مجله مهندسی مالی و مدیریت اوراق بهادار
شماره سی‌ام / بهار ۱۳۹۶

بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری به وسیله ارزش در معرض ریسک تحت نظریه اعتبار با رویکرد اعداد Z

امیرسینا جیرفتی[1]
امیرعباس نجفی[2]

تاریخ دریافت: ۹۵/۰۸/۰۵ تاریخ پذیرش: ۹۵/۰۹/۱۴

چکیده

نظریه اعدادZ اولین بار توسط لطفی‌زاده در سال ۲۰۱۱ مطرح گردید. این نظریه به توصیف عدم قطعیت اطلاعات می‌پردازد به طوری‌که هر عدد z به‌وسیله یک جفت عدد فازی نمایش داده می‌شود. به دلیل وجود عدم قطعیت در بازارهای مالی می‌توان از این نظریه در انتخاب سبد سرمایه‌گذاری بهره جست. بطوریکه عامل اول عددz بیانگر بازده فازی دارایی و عامل دوم عددz میزان اعتبار پیش‌بینی عامل اول می‌باشد. برای کاراتر شدن مدل انتخاب سبد سرمایه‌گذاری می‌توان از معیار ارزش در معرض ریسک که از سنجه‌های نوین ریسک می‌باشد استفاده کرد. با توجه به در نظرگرفتن عدم‌قطعیت در بازده دارایی‌ها و استفاده از سنجه ارزش در معرض ریسک، این مدل می‌تواند مدل مناسبی در انتخاب سبد سرمایه‌گذاری باشد. مزیت این روش نسبت به روش‌های فازی مرسوم، درنظر گرفتن عدم قطعیت در نظر خبرگان و تخصیص اعتبار به نظر آنها برای برآورد پارامترهای فازی می‌باشد. درنهایت نیز با درنظر گرفتن تعدادی دارایی از بورس اوراق بهادار تهران یک مثال عددی از این مدل ارائه می‌دهیم.

واژه‌های کلیدی: انتخاب سبد سرمایه‌گذاری، ارزش در معرض ریسک فازی، نظریه اعتبار فازی، اعدادZ.

۱- دانشجوی کارشناسی ارشد مهندسی مالی، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
۲- دانشیار دانشکده مهندسی صنایع، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی aanajafi@kntu.ac.ir

۱- مقدمه

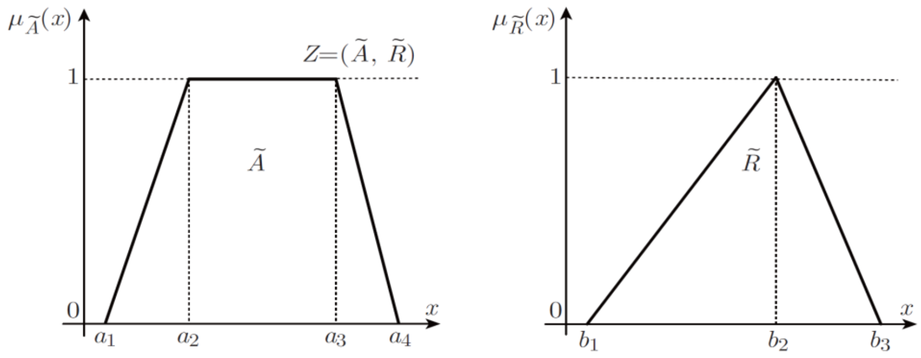
فرایند تصمیم‌گیری نیازمند وجود اطلاعات می‌باشد. موضوع مهم در قبال این اطلاعات معتبر بودن و قابل اتکاء بودن آنها است. در دنیای واقعی بیشتر اطلاعات از عدم قطعیت برخوردار است و ما باید در فرآیند تصمیم‌گیری این عدم قطعیت را لحاظ نماییم. از طرفی نظریه‌های فازی تا حدودی می‌تواند نمایانگر این عدم قطعیت باشد. اما از سوی دیگر نکته مهم آن است که نظریه‌های فازی به تنهایی نمی‌توانند این عدم قطعیت را به طور کامل در محاسبات منظور کنند. برای مثال برآورد پارامترهای فازی عموما از طریق دانش خبرگان صورت می‌گیرد. اما میزان اطمینان به نظر کارشناسان مختلف تفاوت دارد و نمی‌توان عدم قطعیت و تفاوت در اعتبار نظر آنان را نادیده گرفت. در این رابطه لطفی زاده(۲۰۱۱) مفهومی به‌نام اعدادz[1] را مطرح نمود. اعدادz درصدد انجام محاسبات براساس اعدادی می‌باشد که به طور کامل قابل‌اتکا نمی‌باشند. بر این اساس هر عددz براساس یک جفت عدد فازی (A,B) بیان می‌گردد. عامل اول (A)، یک محدودیت برای مقدار حقیقی متغیر موردنظر می‌باشد. عامل دوم (B) نیز میزان اعتبار عامل اول را نشان می‌دهد. در بازارهای مالی نیز، همواره نقش وجود اطلاعات صحیح و معتبر نقشی انکارناپذیر در فرآیند تصمیم‌گیری است. اما سوال اساسی در رابطه با این مسئله آن است که تا چه حد می‌توان به اعداد موجود در این اطلاعات اتکا کرد؟ با توجه به ماهیت بازارهای مالی و وجود عدم اطمینان در اطلاعات موجود در این بازار ها ما از اعدادz برای توصیف بازده آتی در مسئله انتحاب سبد سرمایه‌گذاری استفاده می‌کنیم. برای مثال فرض کنید یک کارشناس بازار سرمایه معتقد است که بازده یک سهام خاص در یک سال آینده از عدد فازی A پیروی می‌کند اما میزان اعتبار این پیش‌بینی را می‌توان به وسیله یک عدد فازی دیگر نظیر B نشان داد. بنابراین می‌توان بازده این سهم را از طریق یک عدد Z=(A,B) نشان داد. البته مفهوم اعدادz اولین اقدام برای نشان دادن عدم‌قطعیت در اعداد فازی نبود. بلکه نظریه مجموعه‌های فازی نوع دوم نیز که در آن درجه عضویت یک مجموعه فازی، خود فازی می‌باشد، قبل از نظریه اعدادz بیان شد. اما با این وجود این نظریه برخلاف نظریه اعدادz قادر به نشان دادن میزان اعتبار در غالب جملات نمی‌باشد.

در بخش بعدی مفاهیمی از اعدادz و روشی برای تبدیل این اعداد به اعداد فازی کلاسیک و همچنین محاسبه ارزش در معرض ریسک با استفاده از نظریه اعتبار فازی و مطالعات صورت گرفته بر روی اعدادz و مسئله انتخاب سبد سرمایه‌گذاری به اختصار ارائه می‌شود. بخش سوم شامل فرضیه پژوهش بوده و روش‌شناسی پژوهش در بخش چهارم ارائه می‌گردد. مدل مسئله و متغیرهای آن در بخش پنجم معرفی شده و در بخش بعدی نیز این مدل برروی تعدادی از دارایی‌های بورس اوراق بهادار تهران پیاده‌سازی می‌شود. تفسیر و تحلیل نتایج حاصل از پیاده‌سازی مدل و همچنین جمع‌بندی موضوع به ترتیب در بخش‌های هفتم و هشتم ارائه می‌گردد.

