "Genetic algorithms in multi-stage asset allocation system", In Proceedingsof IEEE international conference on systems, man and cybernetics, New Jersey: IEEE Press, 2002.
* Das, I. and Dennis, J., "A closer look at the drawbacks of minimising weighted sums of objectives for Pareto set generation in multicriteria optimisation problems", Structural Optimization, 1997, 14(1), 63–69.
* Dempster, M., "The development of the Midas debt management system". In Ziemba, W.T., Mulvey, J.M., eds., Worldwide Asset and Liablity modeling. Cambrige University Press, 1998.
* Fogel, D. B., "An introduction to simulated evolutionary optimization", IEEE transactions on neural networks, 1994, 5(1), 3–14.
* Giove, S., Funari, S., Nardelli, C., "An interval portfolio selection problem based on regret function", European Journal of Operational Research, 2006, 170, 253–264.
* Goldberg, D.E., "Genetic Algorithms in Search", Optimization and Machine learning, Addison-Wesley, New York, 1998.
* Gülpınar, N., Rustem, B., "Worst-case robust decisions for multi-period mean-variance portfolio optimization", European Journal of Operational Research, 2007, 183, 981–1000.
* Gülpınar, N., Rustem, B., Settergren, R., "Multistage stochastic mean-variance portfolio analysis with transaction cost", Innovations, in Financial and Economic Networks, 2003, 3, 46–63.

* Gupta, P., Mehlawat, M.K., Saxena, A., "Asset portfolio optimization using fuzzy mathematical programming", Information Sciences, 2008, 178, 1734–1755.
* Haimes, Y.Y., Lasdon, L.S. and Wismer, D.A., "On a bicriterion formulation of the problems of integrated system identification and system optimization", IEEE Trans. Syst. Man Cybern, 1971, 1, 296–297.
* Hibiki, N., "Multi-period stochastic optimization models for dynamic asset allocation", Journal of Banking & Finance, 2006, 30, 365-390.
* Kall, P., Wallace, S.W., "Stochastic programming", New York, NY: John Wiley, 1994.
* Kallberg, J.G., White, W.R., Ziemba, W.T., "Short term financial planning under uncertainty", Management Science, 1982, 28, 670–682.
* Konno, H., Shirakawa, H., Yamazaki, H., "A mean-absolute deviation-skewness portfolio optimization model", Annals of Operations Research, 1993, 45(2), 205-220.
* Li, D., Ng, W.L., " Optimal dynamic portfolio selection: multiperiod mean-variance formulation", Mathematical Finance, 2000, 10, 387–406.
* Liu, Y.J., Zhang, W.G., Xu, W.J., "Fuzzy multi-period portfolio selection optimization models using multiple criteria", Automatica, 2012, 48, 3042–3053.
* Mao, J.C.T., "Models of capital budgeting, E–V vs. E–S", Journal of Financial and Quantitative Analysis, 1970, 4, 557–675.
* Markowitz, H., "Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments", John Wiley, New York, 1959.
* Michalewicz, Z., "Genetic algorithms + data structures = evolution programs", New York: Springer-Verlag, 1992.
* Mulvey, J.M., Vladimirou, H., "Solving multistage stochastic networks: an application of scenario aggregation", Networks, 1991, 21, 619–643.
* Mulvey, J.M., Vladimirou, H., "Stochastic network programming for financial planning problems", Management Science, 1992, 38, 1642–1664.
* Mulvey, J.M., Zeimba, W.T., "Asset and liability allocation in a global enviroment", In Jarrow, R., Maksimovic, V., Zeimba, W.T., eds., Handbook in Operation Research and Management Science: Finance. Elsevier Science, Amsterdam, 435-463, 1995.
* Pflug, G. Ch., "Some remarks on the value-at-risk and the conditional value-at-risk", In S. Uryasev (Ed.), Probabilistic constrained optimization: Methodology and applications, 2000, 272– 281.
* Pindoriya, N. M., Singh, S. N., Singh, S. K., “Multi-objective mean–variance–skewness model for generation portfolio allocation in electricity markets”, Electric Power Systems Research, 2010, 80, 1314-1321.
* Rockafellar, R. T. and Ursayev, S., "Optimization of Conditional Value-at-Risk", The Journal of Risk, 2000, 2(3), 21-41.
* Rockafellar, R. T., Uryasev, S., "Conditional value-at-risk for general loss distributions", Journal of Banking & Finance, 2002, 26, 1443–1471.
* Roman, D., Dowman, K. D., and Mitra, G., "Mean risk models using two risk measures: A multi-objective approach", Quantitative Finance, 2007, 7(4), 443 - 458.
* Sadjadi, S.J., Seyedhosseini, S.M., Hassanlou, Kh., "Fuzzy multi period portfolio selection with different rates for borrowing and lending", Applied Soft Computing, 2011, 11, 3821–3826.
* Shen, R., Zhang, S., “Robust portfolio selection based on a multi-stage scenario tree”, European Journal of Operational Research, 2008, 191, 864-887.
* Steuer, R., "Multiple Criteria Optimization: Theory, Computation and Application", John Wiley & Sons: New York, 1986.
* Stone, B., "A general class of three-parameter risk measures", The Journal of Finance, 1973, 28(3), 675-685.

* Sun, J., Fnag, W., Wu, X., Lai, C.H., Xu, W., "Solving the multi-stage portfolio optimization problem with a novel particle swarm optimization", Expert Systems with Applications, 2011, 38, 6727–6735.
* Szego, G. P., "No more VaR", Journal of Banking & Finance, 2002, 26, 1247-1252.
* Takano, Y., Gotoh, J.y., "Constant Rebalanced Portfolio Optimization Under Nonlinear Transaction Costs", Asia-Pacific Finance Markets, 18:191–211, 2011.
* Wei, S.Z., Ye, Z.X., "Multi-period optimization portfolio with bankruptcy control in stochastic market", Applied Mathematics and Computation, 2007, 186, 414–425.
* Xia, Y.S., et al, "A model for portfolio selection with order of expected returns", Computers & Operations Research, 2000, 27, 409–422.
* Yan, W., Li, S.R., "A class of multi-period semi-variance portfolio selection with a four-factor futures price model", Journal of Applied Mathematics and Computing, 2009, 29, 19–34.
* Yan, W., Miao, R., Li, S.R., "Multi-period semi-variance portfolio selection: Model and numerical solution", Applied Mathematics and Computation, 2007, 194, 128–134.
* Yu, J.R., Lee, W.Y., "Portfolio rebalancing model using multiple criteria", European Journal of Operational Research, 2011, 209, 166–175.
* Zhang, W.G., Liu, Y.j., Xu, W.J., "A possibilistic mean-semivariance-entropy model for multi-period portfolio selection with transaction costs", European Journal of Operational Research, 2012, 222, 341–349.
* Zhang, X.L, Zhang, K.C., "Using genetic algorithm to solve a new multi-period stochastic optimization model", Journal of Computational and Applied Mathematics, 2009, 231, 114-123