۲- مبانی نظری و مروری بر پیشینه پژوهش

۲-۱- نظریه اعداد z

همان‌طور که عنوان شد نظریه اعدادz اولین بار توسط لطفی‌زاده(۲۰۱۱) مطرح گردید. او از این نظریه برای ایجاد اطلاعاتی خلاصه به منظور تصمیم‌گیری در فعالیت‌های روزمره بهره جست و مثال‌های ساده‌ای را ارائه کرد. به عبارت دیگر، مفهوم اعدادZ، مبنایی را برای انجام محاسبات از طریق اعدادی که به‌طور کامل قابل اتکاءنیستند فراهم می‌کند. یک عددz عبارت است از یک جفت عدد فازی به شکل $z = (\tilde{A}, \tilde{R})$ به طوری‌که، عامل اول($\tilde{A}$) یک محدودیت روی مقدار حقیقی متغیر غیرقطعی X می‌باشد. اما عامل دوم ($\tilde{R}$) عبارت است از اندازه‌ای از میزان قابل اعتمادبودن عامل اول. اعداد $\tilde{A}$ و $\tilde{R}$ نشان‌دهنده دو عدد فازی می باشند. برای مثال اگر $\tilde{A}$ یک عدد فازی ذوزنقه‌ای و $\tilde{R}$ یک عدد فازی مثلثی باشد می‌توان این اعداد را به شکل زیر نشان داد.



شکل(۱): مثالی از یک عددz

برای مثال فرض کنید یک کارشناس بازار سرمایه معتقد است که بازده یک سهم خاص در طول یک سال از مقدار مشخص a_1 کمتر نمی‌شود. در عین‌حال او معتقد است که این بازده نمی‌تواند از مقدار a_4 فراتر رود. همچنین او بازده سهم را بین دوعدد a_2 و a_3 با عدد عضویت ۱ تشخیص می‌دهد. اما تا چه حد می‌توان به پیش‌بینی او اعتماد نمود؟ میزان اعتبار پیش‌بینی این شخص را می‌توان با توجه به پیش‌بینی‌های قبلی وی با استفاده از یک عدد فازی دیگر همچون $\tilde{R}$ توصیف کرد. بنابراین بازده آن سهم در طول یک‌سال آینده را می‌توان از طریق یک عددz به شکل $z = (\tilde{A}, \tilde{R})$ نشان داد. A و R گاهی اوقات از طریق مباحث کلامی و در غالب کلمات طبیعی بیان می‌گردند. برای مثال اگر متغیر X برابر "پیش‌بینی بودجه لازم جهت انجام یک پروژه" باشد، عامل A می‌تواند به شکلی همچون "تقریبا دو میلیارد ریال" و عامل R به شکل "بسیار محتمل" بیان گردند. سپس عوامل A و R به‌شکل اعداد فازی تبدیل می‌گردند.

محاسبات اعدادz

فرض کنید: $X = (A_x, B_x)$ و $Y = (A_Y, B_Y)$ دوعددZ باشند. جمع دوعدد X و Y نیز یک عددZ به شکل $Z = (A_z, B_z)$ بوده و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(A_x, B_x) + (A_Y, B_Y) = (A_x + A_Y, B_Z) \tag{1}$$

جایی‌که $A_X + A_Y$ جمع دوعدد فازی A_X و A_Y بوده و از طریق محاسبات فازی انجام می‌گیرد. اما موضوع مهم محاسبه B_Z می‌باشد.

فرض کنید P_X و P_Y به‌ترتیب توابع چگالی احتمال X و Y باشند. حال اگر P_X و P_Y شناخته‌شده باشند، تابع چگالی احتمال Z از طریق P_X و P_Y، ($P_Z = P_X \circ P_Y$) و به شکل زیر محاسبه می‌شود.

$$P_{X+Y}(v) = \int_R P_X(u) P_Y(v-u) du \tag{2}$$

از طرف دیگر گاهی P_X و P_Y مشخص نبوده اما محدودیت‌هایی بر روی آن‌ها به شکل زیر وجود دارد:

$$\begin{aligned} &\int_R \mu_{A_X}(u) P_x(u) du \quad \text{is} \quad \mathrm{B_X} \\ &\int_R \mu_{A_Y}(u) P_Y(u) du \quad \text{is} \quad \mathrm{B_Y} \end{aligned} \tag{3}$$

در این‌صورت با استفاده از اصل گسترش زاده[۲] می‌توان محدودیتی بر روی P_Z ایجاد کرد:

$$\begin{aligned} &\mu_{P_Z}(P_Z) = \sup_{PX, PY} \left(\mu_{B_X}\left(\int_R \mu_{A_X}(u) P_X(u) du\right) \wedge \mu_{B_Y}\left(\int_R \mu_{A_Y}(u) P_Y(u) du\right)\right) \\ &subject \quad \text{to:} \\ &P_Z = P_X \circ P_Y \\ &\int_R P_X(u) du = ۱\,, \quad \int_R P_Y(u) du = ۱ \end{aligned} \tag{4}$$

حال اگر P_Z شناخته شود، B_Z از طریق رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$B_Z = \int_R \mu_{A_Z}(u) P_Z(u) du \tag{5}$$

جایی‌که:

$$\mu_{A_Z}(u) = \sup_v (\mu_{A_X}(v) \wedge \mu_{A_Y}(u - v)) \quad (۶)$$

بنابراین، دانستن اینکه محدودیتی بر روی P_Z وجود دارد، برای به‌کارگیری اصل گسترش زاده برای محاسبه B_Z ضروری است. نتیجه می‌تواند به شکل زیر بیان گردد:

$$\begin{aligned} &\mu_{B_Z}(w) = \sup_{P_Z} \mu_{P_Z}(P_Z) \\ &subject \ \ \text{to:} \\ &\text{w}=\int_R \mu_{A_Z}(u) P_Z(u) du \end{aligned} \quad (۷)$$

روند محاسباتی بالا می‌تواند علاوه بر جمع برای سایر عملیات‌ها نیز به‌کار گرفته شود. اما همان‌طور که مشاهده می‌شود محاسبات مستقیم به‌وسیله اعدادz، محاسباتی سخت و طولانی بوده و دارایی شرایطی محدود شونده می‌باشد. از این رو تقریبا در تمامی پژوهش‌هایی که از کاربرد اعدادz در ادبیات موضوع وجود دارد، این اعداد ابتدا به اعداد فازی کلاسیک تبدیل شده و سپس محاسبات به وسیله اعداد فازی صورت می‌گیرد. این روند موجب ساده‌تر شدن محاسبات می‌گردد. در بخش بعدی چگونگی تبدیل اعدادz را به اعداد فازی کلاسیک شرح می‌دهیم.

تعریف: انتظار فازی از یک مجموعه فازی[۳]

فرض کنید A یک مجموعه فازی روی مجموعه جهانی X باشد $A = \{\langle x, \mu_A(x)\rangle | x \epsilon X\}$ که در این رابطه $\mu_A: X \to [0,1]$ تابع عضویت A می‌باشد. انتظار فازی از یک مجموعه فازی از طریق رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$E_A(x) = \int_X x \mu_A(x) dx \quad (۸)$$

این مفهوم با مقدار مورد انتظار در محیط‌های احتمالی متفاوت می‌باشد. حال می‌توان با توجه به مطالب فوق یک عددz را به یک عدد فازی کلاسیک تبدیل نمود.

فرض کنید $z = (\tilde{A}, \tilde{R})$ یک عددz می‌باشد به طوری‌که $\tilde{A} = \{\langle x, u_{\tilde{A}}(x)\rangle | x \epsilon [0,1]\}$ و $\tilde{R} = \{\langle x, \mu_{\tilde{R}}(x)\rangle | x \epsilon X\}$ که $u_{\tilde{A}}(x)$ یک تابع عضویت ذوزنقه‌ای و $\mu_{\tilde{R}}(x)$ یک تابع عضویت مثلثی می‌باشند. برای تبدیل عددz به یک عدد فازی کلاسیک به ترتیب مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

۱) ابتدا جزء دوم عددz (مقدار قابلیت اطمینان) را به یک حالت عددی[۴] تبدیل می‌کنیم:

$$\alpha = \frac{\int x \mu_{\tilde{R}}(x) dx}{\int \mu_{\tilde{R}}(x) dx} \quad (۹)$$

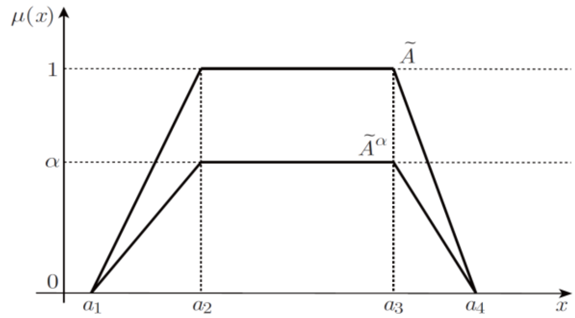
۲) وزن جزء دوم (مقدار قابلیت اطمینان) را با جزء اول (محدودیت) ترکیب می‌کنیم که عددz وزنی به شکل $\tilde{z}^{\alpha} = \{\langle x, \mu_{\tilde{A}^{\alpha}}(x)\rangle | \mu_{\tilde{A}^{\alpha}}(x) = \alpha\mu_{\tilde{A}}(x), x\epsilon[0,1]\}$ می‌باشد.

قضیه(۱):

$$E_{\tilde{A}^{\alpha}}(x) = \alpha E_{\tilde{A}}(x), x \in X \qquad (۱۰)$$

$$s.t. \quad \mu_{\tilde{A}^{\alpha}}(x) = \alpha\mu_{\tilde{A}}(x), x \in X \qquad (۱۱)$$

که عددz بعد از ضرب مقدار قابلیت اطمینان را می‌توان در شکل زیر نشان داد:



شکل(۲): عددz بعد از ضرب مقدار قابلیت اطمینان

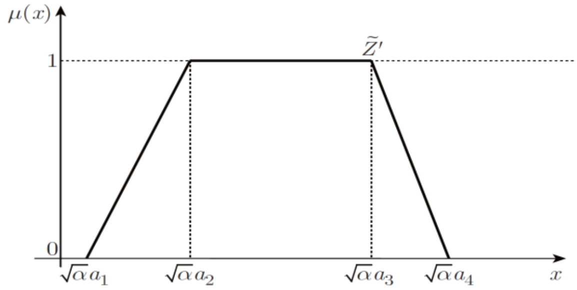
۳) حال عدد فازی غیرمعمول (محدودیت وزنی) را به اعداد فازی معمول تبدیل می‌کنیم. مجموعه فازی بدست آمده را می‌توان به شکل $\tilde{Z}' = \left\{\langle x, \mu_{\tilde{z}'}(x)\rangle \middle| \mu_{\tilde{z}'}(x) = \mu_{\tilde{A}}\left(\frac{x}{\sqrt{\alpha}}\right), x \in [0,1]\right\}$ نشان داد که از طریق قضیه (۳) بیان می‌شود که $\tilde{Z}'$ دارای انتظار فازی یکسانی با $\tilde{z}^{\alpha}$ می‌باشد.

قضیه(۲):

$$E_{\tilde{z}'}(x) = \alpha E_{\tilde{A}}(x), x \in \sqrt{\alpha}X \qquad (۱۲)$$

$$s.t. \quad \mu_{\tilde{z}'}(x) = \mu_{\tilde{A}}\left(\frac{x}{\sqrt{\alpha}}\right), x \in \sqrt{\alpha}X \qquad (۱۳)$$

عدد فازی به وجود آمده از عددz را می‌توان در شکل زیر مشاهده کرد:



شکل(۳): عدد فازی تولیدشده از عدد z

از روابط (۱۰) و (۱۲) می‌توان قضیه زیر رانتیجه گرفت:

قضیه(۳):

$$E_{\tilde{z}'}(x) = E_{\tilde{A}^{\alpha}}(x) \qquad (۱۴)$$

برای اثبات قضیه های (۱) تا (۳) می‌توان به مقاله کانگ و همکاران(۲۰۱۲) مراجعه نمود.

به عبارت دیگر، برای تبدیل یک عدد $z = (\tilde{A}, \tilde{R})$ به یک عدد فازی کلاسیک کافیست ابتدا مقدار α را از طریق رابطه(۹) به‌دست آورده، از آن جذر گرفته و در هریک از پارامترهای عامل اول عددz یعنی $\tilde{A}$ ضرب کنیم.

۲-۲- ارزش در معرض ریسک تحت نظریه اعتبار در محیط فازی

در این قسمت ابتدا ارزش در معرض ریسک اعتباری[۵] را بررسی کرده و روابط آن را استخراج می‌کنیم. سپس با درنظر گرفتن اعداد فازی ذوزنقه‌ای برای بازده دارایی‌ها روابط ارزش در معرض ریسک تحت نظریه اعتبار را بدست می‌آوریم.

فرض کنید ξ یک متغیر فازی و $\alpha \in (0,1]$ سطح اطمینان ریسک باشد. در این‌صورت ارزش در معرض ریسک اعتباری برای ξ به شکل تابع $\xi VaR: (0,1] \to R$ بیان شده و به صورت رابطه(۱۵) محاسبه می شود.

$$\xi VaR(\alpha) = -inf\{x | cr\{\xi \le x\} \ge \alpha\} \qquad (۱۵)$$

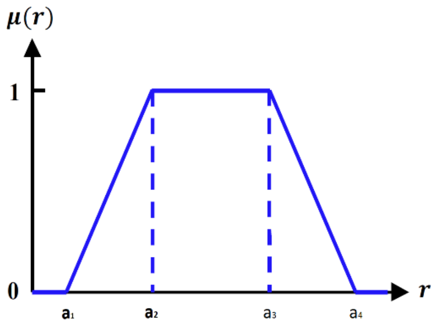
همچنین ارزش در معرض ریسک اعتباری $\xi VaR(\alpha)$ یک کوانتیل برای توزیع اعتبارΦ از متغیر فازی می باشد. برای سطح اطمینانی مشخص از ریسک برابر با $0 < \alpha \le 1$ خواهیم‌داشت:

$$\xi VaR(\alpha) = -inf\{x | \Phi(x) \ge \alpha\} = -\Phi^{-1}(\alpha) \qquad (۱۶)$$

که در آن $\Phi^{-1}(\alpha)$ تابع معکوس تعمیم‌یافته $\Phi(x)$ می‌باشد.

علاوه‌براین، ارزش در معرض ریسک اعتباری دارای خواص و ویژگی‌هایی نظیر؛ همجنسی مثبت[6]، یکنواختی[7]، برگردان تغییر ناپذیر[8]، یکنواختی انتقال[9]، زیرافزایشی تحت استقلال[10]، تحدب تحت استقلال[11] و غیره می‌باشد. برای مشاهده و اثبات این خواص می‌توان از منابع به مقاله پنگ (۲۰۰۸) مراجعه کرد.

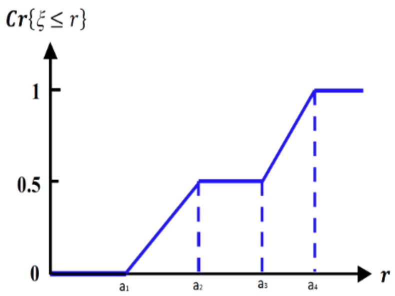
اگر بخواهیم ارزش در معرض ریسک اعتباری را برای یک متغیر فازی ذوزنقه‌ای با توجه به روابط قبل به دست آوریم، ابتدا یک عدد فازی ذوزنقه‌ای را به شکل $\xi = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ درنظر بگیرید. تابع عضویت این متغیر به شکل رابطه(۱۷) می باشد.



شکل(۴): تابع عضویت عدد فازی ذوزنقه‌ای

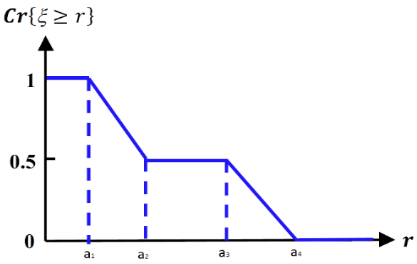
$$\mu(r) = \begin{cases} \dfrac{r-a_1}{a_2-a_1}, if \ \ a_1 \le r \le a_2, \\ 1, if \ \ a_2 \le r \le a_3 \\ \dfrac{a_4-r}{a_4-a_3}, if \ \ a_3 \le r \le a_4, \\ 0, \ otherwise. \end{cases} \qquad (۱۷)$$

توزیع اعتبار برای متغیر فازی ذوزنقه‌ای ξ به شکل رابطه(۱۸) و (۱۹) می‌باشد:



شکل(۵): توزیع اعتبار برای متغیر فازی ذوزنقه‌ای ($\xi \le r$)

$$Cr\{\xi \le r\} = \begin{cases} 0, if \ \ r \le a_1 \\ \dfrac{r-a_1}{2(a_2-a_1)}, if \ \ a_1 \le r \le a_2, \\ \dfrac{1}{2}, if \ \ a_2 \le r \le a_3, \\ \dfrac{a_4-2a_3+r}{2(a_4-a_3)}, if \ \ a_3 \le r \le a_4, \\ 1, if \ \ a_4 \le r. \end{cases} \qquad (۱۸)$$



شکل(۶): توزیع اعتبار برای متغیر فازی ذوزنقه‌ای ($\xi \geq r$)

$$Cr\{\xi \geq r\} = \begin{cases} 1, if \quad r \leq a_1 \\ \dfrac{2a_2 - r - a_1}{2(a_2 - a_1)}, if \quad a_1 \leq r \leq a_2, \\ \dfrac{1}{2}, if \quad a_2 \leq r \leq a_3, \\ \dfrac{a_4 - r}{2(a_4 - a_3)}, if \quad a_3 \leq r \leq a_4, \\ 0, if \quad a_4 \leq r. \end{cases} \qquad (۱۹)$$

حال می‌توان به راحتی مقدار ارزش در معرض ریسک اعتباری را در سطح اطمینان مشخصی از ریسک ($0 < \alpha \leq 1$) بدست آورد. به طوری‌که برای عدد ذوزنقه‌ای $\xi = (a_1 , a_2 , a_3 , a_4)$ اگر $\alpha \leq 0.5$ داریم:

$$\xi VaR_{1-\alpha} = (2\alpha - 1)a_1 - 2\alpha a_2 \qquad (۲۰)$$

همچنین اگر $\alpha > 0.5$ باشد، خواهیم داشت:

$$\xi VaR_{1-\alpha} = (2\alpha - 2)a_3 - (2\alpha - 1)a_4 \qquad (۲۱)$$

لازم به‌ذکر است از آنجایی که در محاسبات ارزش در معرض ریسک سطح اطمینان ($1\text{-}\alpha$) معمولا بیشتر از ۹۰٪ درنظر گرفته می‌شود، تقریبا همیشه از رابطه (۲۰) برای محاسبه ارزش در معرض ریسک استفاده می‌گردد.

۲-۳- مقدار مورد انتظار متغیر فازی تحت نظریه اعتبار

مقدار مورد انتظار متغیر فازی ξ نیز توسط لیو و لیو (۲۰۰۷) به شکل رابطه(۲۲) تعریف شد:

$$E[\xi] = \int_{0}^{+\infty} cr\{\xi \geq r\}dr - \int_{-\infty}^{0} cr\{\xi \leq r\}dr \qquad (۲۲)$$

البته رابطه (۲۲) مشروط بر این است که حداقل یکی از دو انتگرال محدود باشد.
بر این اساس برای هر متغیر فازی ذوزنقه‌ای $\xi = (a_1 , a_2 , a_3 , a_4)$، مقدار مورد انتظار از طریق رابطه (۲۳) بدست می‌آید:

$$E[\xi]=\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4} \quad (23)$$

بنابراین داریم:

$$E[\sum_{i=1}^{n}x_i\xi_i]=\sum_{i=1}^{n}x_i\,\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4} \quad (24)$$

۲-۴- پیشینه پژوهش

بعد از آنکه نظریه اعدادz توسط لطفی‌زاده در سال ۲۰۱۱ برای اولین بار مطرح شد، این نظریه به‌سرعت در علوم مختلف نظیر اقتصاد، بازرگانی، برنامه‌ریزی و فرآیند تصمیم‌گیری و تحلیل آن محبوب گردید. سپس کانگ و همکاران(۲۰۱۲) رویکردی را برای تبدیل اعدادz به اعداد فازی کلاسیک ارائه کردند که به‌طور گسترده در پژوهش‌های بعدی در زمینه‌های مختلف به‌کار گرفته شد. آنها همچنین رویکردی را برای تصمیم‌گیری چندضابطه‌ای برمبنای اعدادz معرفی کردند. یاگر (۲۰۱۲) نیز به تشریح مفهوم اعدادz و ارائه مثال هایی از آن پرداخت. آزاده و همکاران (۲۰۱۳) نیز از اعدادz در فرآیند تحلیل سلسله مراتبی (AHP) استفاده کردند و مفهوم جدیدی با نام Z-AHP را معرفی نمودند که از اعدادz به جای اعداد طبیعی در تحلیل سلسله مراتبی استفاده می‌شد. همچنین پال و همکاران (۲۰۱۳) یک نگرش کلی را با رویکرد اعدادz در مسایل محاسبات بر مبنای کلمات[12] به کار گرفتند. گارداشووا (۲۰۱۴) نیز از کاربرد اعدادz برای حل مسایل تصمیم‌گیری بهره جست که رویکرد او به رویکرد تحلیل سلسله مراتبی بر مبنای اعدادz بسیار نزدیک بود. علاوه براین علی‌اف و همکاران(۲۰۱۴) نحوه انجام محاسبات ریاضی و عملگرهای اصلی را بین اعدادz گسسته نشان دادند. علی‌اف(۲۰۱۵) همچنین به تصمیم‌سازی براساس اطلاعاتz [13] اشاره نمود و رویکرد های مختلفی از جمله محاسبات مستقیم به وسیله اعدادz بدون تبدیل به اعداد فازی کلاسیک را شرح داد. سدی نژاد و انوری (۲۰۱۵) نیز از اعدادz در تحلیل پوششی داده‌ها (DEA) استفاده نمودند و از مفهومی به نام Z-DEA نام بردند. در این مقاله ما از اعدادz برای نشان دادن بازده آتی دارایی ها در مسئله انتخاب سبد سرمایه‌گذاری استفاده می‌کنیم.

مسئله انتخاب سبد سرمایه‌گذاری یکی از مسائل کلاسیک دنیای مالی است که اولین بار توسط مارکویتز (۱۹۵۲) مطرح گردید و شامل دو جز اصلی و جدایی‌ناپذیر بازده و ریسک است. مارکوییتز اولین فردی بود که ریسک دارایی‌های مالی را به صورت کمی اندازه‌گیری نمود و انحراف معیار بازده دارایی‌ها را به عنوان ریسک در نظر گرفت. اما این معیار هرگونه انحرافی چه بالاتر و چه پایین‌تر از بازده انتظاری را به عنوان ریسک تلقی می‌کند و درصدد کاهش آن می‌باشد. در حالی که بازده بیشتر از میانگین مطلوب سرمایه‌گذاران می‌باشد. برای حل این مشکل سنجه نیم‌واریانس معرفی شد که امید ریاضی مجذور انحرافات منفی می‌باشد. اما پس از آن کونو و یامازاکی (۱۹۹۱) یک سنجه ریسک جدید را توسعه دادند. آنها پیشنهاد دادند برای سنجش انحرافات از میانگین بازده انتظاری، به جای واریانس از قدرمطلق انحراف از میانگین

استفاده شود. استفاده از قدرمطلق انحراف از میانگین باعث می‌شود که مدل انتخاب سبد سرمایه‌گذاری به یک مدل برنامه‌ریزی خطی تبدیل شود. اما فرض مهم در سنجه‌های ریسک عنوان شده، توزیع نرمال بازده دارایی‌ها می‌باشد. فرض داشتن توزیع نرمال برای عوامل ریسک در بازده دارایی‌های مالی در دهه‌های اخیر به طور گسترده مورد بحث قرار گرفته‌است. برخی از مطالعات اولیه همچون مندلبورت(۱۹۶۳) و فاما(۱۹۶۵) نشان داد که بازده دارایی‌ها دارای قله‌ای بلندتر و دنباله‌ای پهن‌تر نسبت به توزیع نرمال به خصوص در افق‌های زمانی کوتاه می‌باشند. پس از آن نیز برخی از محقیقین همچون امبرکز و همکاران(۲۰۰۲)، هاسکینگ و همکاران(۲۰۰۰) و مکنیل و فری(۱۹۹۹) با استفاده از مجموعه اطلاعات مختلف از بازارهای مالی، انحرافات سیستماتیک و پیوسته‌ای از حالت نرمال با مشخصه‌های قله بلندتر و دنباله پهن‌تر نشان دادند. در سالیان اخیر، محققان مطالعات زیادی را در مورد روش‌های اندازه‌گیری ریسک در مسئله انتخاب سبد سرمایه‌گذاری انجام داده‌اند. سنجه ارزش در معرض ریسک در ابتدای دهه ۱۹۹۰ توسط جی‌پی مورگان معرفی شد و پس از آن به سرعت به عنوان یکی از محبوب‌ترین سنجه‌های ریسک شناخته شد. چرا که این سنجه به اندازه‌گیری ریسک نامطلوب پرداخته و فرض نرمال بودن بازده دارایی‌ها را شامل نمی‌شود. لینسمیر و پیرسون (۲۰۰۰) ارزش در معرض خطر را به عنوان حداکثر زیان یک دارایی در سطح اطمینان معین و در زمانی معین معرفی نمودند. همچنین جوریون (1997) ارزش در معرض ریسک را بدترین زیان یک دارایی در افق زمانی مشخص، در شرایط نرمال بازار و در سطح اطمینان مشخصی معرفی کرد و مشاهده نمود که VaR می‌تواند برای اندازه‌گیری ریسک در مسئله انتخاب سبد سرمایه‌گذاری استفاده شود. علاوه بر این او محاسباتی را برای اندازه‌گیری VaR در مدل‌های تصادفی معرفی نمود. گارسیا (۲۰۰۷) نیز از ارزش در معرض ریسک به عنوان روشی برای اندازه‌گیری و کنترل ریسک در مدیریت پرتفوی استفاده کرد. علاوه بر آن هانگ (۲۰۰۷) از طریق ارائه نتایج عددی از داده‌های واقعی بازارها، کاربردی بودن استفاده از VaR درمسئله انتخاب سبد سرمایه‌گذاری را نشان داد. همچنین وانگ و همکاران (۲۰۱۱) نیز مدل انتخاب پرتفوی فازی خود را بر مبنای ارزش در معرض ریسک بنا نهادند و با استفاده از مثال‌های عددی کاربرد آن را نشان دادند. در این مقاله، ما از سنجه ارزش در معرض ریسک برای مدل‌سازی ریسک استفاده نموده‌ایم.

۳- فرضیه پژوهش

۱) با استفاده از نظریه اعتبار و در نظر گرفتن بازده آتی دارایی‌ها به شکل اعداد z و همچنین به کمک سنجه ارزش در معرض ریسک اقدام به مدل‌سازی و حل مسئله انتخاب سبد سرمایه‌گذاری می‌کنیم.

۲) مدل فوق می‌تواند به عنوان مدلی کارا در بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری به‌کار گرفته شود.

۴- روش‌شناسی پژوهش

روش انجام پژوهش شامل مراحل زیر است:

در گام نخست باید بازده آتی سهام را به شکل یک جفت عدد غیرقطعی (فازی) و یا به عبارت دیگر به شکل یک عددz مشخص نمود. برای تعیین حدود تغییر در بازده آتی اوراق بهادار سه فاکتور زیر در نظر گرفته شد:

۱) میانگین حسابی: اگرچه میانگین حسابی بازده یک دارایی نباید به صورت مستقیم به عنوان بازده آتی بیان شود اما می‌تواند یک تقریب خوب برای محاسبه آن درنظر گرفته شود.

۲) گرایش بازده تاریخی: اگر بازده‌های اخیر اوراق بهادار افزایشی باشند، می‌توان باور داشت که بازده انتظاری اوراق بهادار بر مبنای داده‌های تاریخی از میانگین حسابی بیشتر است و بالعکس. این عامل می‌تواند در تخمین بازده آتی دارایی‌ها تاثیر بسزایی داشته باشد.

۳) استفاده از صورت‌های مالی و نظر خبرگان: استفاده از نظر خبرگان به‌پیش‌بینی‌هایی بر مبنای گزارش‌های مالی و تجربهٔ شخصی متخصصان بستگی دارد.

پیش بینی بازده آتی دارایی‌ها (عامل اول در عددz) به شکل اعداد فازی ذوزنقه‌ای درنظر گرفته شده است. همچنین میزان اعتبار این پیش‌بینی‌ها (عامل دوم در عددz) با توجه به میزان نوسانات هر سهم در طول چندسال اخیر و همچنین نظر کارشناسان در مورد میزان محتمل بودن پیش‌بینی‌ها، به شکل اعداد فازی مثلثی متقارن درنظر گرفته شده است.

برای مثال فرض کنید یک کارشناس بازار سرمایه اعتقاد دارد بازده یک سهم خاص در یک‌سال آینده را می‌توان از طریق یک عدد فازی ذوزنقه‌ای به شکل $\tilde{A} = (0.12, 0.22, 0.28, 0.35; 1)$ بیان کرد. این عدد بیانگر آن است که بازده سهم در سال آینده کمتر از ۱۲٪ نخواهد شد. از طرف دیگر بازده این سهم بیشتر از ۳۵٪ نمی‌شود. همچنین عدد عضویت بازده سهم در محدوده ۲۲٪ تا ۲۸٪ برابر ۱ می‌باشد. حال با توجه به سابقه این فرد و همچنین میزان پیش‌بینی‌پذیر بودن سهم در طول سالیان اخیر، می‌توان میزان اعتماد به پیش‌بینی او را برابر یک عدد فازی مثلثی دیگر همچون $\tilde{R} = (0.8, 0.9, 1; 1)$ نشان داد. به عبارت دیگر ما احتمال صحیح بودن پیش‌بینی این فرد را از طریق عدد فازی $\tilde{R}$ بیان می‌کنیم. بنابراین عددz نشان‌دهنده بازده آتی این سهم عبارت است از: $z = (\tilde{A}, \tilde{R}) = [(0.12, 0.22, 0.28, 0.35; 1), (0.8, 0.9, 1; 1)]$.

در گام بعدی می‌توان با روش بیان شده در بخش(۲-۱) این عددz را به یک عدد فازی کلاسیک تبدیل نمود. برای این کار ما مراحل زیر را به ترتیب انجام می‌دهیم:

مرحله اول: تبدیل قابلیت اطمینان پیش‌بینی کارشناس به عدد شکست به وسیله رابطه(۲):

$$\alpha = \frac{\int x\mu_{\tilde{R}}(x)dx}{\int \mu_{\tilde{R}}(x)dx} = ۰.۹$$

مرحله دوم: اضافه نمود وزن قابلیت اطمینان به محدودیت:

$$\tilde{z}^{\alpha} = (۰.۱۲, ۰.۲۲, ۰.۲۸, ۰.۳۵; ۰.۹)$$

مرحله سوم: تبدیل عددz وزنی به عدد فازی نرمال با رویکرد عنوان شده:

$$\tilde{z}\,' = (\sqrt{۰.۹}\times۰.۱۲,\ \sqrt{۰.۹}\times۰.۲۲,\ \sqrt{۰.۹}\times۰.۲۸,\ \sqrt{۰.۹}\times۰.۳۵;\ ۱)$$
$$= (۰.۹۴۸۷\times۰.۱۲,\ ۰.۹۴۸۷\times۰.۲۲,\ ۰.۹۴۸۷\times۰.۲۸,\ ۰.۹۴۸۷\times۰.۳۵;\ ۱)$$
$$= (۰.۱۱۳۸, ۰.۲۰۸۷, ۰.۲۶۵۶, ۰.۳۳۲۰; ۱)$$

حال با تبدیل عددz به یک عدد فازی ذوزنقه‌ای می‌توان از مباحث کلاسیک فازی استفاده نمود. در بخش بعد با استفاده از روابط تشریح شده در بخش (۲-۲) و مباحث مربوط به ارزش در معرض ریسک، مقدار ریسک پرتفوی در مدل مسئله به عنوان تابع هدف لحاظ می‌شود. همچنین مقدار مورد انتظار برای متغیر فازی ذوزنقه‌ای با استفاده از نظریه اعتبار فازی و روابط بخش (۲-۳) به عنوان محدودیت درنظرگرفته می‌شود. در مرحله نهایی نیز اقدام به حل مدل خطی می‌نماییم.

۵- مدل مفهومی و متغیرهای پژوهش

در اینجا فرض می‌کنیم که بازده آتی هر دارایی از طریق یک عددz به شکل $z_i = (\tilde{A}_i, \tilde{R}_i)$ بیان شده است. که در آن $\tilde{A}_i$ یک عدد فازی ذوزنقه‌ای به شکل $\tilde{A}_i = (a_{1i}, a_{2i}, a_{3i}, a_{4i})$ بیانگر محدودیت اعمال شده بر روی بازده آتی دارایی می‌باشد و $\tilde{R}_i$ نیز یک عدد فازی مثلثی به شکل $\tilde{R}_i = (b_{1i}, b_{2i}, b_{3i})$ بیانگر میزان اطمینان عامل $\tilde{A}_i$ است. حال با توجه به موارد عنوان شده در بخش های قبلی می‌توان مدل تصمیم‌گیری جهت انتخاب سبد سرمایه‌گذاری را بادرنظرگرفتن رویکرد مارکوویتز به شکل زیر فرموله کرد:

$$\begin{aligned}
&\min \sum_{i=۱}^{n} x_i\,[(۲\alpha-۱)\sqrt{\beta}a_{۱i} - ۲\alpha\sqrt{\beta}a_{۲i}]\\
&s.t\\
&\sum_{i=۱}^{n} x_i\,\frac{\sqrt{\beta}a_{۱i}+\sqrt{\beta}a_{۲i}+\sqrt{\beta}a_{۳i}+\sqrt{\beta}a_{۴i}}{۴} \ge R \qquad \text{P(1)}\\
&x_۱ + x_۲ + \ldots + x_n = ۱\\
&x_i \ge ۰,\ i = ۱,۲,\ldots,n
\end{aligned}$$

در مدل(1)p، x_i برابر نسبت سرمایه‌گذاری بر روی سهم iام می‌باشد. همچنین $\beta = \dfrac{\int x\mu_{\tilde{R}}(x)dx}{\int \mu_{\tilde{R}}(x)dx}$

برای $\tilde{R} = \{\langle x, \mu_{\tilde{R}}(x)\rangle | x\epsilon X\}$ که عامل دوم عددz می‌باشد، است. علاوه بر این $1-\alpha$ برابر سطح اطمینان مورد نظر در محاسبه ارزش در معرض ریسک است. مثلا اگر بخواهیم ارزش در معرض ریسک را در سطح اطمینان 95% درنظر بگیریم، باید در مدل بالا مقدار α را برابر ۰،۰۵ قرار دهیم. لازم به ذکر است در مدل(1)p مقدار $\alpha \le 0.5$ می‌باشد.

حال اگر $\alpha > 0.5$ باشد، مدل p(1) به مدل(2)p تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned}
&\min \sum_{i=۱}^{n} x_i [(۲\alpha - ۲)\sqrt{\beta} a_{۳i} - (۲\alpha - ۱)\sqrt{\beta} a_{۴i}] \\
&s.t \\
&\sum_{i=۱}^{n} x_i \frac{\sqrt{\beta} a_{۱i} + \sqrt{\beta} a_{۲i} + \sqrt{\beta} a_{۳i} + \sqrt{\beta} a_{۴i}}{۴} \geq R \\
&x_۱ + x_۲ + \ldots + x_n = ۱ \\
&x_i \geq ۰, i = ۱, ۲, \ldots, n
\end{aligned} \qquad P(2)$$

همان‌طور که قبلا نیز اشاره شد، ازآن‌جایی که سطح اطمینان برای محاسبه ارزش در معرض ریسک$(1-\alpha)$ معمولا بیشتر از ۹۰٪ انتخاب می‌شود، مدل p(1) کاربرد گسترده‌تری در انتخاب سبد سرمایه‌گذاری دارد.

در بخش بعدی ما مدل فوق را با یک مثال عددی برای تعدادی از دارایی هایی که از بورس اوراق بهادار تهران انتخاب گردیده است، پیاده‌سازی می‌کنیم. سپس به تحلیل و بررسی نتایج حاصل از این مدل می‌پردازیم.

۶- یافته‌های پژوهش

در اینجا یک مثال عددی از مدل فوق با استفاده از داده‌های مربوط به دارایی‌های بورس اوراق بهادار تهران ارائه می‌کنیم. برای این کار ۱۰ دارایی از بورس تهران را به شکل تصادفی انتخاب کرده‌ایم که نماد آنها در جدول(۱) آمده است. برای تخمین پارامترهای فازی نیز از داده‌های مربوط به سال۱۳۹۳ استفاده شده است.

جدول(۱): اطلاعات مربوط به دارایی‌ها و بازده آن‌ها

ردیف	نماد	عددz بازده آتی	B
A_1	ونوین	$Z(A_1)=((-0.32 , 0.15 , 0.30 , 0.58) , (0.6 , 0.7 , 0.8))$	0.7
A_2	خودرو	$Z(A_2)=((-0.31 , 0.15 , 0.29 , 0.53) , (0.6 , 0.7 , 0.8))$	0.7
A_3	دپارس	$Z(A_3)=((-0.25 , 0.12 , 0.25 , 0.48) , (0.8 , 0.9 , 1))$	0.9
A_4	وصندوق	$Z(A_4)=((-0.29 , 0.15 , 0.31 , 0.55) , (0.7 , 0.8 , 0.9))$	0.8
A_5	وبهمن	$Z(A_5)=((-0.23 , 0.11 , 0.21 , 0.36) , (0.7 , 0.8 , 0.9))$	0.8
A_6	سشمال	$Z(A_6)=((-0.36 , 0.19 , 0.37 , 0.68) , (0.8 , 0.9 , 1))$	0.9
A_7	ملت	$Z(A_7)=((-0.26 , 0.14 , 0.28 , 0.50) , (0.8 , 0.9 , 1))$	0.9
A_8	رمپنا	$Z(A_8)=((-0.30 , 0.17 , 0.33 , 0.60) , (0.6 , 0.7 , 0.8))$	0.7
A_9	اخابر	$Z(A_9)=((-0.33 , 0.20 , 0.35 , 0.62) , (0.7 , 0.8 , 0.9))$	0.8
A_{10}	بسویچ	$Z(A_{10})=((-0.37 , 0.21 , 0.39 , 0.72) , (0.8 , 0.9 , 1))$	0.9

حال می‌توان به مدل‌سازی و حل مسئله با استفاده از مدل p(1) بپردازیم. برای این‌کار از نرم افزار لینگو بهره جسته‌ایم. همچنین با توجه به نابسامانی بازار سرمایه در سال ۱۳۹۳ مقدار R برابر ۱۵٪ و ۲۰٪ درنظر گرفته شده است. این مقدار به سطح انتظارات سرمایه‌گذار بستگی دارد. سطح اطمینان ارزش در معرض ریسک نیز ۹۵٪ تعیین گردیده است. نتایج حاصل از این محاسبات در جداول ۲ و ۳ خلاصه شده است.

جدول (۲): نتایج حاصل از اجرای مدل برای سطح اطمینان ۹۵٪ و R=15%

دارایی	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	مقدار ارزش در معرض ریسک: 0.20
نسبت سرمایه‌گذاری	0	0	0	0	0.26	
دارایی	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}	
نسبت سرمایه‌گذاری	0	0	0.74	0	0	

جدول (۳): نتایج حاصل از اجرای مدل برای سطح اطمینان ۹۵٪ و R=20%

دارایی	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	مقدار ارزش درمعرض ریسک: 0.25
نسبت سرمایه‌گذاری	0	0	0	0	0	
دارایی	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}	
نسبت سرمایه‌گذاری	0	0	0.43	0	0.57	

۷- تفسیر وتحلیل نتایج

همان‌طور که از جداول (۲) و (۳) مشاهده می‌شود برای R=15% مدل، سرمایه‌گذاری بر روی دارایی‌های A_5 و A_8 را پیشنهاد می‌دهد. درحالی‌که مقدار ارزش در معرض ریسک برابر ۲۰٪ تخمین زده می‌شود. واضح است که بر اساس قانون ریسک و بازده با افزایش بازده انتظاری، مقدار ریسک پرتفوی نیز افزایش می‌یابد. بنابراین با افزایش مقدار R به ۲۰٪، مقدار ارزش در معرض ریسک نیز به ۲۵٪ افزایش می‌یابد. ضمن آن‌که مدل، سرمایه‌گذاری بر روی دارایی‌های A_8 و A_{10} را به سرمایه‌گذار پیشنهاد می‌دهد. حال فرض کنید سرمایه‌گذار تمایل به تشکیل پرتفویی با تنوع بیشتر دارد. برای ساخت پرتفویی با تنوع بیشتر از دو محدودیت زیر می‌توان استفاده نمود:

۱) استفاده از محدودیت کاردینالیتی: این محدودیت تعداد دارایی‌های پرتفوی را به‌طور دقیق مشخص می‌کند. مثلا می‌توان تعیین کرد که دقیقا 5 دارایی در داخل پرتفوی سرمایه‌گذار وجود داشته‌باشد. این محدودیت به شکل زیر می‌باشد:

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = h \qquad (۲۵)$$

در رابطه بالا h تعداد دارایی‌های موجود در پرتفوی است. اما y_i یک متغیر صفر ویک می‌باشد که به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{اگر دارایی } i\text{ام در پرتفوی قرارداشته باشد} \\ ۰ & \text{اگر دارایی } i\text{ام در پرتفوی قرارنداشته باشد} \end{cases} \quad (۲۶)$$

۲) استفاده از محدودیت سقف و کف سرمایه‌گذاری: این محدودیت مشخص می‌کند که حداکثر و حداقل نسبت سرمایه‌گذاری برای هر دارایی چقدر باشد. این محدودیت به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$l_i y_i \le x_i \le u_i y_i \quad (۲۷)$$

در رابطه بالا l_i برابر حداقل نسبت سرمایه گذاری و u_i برابر حداکثر نسبت سرمایه گذاری برای دارایی iام می‌باشد.

با اضافه کردن دو نوع محدودیت فوق برای دارایی‌ها، سرمایه‌گذار می‌تواند پرتفوی خود را متنوع‌تر کند. بدین منظور فرض کنید $h=۵$, $u_i=۰.۵$, $l_i=۰.۱$ باشد، در این‌صورت جواب‌های بهینه برای حداقل بازده ۱۵٪ و ۲۰٪ به شکل زیر خواهد بود:

جدول (۴): نتایج حاصل از اجرای مدل اصلاح‌شده برای سطح اطمینان ۹۵٪ و R=15%

دارایی	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	مقدار ارزش در معرض ریسک: 0.20
نسبت سرمایه‌گذاری	0	0	0.1	0.1	0.19	
دارایی	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}	
نسبت سرمایه‌گذاری	0	0.11	0.5	0	0	

جدول (۵): نتایج حاصل از اجرای مدل اصلاح‌شده برای سطح اطمینان ۹۵٪ و R=20%

دارایی	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	مقدار ارزش درمعرض ریسک: 0.25
نسبت سرمایه‌گذاری	0	0	0	0.1	0	
دارایی	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}	
نسبت سرمایه‌گذاری	0	0.1	0.28	0.1	0.42	

همان‌طور که از نتایج مشخص است مقدار ارزش در معرض ریسک در تمامی حالات ثابت باقی مانده است. اما در مدل اصلاح شده (با حضور محدودیت های کاردینالیتی و سقف و کف نسبت سرمایه‌گذاری) پرتفوی به‌دست آمده تنوع بیشتری دارد. همچنین دارایی‌هایی که در حالت قبل روی آن‌ها سرمایه‌گذاری شده بود، در مدل اصلاح‌شده نیز بیشترین سهم سرمایه‌گذاری را به خود اختصاص داده‌اند. بنابراین وجود

محدودیت‌های کاردینالیتی و سقف و کف برای نسبت سرمایه‌گذاری می‌تواند به متنوع شدن پرتفوی و در نهایت کارایی بهتر مدل کمک کند.

۸- نتیجه‌گیری و بحث

در این مقاله به مسئله بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری با درنظر گرفتن بازده دارایی‌ها به صورت عددz پرداخته‌شد. نظریه اعدادz در سال ۲۰۱۱ معرفی شد و از مباحث نوین در حوزه منطق فازی می‌باشد. هر عددz که از یک جفت عدد فازی تشکیل شده است، علاوه بر در نظرگرفتن یک متغیر به شکل فازی، میزان محتمل بودن این برآورد ویا قابلیت اطمینان این برآورد را نیز به شکل یک عدد فازی دیگر درنظر می‌گیرد. استفاده از این نظریه در مسئله بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری سبب می‌شود تا علاوه بر تخصیص عدم قطعیت بر بازده دارایی‌ها به صورت مستقیم، میزان اعتبار پیش‌بینی خبرگان نیز لحاظ گردد. در واقع با استفاده از نظریه اعدادz می‌توان عدم قطعیت در تخمین پارامترهای فازی را نیز لحاظ نمود. با توجه به نوسانات بازارهای مالی و عدم وجود تصویری دقیق از بازده آتی دارایی‌ها در این بازارها، استفاده از این نظریه می‌تواند در تشریح تصاویر مبهم از بازده آتی دارایی‌ها کمک بسزایی کند. همچنین از سنجه ارزش در معرض ریسک که از سنجه‌های ریسک نامطلوب بوده و از کارایی بالایی برخوردار است، برای ارزیابی ریسک پرتفوی استفاده شده‌است. برای تخمین این سنجه، نظریه اعتبار فازی به‌کار گرفته شد که این نظریه بسیاری از نارسایی‌های نظریه امکان[۱۴] را پوشش داده و به برآورد دقیق‌تر میزان ارزش در معرض ریسک کمک می‌کند. علاوه براین استفاده از نظریه اعتبار در تخمین ارزش در معرض ریسک، مدل بهینه‌سازی پرتفوی را به صورت یک مدل خطی تبدیل می‌نماید. بنابراین استفاده از نظریه اعدادz و سنجه ارزش در معرض ریسک و همچنین استفاده از نظریه اعتبار فازی برای براورد ارزش در معرض ریسک، به تشکیل یک مدل کارا و کاربردی برای مسئله انتخاب سبد سرمایه‌گذاری منجر می‌شود. در نهایت نیز با انتخاب چند دارایی از بورس اوراق بهادار تهران یک مثال عددی برای این مدل فراهم شد که در تحلیل نتایج حاصل از پیاده سازی مدل، یک محدودیت کف و سقف نسبت سرمایه‌گذاری برای هر دارایی و همچنین محدودیت کاردینالیتی به مدل اضافه گردید. اصلاح مدل ازطریق اضافه شدن این محدودیت ها به متنوع‌تر شدن پرتفوی کمک می‌کند. علاوه بر این وجود محدودیت کاردینالیتی این اختیار را به سرمایه‌گذار می‌دهد تا تعداد دارایی‌های پرتفوی خود را دقیقا تعیین کرده تا از عهده کنترل و نظارت برآنها برآید.

فهرست منابع

* Aliev, R. A., Alizadeh, A. V., & Huseynov, O. H. The arithmetic of discrete Z-numbers. Information Sciences, (2015).290, 134-155.
* Aliev, R. A., & Zeinalova, L. M. Decision making under Z-information. In Human-Centric Decision-Making Models for Social Sciences (2014). (pp. 233-252). Springer Berlin Heidelberg.

* Azadeh, A., Saberi, M., Atashbar, N. Z., Chang, E. J., & Pazhoheshfar, P. (2013, July). Z-AHP: A Z-number extension of fuzzy analytical hierarchy process. In Digital Ecosystems and Technologies (DEST), 7th IEEE International Conference on 2013 (pp. 141-147). IEEE.
* Embrechts, P., McNeil, A., & Straumann, D. Correlation and dependence in risk management: properties and pitfalls. Risk management: value at risk and beyond, (2002). 176-223.
* Fama, E. F. The behavior of stock-market prices. Journal of business (1965). 34-105.
* Garcia, R., Renault, É. & Tsafack, G. Proper conditioning for coherent VaR in portfolio management. Management Science, (2007). 53(3), 483-494.
* Gardashova LA. Application of operational approaches to solving decision making problem using Z-numbers. Applied Mathematics. 2014 May 21;5(09):1323.
* GEORGE J, K. L. I. R., & Bo, Y. Fuzzy sets and fuzzy logic, theory and applications. (2008).
* Gupta,P ,Mukesh K.M, Inuiguchi M, Chandra S. Fuzzy Portfolio Optimization, Advances in Hybrid Multi-criteria Methodologies. Studies in Fuzziness and Soft Computing. (2014).
* Heyde, C. C. A risky asset model with strong dependence through fractal activity time. Journal of Applied Probability, (1999). 1234-1239.
* Hosking, J.R.M., Bonti, G., Siegel, D. Beyond the lognormal. Risk. (2000). 13 (5), 59–62.
* Huang, C., & Moraga, C. A fuzzy risk model and its matrix algorithm. International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems, (2002).10(04), 347-362.
* Huang, D., Fabozzi, F. J., & Fukushima, M. Robust portfolio selection with uncertain exit time using worst-case VaR strategy. Operations Research Letters, (2007). 35(5), 627-635.
* Huang, X. Portfolio analysis: from probabilistic to credibilistic and uncertain approaches (Vol. 250). Springer. (2010).
* Jorion, P. Value at risk: the new benchmark for controlling market risk. Irwin Professional Pub. (1997).
* Kang, B., Wei, D., Li, Y., & Deng, Y. A method of converting Z-number to classical fuzzy number. J. Inf. Comput. Sci, (2012). 9(3), 703-709.
* Kang, B., Wei, D., Li, Y., & Deng, Y. Decision making using Z-numbers under uncertain environment. Journal of Computational Information Systems, (2012). 8(7), 2807-2814.
* Katagiri, H., Uno, T., Kato, K., Tsuda, H., & Tsubaki, H. Random fuzzy bilevel linear programming through possibility-based value at risk model. International Journal of Machine Learning and Cybernetics, (2014). 5(2), 211-224.
* Kaufmann, A., & Gupta, M. M. Introduction to fuzzy arithmetic: theory and applications. Arden Shakespeare. (1991).
* Koenig, M., & Meissner, J. Value-at-risk optimal policies for revenue management problems. International Journal of Production Economics, (2015). 166, 11-19.
* Konno, H., & Yamazaki, H. Mean-absolute deviation portfolio optimization model and its applications to Tokyo stock market. Management science, (1991). 37(5), 519-531.
* Lee, L. W., & Chen, S. M. Fuzzy risk analysis based on fuzzy numbers with different shapes and different deviations. Expert Systems with Applications, (2008). 34(4), 2763-2771.
* Linsmeier, T. J., & Pearson, N. D. Value at risk. Financial Analysts Journal, (2000).56(2), 47-67.
* Liu, B., & Liu, Y. K. Expected value of fuzzy variable and fuzzy expected value models. Fuzzy Systems, IEEE Transactions on, (2002). 10(4), 445-450.
* Liu, B. Uncertainty Theory: An Introduction to its Axiomatic Foundations. 2004.
* Liu, B. Uncertainty theory (pp. 205-234). Springer Berlin Heidelberg. (2007).
* Liu, B., & Liu, B. Theory and practice of uncertain programming (2002). (pp. 78-81). Heidelberg: Physica-verlag.

* Liu, B. A survey of credibility theory. Fuzzy optimization and decision making, (2006).5(4), 387-408.
* Liu, Y. K., & Gao, J. The independence of fuzzy variables with applications to fuzzy random optimization. International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems, (2007). 15(supp02), 1-20.
* Mandelbrot, B. B. The variation of certain speculative prices (pp. 371-418). Springer New York. (1997).
* Markowitz, H. M. Foundations of portfolio theory. Journal of finance, (1991).469-477.
* McNeil, A. J., & Frey, R. Estimation of tail-related risk measures for heteroscedastic financial time series: an extreme value approach. Journal of empirical finance, (2000).7(3), 271-300.
* Pal, S. K., Banerjee, R., Dutta, S., & Sarma, S. S. An insight into the Z-number approach to CWW. Fundamental Information, (2013). 124(1-2), 197-229.
* Peng, J. Credibilistic value and average value at risk in fuzzy risk analysis. Fuzzy Information and Engineering, (2011).3(1), 69-79.
* Peng, J. (2008, June). Measuring fuzzy risk by credibilistic value at risk. InInnovative Computing Information and Control, ICICIC'08. 3rd International Conference on 2008. (pp. 270-270). IEEE.
* Sadi-Nezhad S, Sotoudeh-Anvari A. A new Data Envelopment Analysis under uncertain environment with respect to fuzziness and an estimation of reliability. OPSEARCH. 2015:1-3.
* Wang, B., Wang, S., & Watada, J. Fuzzy-portfolio-selection models with value-at-risk. Fuzzy Systems, IEEE Transactions on, (2011). 19(4), 758-769.
* Wang, B., Li, Y. & Watada, JA. distance-based PSO approach to solve fuzzy MOPSM with distinct risk measurements. Int. J. Innov. Comput. Inf. Control, (2012). 8, 6191-6205.
* Wang, S., & Watada, J. Two-stage fuzzy stochastic programming with Value-at-Risk criteria. Applied Soft Computing, (2011).11(1), 1044-1056.
* Yager, R. R. On a view of zadeh's z-numbers. In Advances in Computational Intelligence (2012). (pp. 90-101). Springer Berlin Heidelberg.
* Zadeh, L. A. A note on Z-numbers. Information Sciences, (2011). 181(14), 2923-2932.

یادداشت‌ها

[1]. Z-numbers
[2]. Zadeh extension principle
[3]. Fuzzy Expectation of a fuzzy set
[4]. crisp number
[5]. Credibility value at risk
[6]. Positive Homogeneity
[7]. Monotonicity
[8]. Translation Invariance
[9]. Monotonicity Transformation
[10]. Subadditivity under Independence
[11]. Convexity under Independence
[12]. Computing with words (cww)
[13]. Z-information
[14]. Possibility theory